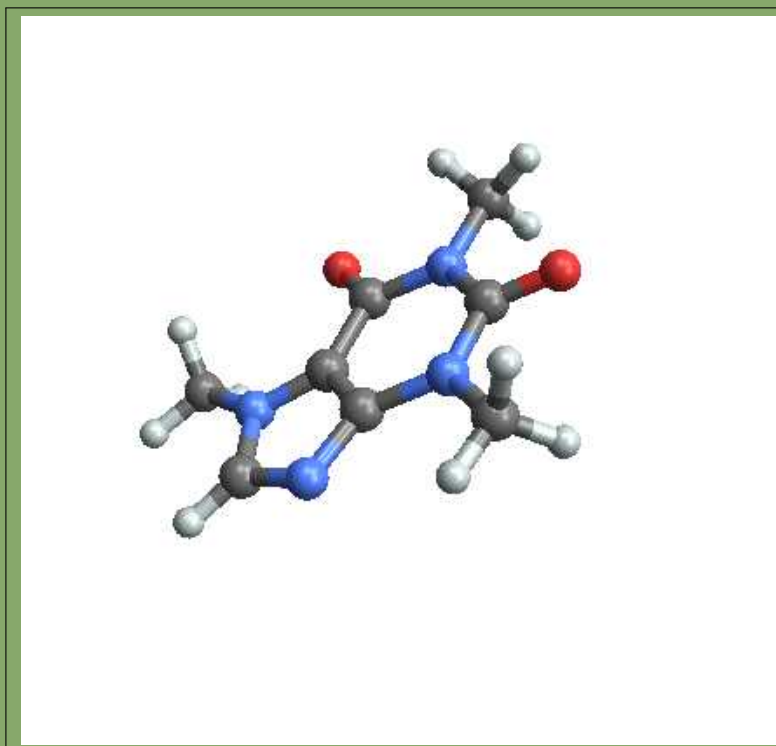
UNIVERSITÀ SAPIENZA

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Istituzioni di Matematica I

2017 - 2018

La dispensa raccoglie il materiale
preparato da L .Lamberti
insieme ai colleghi
C.Cassisa , A. Davini, C.Mascia, V. Nesi, L.Orsina,
A.Terracina,
per i corsi di

Istituzioni di Matematica I

Laurea in Chimica

negli anni accademici
2015-2016
2016-2017
2017-2018

L'immagine
di copertina è stata prodotta da
Mathematica
con il comando
`ChemicalData["Caffeine", "MoleculePlot"]`

Dispense scritte in LaTeX

Ultima revisione:
7 giugno 2018

Introduzione

Queste Dispense raccolgono il lavoro fatto insieme a un gruppo di colleghi, direi di amici, in tre anni di insegnamento del corso di Istituzioni di Matematica I per la laurea in Chimica della nostra Università, Sapienza di Roma.

I problemi da affrontare specie inizialmente sono stati diversi: un arretrato inaccettabile di studenti usi posticipare l'indispensabile formazione matematica, l'affluenza al corso di laurea di ragazzi provenienti da formazioni scolastiche spesso inadeguate e infine il parcheggio sui banchi di chimica degli aspiranti medici che non avevano superato la selezione.

A questi problemi, contingenti, se ne aggiunge un'altro: quello del tipo di matematica adatto. Io ricordo, vergognandomene un po', il mio passato in cui la teoria dei limiti distingueva rigorosamente se si stesse lavorando su uno spazio di Hausdorff o meno, ... approcci da topologia banale !

Risulta evidente che il mitico contributo delle *dimostrazioni* deve occupare nei corsi di servizio una parte marginale, sostituita da una reale comprensione del significato e del vantaggio delle ipotesi che gli algoritmi utilizzano.

È apparso anche evidente come fosse necessario dedicare una prima parte del corso a una rilettura del calcolo letterale senza dare per scontate quelle competenze che i diplomi di maturità conseguiti farebbero sperare.

La didattica dei corsi, in tutti e tre gli anni, è stata ispirata a non perdere studenti e a convincerli del vantaggio di mantenersi aggiornati sì da superare, con naturalezza, la prova d'esame immediatamente al termine delle lezioni.

Lo strumento fondamentale è stato quello degli esoneri - le prove in itinere - con i quali si sono realizzati, contemporaneamente, più obiettivi. Avvertire quanto prima, entro il primo mese di corso, gli studenti circa la loro preparazione; promettere loro un percorso d'esame agevolato con la conquista, prova dopo prova, della qualifica di *esonerato*, una più che ragionevole ipoteca sul superamento dell'esame.

Ogni settimana inoltre gli studenti hanno ricevuto un foglio di esercizi, unico per tutti i canali del Corso, relativo agli argomenti trattati e propedeutico, a sua volta, alle prove, mensili, d'esonero.

Che tutto ciò sia stato sufficiente a risolvere la totalità dei problemi non può affermarsi con certezza, anche se un certo numero di statistiche accuratamente raccolte sembrano approvare il progetto.

Veniamo ora al contenuto della Dispensa: quasi 600 pagine divise in tre parti, una di teoria corredata da esercizi, svolti nell'ultimo capitolo, e due parti con gli svolgimenti totali e didatticamente quasi sempre molto estesi dei fogli settimanali, la Parte 2 per i Fogli del 2015-16, la Parte 3 per quelli del 2016-17.

Nel corrente 2017-18 l'uso del supporto informatico *Moodle*, ha consentito un numero prima impensabile di vantaggi legati all'interattività del programma: l'introduzione di questo complesso strumento è dovuta a L.Orsina.

Veniamo ora al contenuto della Parte I, *Teoria e non solo...*: si tratta di un fondo generato dagli Appunti che preparavo per ogni lezione, dal Diario delle Lezioni stesse, da qualche questione che giorno per giorno mi è sembrata adatta e utile.

Lo stile adottato è colloquiale, teso ad evitare automatismi mnemonici o tecnicismi criptici: più della metà dello spazio è occupato da Esempi, Osservazioni, Esercizi.

Dei 27 Capitoli di *Teoria e non solo...* non più della metà possono essere trattati nell'ambito dei crediti del Corso di Istituzioni di Matematica I.

Ritengo importante, in una futura revisione dei programmi, tenere ben chiaro il carattere *istituzionale* del Corso e la scelta degli argomenti che non può trascurare gli interessi culturali immediati del Coso di Laurea.

Un'ultima precisazione: le Dispense scritte in due, Corrado e io, molti anni fa per il Corso di Laurea in Fisica erano pensate e destinate a studenti di Fisica.

Non tutti gli studenti sono uguali e hanno le stesse urgenze.

Roma, 1 aprile 2018

Lamberto

Indice

Alfabeto greco

minuscola	maiuscola	nome	suono corrispondente
α	A	alfa	*a*
β	B	beta	*b*
γ	Γ	gamma	*g*
δ	Δ	delta	*d*
ϵ, ε	E	epsilon	*ĕ (e breve)*
ζ	Z	zeta	*z*
η	N	eta	*ē (e lunga)*
θ, ϑ	Θ	theta	*th inglese*
ι	I	iota	*i*
κ	K	cappa	*k*
λ	Λ	lambda	*l*
μ	M	mi	*m*
ν	V	ni	*n*
ξ	Ξ	xi	*x*
ϕ, φ	Φ	fi	*f*
o	O	omicron	*ŏ (o breve)*
π, ϖ	Π	pi (pi greco)	*p*
ρ, ϱ	P	ro	*r*
σ, ς	Σ	sigma	*s*
τ	T	tau	*t*
υ	U	üpsilon	*u francese*
χ	X	chi	*ch tedesco*
ψ	Ψ	psi	*ps*
ω	Ω	omega	*ō (o lunga)*

Parte 1

Teoria, e non solo . . .

CAPITOLO 1

Numeri

1. I razionali

God made the integers;
all the rest is the work of Man.
Leopold Kronecker

I numeri più noti, i *numeri naturali* $\mathbb{N}$

$$0, 1, 2, \quad \ldots$$

sono quelli che si incontrano nell'attività di *contare*. Su di essi si eseguono naturalmente somme e moltiplicazioni, mentre non si possono sempre eseguire nè le sottrazioni nè le divisioni.

Per garantire le sottrazioni si introducono gli *interi* $\mathscr{Z}$

$$\ldots \quad -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \quad \ldots$$

positivi e negativi.

Sugli interi sono possibili addizioni, sottrazioni e moltiplicazioni, quest'ultima distributiva rispetto alla somma.

Il prodotto di due interi è nullo se e solo se è nullo uno (almeno) dei fattori: da ciò deriva la celebre *regola dei segni*

$$0 = a \times (b - b) = a \times b + a \times (-b) \quad \rightarrow \quad a \times (-b) = -a \times b$$

che mostra come $a \times b$ e $a \times (-b)$ siano opposti:

- il prodotto di due positivi o di due negativi è positivo,
- il prodotto di un positivo e di un negativo è negativo.

Gli interi $\mathscr{Z}$ che permettono le sottrazioni non consentono tuttavia le divisioni. Per tale motivo si introducono i *razionali* $\mathbb{Q}$, le frazioni

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{7}{8}, \quad \ldots$$

I razionali, le frazioni, godono della naturale proprietà di poter essere rappresentati da più frazioni *equivalenti*

$$\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{49}{21} = \frac{7000}{3000} = \quad \ldots$$

I razionali $\mathbb{Q}$ includono, pensando alle frazioni con denominatore 1 gli interi $\mathscr{Z}$ i quali a loro volta includono i naturali $\mathbb{N}$.

Le operazioni aritmetiche del tutto ovvie sui naturali e sugli interi sono un po' più complesse sui razionali:

- somme e differenze sono ovvie solo tra frazioni che abbiano denominatori uguali, situazione tuttavia alla quale ci si può sempre ridurre,
$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5} \quad = \quad \frac{15}{20}+\frac{8}{20} \quad = \quad \frac{23}{20}$$
- la moltiplicazione è molto semplice
$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{2} \quad = \quad \frac{5\times 3}{7\times 2} \quad = \quad \frac{15}{14}$$
- la divisione si gestisce come una moltiplicazione
$$\frac{9}{5}:\frac{7}{8} \quad = \quad \frac{9}{5}\times\frac{8}{7} \quad = \quad \frac{72}{35}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Una curiosità su una strana somma: siano a, b, c, d quattro numeri naturali (positivi) : le due frazioni da essi determinate verifichino la disuguaglianza*
$$\frac{a}{b} \quad \leq \quad \frac{c}{d}$$
La strana somma $\dfrac{a+c}{b+d}$, `mediant` *in inglese, cade allora fra le due*
$$\frac{a}{b} \quad \leq \quad \frac{a+c}{b+d} \quad \leq \quad \frac{c}{d}$$

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Decidere quale sia più grande tra i due numeri razionali
$$\frac{n}{n+1},\ \frac{2n}{2n+1},\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(2) ▶▶ Valutare la distanza tra i due numeri razionali
$$\frac{123}{456},\ \frac{789}{987}.$$
(3) ▶▶ Calcolare il numero razionale
$$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}$$

2. Fattorizzazione

I numeri naturali possono utilmente essere rappresentati sotto forma di prodotto di fattori

$$36 = 6 \times 6 = 3 \times 12 = 9 \times 4 = 2^2 \times 3^2$$

I numeri 6, 3, 2, 4, 9, 12 si dicono *divisori propri* di 36.

Naturalmente sia 1 che 36 stesso sono divisori di 36, divisori che diremo *banali*.

Alcuni numeri naturali possiedono solo i divisori *banali* ovvero non possiedono divisori propri, cioè diversi da 1 e da sè stessi.

I numeri naturali che non possiedono divisori propri si dicono *primi*.

La tabella seguente elenca i *numeri primi* minori di 1000 [1]:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

L'algoritmo più semplice ed efficace per ottenere una tabella come quella precedente si chiama *crivello di Eratostene*:

- si scrivono tutti i numeri da 2 a 1000,
- poi si cancellano tutti i multipli di 2, cioè $4, 6, 8, \ldots$
- poi si cancellano tutti i multipli di 3, cioè $6, 9, 12, \ldots$
- poi si cancellano tutti i multipli di 4, cioè $8, 12, 16, \ldots$, ma questo è un lavoro facile perchè questi numeri erano già stati cancellati lavorando sui multipli di 2,
- poi si cancellano tutti i multipli di 5, cioè $10, 15, 20, \ldots$,
- ecc. ecc.

I numeri che si salvano a questa imponente operazione di cancellazione sono i *numeri primi* minori di 1000.

[1] Il numero 1 stesso non è incluso tra i *numeri primi* per convenzione (ragionevolmente) accolta.

In generale è molto difficile decidere se un numero naturale sia *primo* o no: certo se si tratta di un numero abbastanza piccolo è facilissimo (basta per esempio, se è minore di 1000, vedere se è compreso nella tabella precedente) ma se il numero è un po' più grande (per esempio se scritto nella naturale notazione decimale ha più di una ventina di cifre) il problema diventa assai complesso.

TEOREMA 2.1. *Un risultato molto antico e bellissimo è che ogni numero naturale è prodotto di fattori primi, e che tale fattorizzazione è unica, cioè non ci possono essere due fattorizzazione diverse di uno stesso numero.*

Ad esempio

$$123456789 = 2 \times 3^2 \times 3607 \times 3803$$

essendo gli ultimi due sorprendenti fattori due numeri primi.

OSSERVAZIONE 2.2. *I quadrati perfetti $m = n^2 = n \times n$ presentano una scomposizione in fattori primi particolare: tutti i primi che la compongono hanno esponenti pari.*

$$n = p^{\alpha} q^{\beta} \dots r^{\gamma} \quad \rightarrow \quad m = n^2 = p^{2\alpha} q^{2\beta} \dots r^{2\gamma}$$

Ne segue, ad esempio, che se il quadrato perfetto m è divisibile per un fattore primo q, allora è divisibile anche per q^2.

Così se, ad esempio, m è un quadrato perfetto ed è divisibile per 7 allora m è divisibile anche per 49.

2.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $m \in \mathbb{N}$: provare che i suoi fattori propri sono tutti minori di m.
(2) ▶▶ Siano p_1, p_2, p_3 tre numeri primi: provare che il numero

$$m = p_1 \times p_2 \times p_3 + 1$$

non è divisibile nè per p_1, nè per p_2 nè per p_3.
(3) ▶▶ Provare che i numeri $m = n^3 - n$ sono divisibili per 3 $\forall n \in N$.

3. M.C.D. ed equazioni diofantee

Due numeri naturali a e b possono avere o meno divisori comuni, oltre naturalmente l'unità:

- se ci sono divisori comuni si può cercare quale sia il più grande, che prende il nome di *Massimo Comun Divisore*, $MCD(a, b)$
- se non ve ne sono, ovvero se l'unico divisore comune è 1, i due numeri si dicono *coprimi fra loro*.

La determinazione del $MCD(a, b)$ è tradizionalmente nella nostre scuole secondarie collegata alla scomposizione dei due numeri a e b in fattori primi e quindi alla costruzione del $MCD(a, b)$ come prodotto dei fattori comuni ai due numeri, presi con l'esponente minore.

Si tratta di una proposta, che pur corretta, conduce a calcoli che, al di fuori degli esempi banali tradizionalmente proposti, presentano la considerevole complessità della fattorizzazione, lavoro del tutto inutile ai fini del calcolo del $MCD(a, b)$.

L'algoritmo di calcolo del $MCD(a, b)$ è *l'algoritmo euclideo delle divisioni successive*: illustriamo tale procedimento con l'esempio seguente:

ESEMPIO 3.1. *Si debba calcolare il* $MCD(a,b)$, $a = 86380$, $b = 45780$, $a \geq b$.

Indichiamo con q il quoziente aritmetico (intero) $a : b$ e con $r < b$ il resto: se $r = 0$ allora b divide a e, ovviamente $MCD(a,b) = b$.

Se invece $r \neq 0$ allora si eseguono le divisioni successive come nella tabella seguente

a	$=$	q	$\times$	b	$+$	r
86380	$=$	1	$\times$	45780	$+$	40600
45780	$=$	1	$\times$	40600	$+$	5180
40600	$=$	7	$\times$	5180	$+$	4340
5180	$=$	1	$\times$	4340	$+$	840
4340	$=$	5	$\times$	840	$+$	140
840	$=$	6	$\times$	140	$+$	0

Il passaggio da ogni riga alla successiva è semplice:

- *b prende il posto di a,*
- *r prende il posto di b.*

L'ultimo resto non nullo, 140*, è il* $MCD(a,b)$ *cercato.*

Il tutto ottenuto con sole 6 *divisioni aritmetiche !*

Rileggendo a ritroso la tabella delle divisioni successive del precedente esempio si osserva un'importante proprietà del $MCD(a,b)$:

40600	$=$	$a - b$
5180	$=$	$-a + 2b$
4340	$=$	$8a - 15b$
840	$=$	$-9a + 17b$
140	$=$	$53a - 100b$

L'ultima riga mostra che

$$MCD(86380,\ 45780) = 53 \times \mathbf{86380} - 100 \times \mathbf{45780}$$

Accettiamo che quanto verificato sull'esempio corrisponda effettivamente a un comportamento generale:

TEOREMA 3.2. *Il Massimo Comun Divisore tra due numeri è combinazione lineare a coefficienti interi di quei due numeri stessi:*

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathscr{Z} : \; \lambda a + \mu b = MCD(a,b)$$

ESERCIZIO 3.3. 12 *e* 35 *sono coprimi: infatti* $MCD(35,12) = 1$. *Anche* 15 *e* 8 *sono coprimi.*

Sono ovviamente coprimi due qualsiasi numeri primi diversi, come pure due numeri prodotti di fattori primi diversi.

La famosa funzione ϕ di Eulero produce per ogni naturale n il numero di naturali minori di n e coprimi con esso: così, ad esempio

$$\begin{array}{lcl} \phi(2) & = & 1 \\ \phi(3) & = & 2 \\ \phi(4) & = & 2 \\ \phi(5) & = & 4 \\ \phi(6) & = & 2 \\ \phi(7) & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \phi(8) & = & 4 \\ \phi(9) & = & 6 \\ \phi(10) & = & 4 \\ \phi(11) & = & 10 \\ \phi(12) & = & 4 \\ \phi(13) & = & 12 \end{array}$$

3.1. Equazioni diofantee.

Il titolo si riferisce a Diofanto di Alessandria, matematico del III secolo d.C.: il problema *Equazioni diofantee* si riferisce alla capacità di risolvere equazioni assegnate servendosi dei soli numeri interi.

Delle equazioni

$$3x - 18 = 0, \quad 3x - 19 = 0$$

la prima ha soluzione intera 6, la seconda non ha soluzione perchè 19 non è divisibile per 3.

Quindi le equazioni $ax + b = 0$ hanno soluzione (intera) se e solo se b è divisibile per a.

Il problema diventa un po' più complicato se si pensa ad equazioni in due variabili: per quali $k \in \mathscr{Z}$ l'equazione

$$12x - 6y = k$$

ha soluzioni $x, y \in \mathscr{Z}$?

Tenuto conto che 12 e -6 sono numeri pari anche la somma $12x - 6y$ sarà un numero pari, qualunque siano x e y.

Pertanto l'equazione $12x - 6y = k$ con k dispari non ha soluzioni in $\mathscr{Z}$.

Inoltre, tenuto conto che 12 e -6 sono entrambi divisibili per 3 anche la somma $12x - 6y$ sarà un numero divisibili per 3, qualunque siano x e y.

Pertanto l'equazione $12x - 6y = k$ con k non divisibile per 3 non ha soluzioni in $\mathscr{Z}$.

Le osservazioni fatte, e il precedente Teorema (3.2) conducono ad accogliere la seguente

PROPOSIZIONE 3.4. *Se* $MCD(a,b) = \delta$ *l'equazione* $ax + by = k$ *ha soluzioni in* $\mathscr{Z}$ *per ogni* $k \in \mathscr{Z}$ *che sia multiplo di* δ.

DIMOSTRAZIONE.

$$MCD(a,b) = \delta \quad \to \quad \exists\, \lambda,\, \mu :\ \lambda a + \mu b = \delta$$

da cui se $k = m \times \delta$ gli interi $(m \times \lambda)$ e $(m \times \mu)$ sono soluzioni dell'equazione. □

3.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Esaminare se sia vero che $MCD(a^2, b^2) = MCD^2(a,b)$.
(2) ▶▶ Detto $m = MCD(678, 876)$ determinare due interi u e v tali che

$$m = 678\,u + 876\,v.$$

(3) ▶▶ Determinare due soluzioni (due coppie di soluzioni) dell'equazione diofantea $123\,x + 321\,y = 18$.

4. Rappresentazioni decimali

I numeri si scrivono servendosi delle 10 cifre

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

quando scriviamo 573 intendiamo, come tutti sanno,

$$5 \times 100 \quad + \quad 7 \times 10 \quad + \quad 3$$

diamo cioè alle tre cifre 5, 7 e 3 ruoli diversi a seconda della posizione in cui figurano:

- 5 indica le *centinaia*,
- 7 indica le *decine*,
- 3 indica le *unità*

Analogamente il numero $167,345$ rappresenta il numero razionale

$$167 \quad + \quad 3 \times \frac{1}{10} \quad + \quad 4 \times \frac{1}{100} \quad + \quad 5 \times \frac{1}{1000}$$

Il ruolo delle cifre con cui rappresentiamo ogni numero, ruolo diverso a seconda della diversa posizione, costituisce la natura *posizionale* della notazione.

L'antica numerazione romana

$$4 = IV, \quad 25 = XXV, \quad 63 = LXIII, \quad \ldots$$

non è posizionale.

4.1. Approssimazioni. I numeri naturali sono ...*esatti*: 2 è 2, 10 è 10 e nessuno si permette di dire che sia 11 !

Per i numeri razionali scritti in forma decimale le cose sono sovente accolte in modo leggermente diverso: il numero $167,345$ può essere approssimato con

$$167,34 \quad 167,3 \quad \text{e, in qualche caso, addirittura con } 167$$

Si tratta di approssimazioni opportune a seconda delle diverse precisioni alle quali quel valore si riferisce: misura di un manufatto in meccanica, in falegnameria, in agricoltura.

Inoltre a fronte del numero $167,345$ solitamente non si fanno dichiarazioni sugli eventuali decimali che seguissero al quarto, quinto, ecc. posto dopo la virgola.

4.1.1. *Alcune approssimazioni frequenti.*
In molte calcolatrici come naturalmente in molti linguaggi di programmazione sono presenti le funzioni *floor(x)*, *ceiling(x)* e *round(x)* che producono approssimazioni intere di numeri non interi: rispettivamente l'intero più vicino a sinistra, quello più vicino a destra, quello più vicino in assoluto.

Il loro funzionamento si capisce direttamente considerando qualche esempio:

x	$floor(x)$	$ceiling(x)$	$round(x)$
6.3	6	7	6
−3.2	−4	−3	−3
0.7	0	1	1

4.2. I numeri periodici. La divisione euclidea, ad esempio $4 : 3$ produce i decimali

$$1, \quad 1.3, \quad 1.33, \quad 1.333, \quad \ldots$$

La situazione suggerisce la proposta di rappresentare il razionale $4/3$ nella forma decimale

$$1 \textit{ seguito da infiniti } 3$$

che viene anche spesso indicata col simbolo $1.\overline{3}$ cui si da il nome di *numero periodico* di parte intera 1 e periodo 3.

TEOREMA 4.1. *Ogni numero razionale si rappresenta sotto forma decimale o con un numero finito di cifre dopo la virgola o sotto forma di numero periodico.*

Esistono anche formule abbastanza complicate che permettono dato un numero decimale periodico di risalire alla frazione che gli corrisponde:

$$\frac{17}{3} = 5.\overline{6}, \quad 0.\overline{21} = \frac{21}{99}$$

Vedremo queste formule in modo meno mnemonico quando ci occuperemo di serie geometriche, vedi pagina 307.

OSSERVAZIONE 4.2. *L'accettazione dei numeri periodici permette di osservare fenomeni abbastanza sorprendenti: è naturale ritenere che due numeri a e b siano vicini se hanno la stessa parte intera e buona parte dei primi decimali uguali*

$$123.5678... \approx 123.5679...$$

Si da il caso che

$$1.0 \qquad e \qquad 0.\overline{9}$$

abbiano parte intera diversa e parte decimale altrettanto diversa...

... tuttavia sono lo stesso numero !

4.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare un numero razionale compreso tra i due decimali $123,456$ e $123,457$.
(2) ▶▶ Determinare i numeri decimali con una sola cifra dopo la virgola compresi tra $\frac{7}{9}$ e $\frac{9}{7}$
(3) ▶▶ Sia a il numero periodico $1.\overline{3}$: determinare l'espressione razionale di a^2.

5. Le variabili

Prendono questo nome le quantità, generalmente rappresentate da lettere, i cui valori non siano direttamente assegnati ma solo indicati come elementi di alcuni insiemi che prendono il nome di *dominio* di quella variabile

Così, ad esempio,

- x potrà rappresentare una variabile cui si potranno attribuire, per qualche motivo, solo i numeri dell'intervallo $[1,5]$
- n potrebbe essere una variabile che, come risultato di un conteggio, possa prendere solo valori dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali,
- *provincia* potrebbe essere una variabile che assume come valore le parole che figurano nell'elenco delle provincie.

5.1. Il dominio. Il *dominio* di una variabile x si deduce dalle operazioni che dovranno essere eseguite su di essa:

- se per esempio si dovrà eseguire una divisione per x occorrerà che $x \neq 0$, cioè il dominio di x dovrà essere un insieme che escluda lo zero,
- se dovrà essere eseguita una radice quadrata $\sqrt{x}$ occorrerà che $x \geq 0$, cioè il dominio di x dovrà essere un insieme che escluda i numeri negativi,
- ecc. ecc.

5.2. Esercizi.

(1) ►► Determinare il dominio della espressione $\sqrt{1-x^2}$.
(2) ►► Calcolare l'espressione $\dfrac{(x-1)^2}{(x+2)^2}$ per $x = 1+\sqrt{2}$.
(3) ►► Calcolare per quali t è definita l'espressione $\dfrac{\sqrt{1-t}}{\sin(t)}$.

6. Algebra dei numeri razionali

Sui numeri razionali si eseguono le quattro operazioni aritmetiche, con l'unica limitazione della impossibile divisione per zero.

In particolare si noti che i quozienti $1/a$ sono

- positivi sempre più grandi quanto più il denominatore a è positivo e più piccolo,
- negativi sempre più grandi quanto più il denominatore a è negativo e più piccolo.

6.1. L'ordinamento.

Ad ogni numero razionale corrisponde un punto di una retta sulla quale siano stati fissati l'origine O, al quale far corrispondere lo zero e il punto unitario U al quale far corrispondere il numero 1.

Orientata la retta nel verso da O a U si determina un analogo ordinamento per i numeri razionali: ad r_1 corrisponda P_1 e a r_2 corrisponda P_2 se nel verso da O a U P_1 viene prima di P_2 allora $r_1 \leq r_2$, quindi

$$\frac{5}{3} \leq 4, \quad -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3}$$

È bene osservare il ruolo delle notazioni $\leq \quad \geq \quad < \quad >$ che si utilizzano quotidianamente:

$$\begin{array}{rl} 3 \leq 3 & \textit{giusto} \\ 4 < 7 & \textit{giusto} \\ -5 \geq 0 & \textit{sbagliato} \\ -2 > -3 & \textit{giusto} \\ \textit{ecc.} & \end{array}$$

Le operazioni aritmetiche influiscono sull'ordinamento: ad esempio se $r_1 \leq r_2$ allora

$$\begin{cases} \forall a & \to \quad r_1 + a \leq r_2 + a \\ \rho \geq 0 & \to \quad \rho r_1 \leq \rho r_2 \\ \rho \leq 0 & \to \quad \rho r_1 \geq \rho r_2 \\ & \\ \sigma < 0 & \to \quad \dfrac{r_1}{\sigma} \geq \dfrac{r_2}{\sigma} \end{cases}$$

6.2. La legge di annullamento dei prodotti.

$$a \times b = 0$$

se e solo se uno dei due fattori è zero.

6.3. La convenzione degli esponenti. Per le potenze ad esponente intero valgono ovvie relazioni quali

$$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5$$

da cui, in generale, $a^n \times a^m = a^{n+m}$ e di conseguenza le definizioni relative ad esponenti razionali

$$\begin{cases} a^{-n} & = \frac{1}{a^n} \\ a^0 & = 1 \\ a^{-2} & = \frac{1}{a^2} \\ a^{1/2} & = \sqrt{a} \\ a^{4/3} & = a\sqrt[3]{a} \end{cases}$$

6.4. Il ruolo delle parentesi nelle espressioni. In una catena di più di due operazioni è indispensabile convenire sull'ordine con cui eseguire le diverse operazioni

$$5 + 3 \times 6 \overset{?}{=} \begin{cases} 8 \times 6 & = 48 \\ 5 + 18 & = 23 \end{cases}$$

La convenzione tacitamente accolta è la seconda

$$5 + 3 \times 6 = 5 + 18 = 23$$

Le parentesi servono a decidere eventuali modifiche a tale convenzione: così

$$(5 + 3) \times 6 = 48$$

Ambiguità meno frequenti ma comunque importanti sono, ad esempio

$$4^{3^2} \overset{?}{=} \begin{cases} 4^9 & = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 & = 262144 \\ 64^2 & = 64 \times 64 & = 4096 \end{cases}$$

Non essendoci alcuna convenzione tacitamente accolta il calcolo della potenza indicata è incerto: esso richiede, per evitare appunto l'ambiguità, l'uso di parentesi

$$4^{(3^2)} = 262144 \quad \text{oppure} \quad (4^3)^2 = 4096$$

6.5. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare le radici dell'equazione $(x^2+1)(x^2-1) = 0$.

(2) ▶▶ Calcolare la potenza $\dfrac{5^{5/2}}{5^{6/4}}$.

(3) ▶▶ Calcolare il valore di $(5+3) \times 8 - 5 \times (3+8)$.

7. Fattorizzazione e semplificazione

Le espressioni algebriche letterali possono essere fattorizzate e/o semplificate come illustrato dagli esempi seguenti, trattati con i procedimenti detti *prodotti notevoli*.

$$
\begin{array}{lll}
2xy^2-4x^2y+6xy & =2xy(y-2x+3) & \\
x^2-5x+6 & =(x-3)(x-2) & \\
x^2-9 & =(x-+3)(x-3) & \\
x^4-5x^2+4 & =(x^2-4)(x^2-1) & =(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) \\
\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} & =\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} & =\dfrac{a-b}{a+b}
\end{array}
$$

Le semplificazioni *semplificano* il calcolo rendendo evidenti alcuni fenomeni che potevano sfuggire: così, ad esempio, la precedente semplificazione

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

rende evidente che se a è il doppio di $b \neq 0$ il risultato sarà $1/3$, qualunque sia b.

ESEMPIO 7.1. *Uno dei "prodotti notevoli" più noto è certamente*

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Serviamoci di esso per riconoscere una, sorprendente, identità numerica

$$10^2+11^2+!2^2=13^2+14^2$$

ovvero l'equivalente

$$12^2=(14^2-10^2)+(13^2-11^2)$$

Decomponendo i due addendi fra parentesi a secondo membro si ha infatti

$$\begin{cases} 14^2-10^2 & =(14-10)(14+10) & =4\times 2\times 12 \\ 13^2-11^2 & =(13-11)(13+11) & =2\times 2\times 12 \end{cases}$$

Sommando si ha pertanto

$$(14^2-10^2)+(13^2-11^2)=(8+4)\times 12=12^2$$

OSSERVAZIONE 7.2. *Esistono numerose altre, sorprendenti, uguaglianze relative a somme di quadrati.*

La prima, quasi ovvia, è la terna pitagorica $3^2+4^2=5^2$.

Sono note numerose altre somme di quadrati che coinvolgono più addendi: ne citiamo alcune, scrivendole utilmente sotto forma di sommatorie[2]*,*

$$\sum_{k=21}^{24} k^2 = \sum_{k=25}^{27} k^2, \qquad \sum_{k=36}^{40} k^2 = \sum_{k=41}^{44} k^2, \qquad \sum_{k=55}^{60} k^2 = \sum_{k=61}^{65} k^2$$

I valori delle tre uguaglianze indicate sopra possono ottenersi con qualsiasi calcolatrice e sono rispettivamente

$$2030 = 2030, \qquad 7230 = 7230, \qquad 19855 = 19855$$

7.1. Esercizi.

(1) ►► Semplificare la frazione $\dfrac{(1-\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})}{1-x}$.

(2) ►► Semplificare la frazione $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{1-x}$.

(3) ►► Sviluppare l'espressione

$$(1-\sqrt{x})\,(2+3\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})\,(2-3\sqrt{x})$$

e disegnare il grafico dell'espressione ottenuta.

8. I numeri reali

La figura del piano più nota è il quadrato: ed è proprio la diagonale del quadrato a presentare la difficoltà fondamentale che mostra come i numeri razionali, cioè le frazioni, siano inadeguati ad esprimere molte misure.

Sia Q un quadrato di lato $\ell = 1$: una diagonale d lo divide in due triangoli rettangoli uguali che hanno i due cateti lunghi ℓ e l'ipotenusa lunga d.

Per il teorema di Pitagora deve riuscire $\ell^2 + \ell^2 = d^2$ da cui, avendo preso ad esempio $\ell = 1$ si ha

$$1 + 1 = d^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 2$$

ma, ahimè non esiste alcun intero e neanche alcun razionale, cioè alcuna frazione, che al quadrato faccia 2.

La prova di tale inesistenza è data dal celebrato teorema di fattorizzazione dei numeri naturali, sulla particolare forma che devono avere i quadrati (Osservazione 2.2 di pagina 6) ed è riportata, non sempre con la dovuta chiarezza, su ogni libro scolastico.

---

[2] Il termine *sommatoria* si riferisce, naturalmente, a una somma di addendi generalmente indicati in forma parametrica, considerati al variare del parametro tra i due estremi indicati. Così $\sum_{k=1}^{3} k^2$ rappresenta la somma $1^2 + 2^2 + 3^2$, cioè 14.

Naturalmente anche se non esiste alcun razionale che al quadrato valga 2 ce ne sono moltissimi che al quadrato valgono... *quasi* 2:

$$1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \dots$$

I numeri reali, semplicemente i numeri, sono le misure x dei segmenti OP di una retta r, misure che, come osservato per la diagonale del quadrato, non sempre si possono esprimere con numeri razionali.

- O è un punto fisso di r, punto cui diamo il nome di *origine*,
- U è il punto di r cui attribuiamo il valore $x = 1$, tale cioè che $\overline{OU} = 1$
- per ogni $P \in r \quad x = \overline{OP}$,
- si assume $x \geq 0$ se P sta nella semiretta da O verso U, $x \leq 0$ se P sta nella semiretta opposta.

Un'immagine di queste strane misure, $x = \overline{OP}$ di lunghezze anche non razionali, è quella di immaginarle come decimali composti da una fila di cifre dopo la virgola anche non limitata e anche non periodica.

Non è ovvio immaginare una sequenza infinita di decimali che non sia periodica: pensate, ad esempio, a una fila fatta allineando un primo pacchetto 10, un secondo pacchetto 100, un terzo pacchetto 1000, ecc.

$$x = 2.10100100010000100000 \dots$$

sequenza infinita e... *non periodica* !

Ogni numero reale, cioè la lunghezza x di ogni segmento OP, può essere approssimato, come accadeva per la diagonale d del quadrato, con numeri razionali.

Pertanto

- i numeri reali sono oggetti matematici che danno coerenza alla matematica e giustificano, sul piano teorico, moltissimi risultati,
- i conti con numeri reali x e y (somme, differenze, prodotti, quozienti) si fanno sempre e solo servendosi dei numeri razionali che li approssimano.

8.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il maggiore tra i due numeri $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ e $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

(2) ▶▶ Detto $a = 2 + 3\sqrt{2}$ calcolare a^2 e $\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$.

(3) ▶▶ Detto $a = 5 - 3\sqrt{5}$ calcolare $a^2 - 10a + 10$.

9. Insiemi limitati

Un insieme di numeri può essere definito in vari modi:

- in modo esplicito $E = \{-2, 4, \pi\}$, l'insieme formato dai tre numeri indicati fra parentesi graffe,
- servendosi dell'ordinamento $F : 1 \leq x \leq \sqrt{10}$, tutti i numeri da 1 a $\sqrt{10}$, l'intervallo $[1, \sqrt{10}]$ (sarebbe necessario anche precisare che tipo di numeri si accolgono: naturali ? razionali ? Se non si precisa altrimenti si sottintende *reali*),
- mediante formule $S : \{n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots\}$ insieme di tutti i quadrati perfetti: la successione dei quadrati.

Esistono poi, naturalmente altri modi di definire degli insiemi servendosi delle operazioni (unione, intersezione, differenza) tra insiemi.

DEFINIZIONE 9.1. *Un insieme E si dice limitato se è contenuto in un intervallo:* $E \subset [a, b]$.

Così l'insieme $E = \{-2, 4, \pi\} \subset [-2, 4]$ è limitato mentre il precedente insieme S di tutti i quadrati perfetti non è limitato.

OSSERVAZIONE 9.2. ***La proprietà di Bolzano*** *Se un insieme* $E \subset \mathbb{R}$ *è limitato allora i numeri di ogni sua (eventuale) famiglia contenente infiniti elementi*

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset E$$

devono addensarsi, cioè accumularsi, inevitabilmente in qualche punto.

Negli insiemi illimitati questo addensamento può invece non accadere: si pensi all'insieme illimitato di tutti i numeri pari

$$\{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

Essi non si accumulano affatto, sono tutti ben distanti fra loro, la loro distribuzione non si addensa in alcun punto.

Se accettiamo l'idea che l'Universo (le stelle, i pianeti, ...) sia illimitato possiamo accettare l'idea che ci siano infinite stelle ciascuna distante almeno un anno-luce dalle altre...!

Se invece ritenessimo che l'Universo sia limitato allora dovremmo escludere la possibilità che ci siano infinite stelle ciascuna lontana dalle altre: la limitatezza dell'Universo costringerebbe le eventuali infinite stelle ad addensarsi in qualche parte.

La proprietà degli insiemi $E \subset \mathbb{R}$ *limitati osservata è parte di un risultato matematico molto importante detto Teorema di Bolzano, dal nome di Bernard Bolzano (1781-1848).*

9.1. Gli estremi. Se E è un insieme limitato può essere importante determinare l'intervallo $[a, b]$ più piccolo che lo contenga. Agli estremi di tale intervallo ottimale si danno i nomi di

- estremo inferiore di E, $\inf E$,
- estremo superiore di E, $\sup E$.

Se poi i due numeri $\inf E$ e $\sup E$ appartengono all'insieme E ad essi si danno i nomi di *minimo* di E e *massimo* di E.

ESEMPIO 9.3. *Sia* $E = \{-2, 4, \pi\}$, *l'intervallo più piccolo che lo contiene è, evidentemente* $[-2, 4]$*:*

- $\inf E = -2$, *minimo di* $E = -2$
- $\sup E = 4$, *massimo di* $E = 4$

ESEMPIO 9.4. *Sia* $F : 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$, *l'intervallo più piccolo che lo contiene è, evidentemente* $[0, 1]$*: infatti è inutile allargarsi a sinistra pensando a intervalli* $[-2, 1]$ *o simili e non è possibile diminuire l'estremo* 1 *pena non includere proprio il primo elemento di* F.

Si ha quindi

- $\inf F = 0, \quad 0 \notin F \quad \rightarrow \quad F$ *non ha minimo*,
- $\sup F = 1, \quad 1 \in F \quad \rightarrow$ *massimo di* $F = 1$

9.2. Insiemi limitati inferiormente o superiormente.
L'insieme $S := \{n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots\}$ di tutti i quadrati perfetti non è limitato: tuttavia i suoi elementi n^2 verificano tutti la limitazione inferiore $1 \leq n^2$.

Si dice pertanto che S è **inferiormente limitato** e il numero 1 si continua a chiamare *estremo inferiore* di S.

Tenuto conto inoltre che $1 \in S$, 1 è anche il minimo di S.

Analogamente l'insieme $N : -1, -2, -3, \dots$ di tutti gli interi negativi non è limitato: tuttavia i suoi elementi $-n$ verificano tutti la limitazione superiore $-n \leq -1$.

Si dice pertanto che N è **superiormente limitato** e il numero -1 si continua a chiamare *estremo superiore* di N.

Tenuto conto inoltre che $-1 \in N$ -1 è anche il massimo di N.

9.3. Esercizi.

(1) ►► Esaminare se $E := \{\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ è limitato.
(2) ►► Sia $E := [-3, 5] \cap [0, 10]$: determinare il minimo e il massimo di E.
(3) ►► Assegnato un insieme F sia Q_F l'insieme formato dai quadrati degli elementi di F: esaminare se Q_F è inferiormente limitato.

10. La proprietà degli intervalli incapsulati

TEOREMA 10.1. *Sia I_1, I_2, I_3, ... una famiglia di intervalli di $\mathbb{R}$*

- *non vuoti,*
- *chiusi,*
- *limitati,*
- *incapsulati, cioè ciascuno contenuto nel precedente $I_1 \supseteqq I_2 \supseteqq I_3 \supseteqq \dots$,*

allora

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$$

la loro intersezione è non vuota, cioè esistono numeri ξ che appartengono a tutti gli intervalli I_k.

Si osservi, nei seguenti contresempi, che tutte e quattro le condizioni indicate sono irrinunciabili.

ESEMPIO 10.2. *Se uno degli intervalli, I_{n_0} della famiglia fosse vuoto allora è ovvio che non ci potrebbe essere alcun ξ che dovendo appartenere a tutti gli intervalli dovrebbe appartenere anche a I_{n_0} contraddicendo l'ipotesi che esso sia vuoto.*

ESEMPIO 10.3. *La famiglia di intervalli aperti $I_n = (0, 1/n)$ non ha alcun numero comune a tutti: infatti un tale ξ*

- *non può essere negativo (gli I_n non contengono negativi)*
- *non può essere lo zero (gli I_n non contengono lo zero)*
- *non può essere positivo (prima o poi non apparterrebbe agli I_n di indice abbastanza alto).*

ESEMPIO 10.4. *La famiglia degli intervalli illimitati $I_n = [n, +\infty)$ non ha alcun numero ξ comune a tutti (prima o poi non apparterrebbe agli I_n di indice abbastanza alto).*

ESEMPIO 10.5. *La famiglia degli intervalli $I_n = [n, n+1]$, non vuoti, chiusi e limitati ma non incapsulati non ha alcun numero ξ comune a tutti.*

OSSERVAZIONE 10.6. *L'ottimistica certezza con cui affrontiamo il problema dell'esistenza della $\sqrt{2}$ è basata sul* TEOREMA DEGLI INTERVALLI INCAPSULATI*: infatti siamo sicuri che*

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & \in & [1 \quad , \quad 2] \\ \sqrt{2} & \in & [1.4 \quad , \quad 1.5] \\ \sqrt{2} & \in & [1.41 \quad , \quad 1.42] \\ \sqrt{2} & \in & [1.414, 1.415] \end{array}$$

e siamo sicuri che la famiglia di intervalli non vuoti, chiusi, limitati e incapsulati

$$[1, 2] \supset [1.4, 1.5] \supset [1.41, 1.42] \supset \dots$$

ha un punto ξ *comune, che è anche unico perchè gli intervalli della famiglia hanno lunghezze via via più piccole.*

Che tale numero ξ *comune a tutti gli intervalli osservati debba essere* $\sqrt{2}$ *è del tutto naturale....!*

11. Numeri grandi, numeri piccoli

I numeri si rappresentano spesso nella così detta *notazione scientifica*:

- un decimale, spesso con parte intera nulla, con un numero di cifre dopo la virgola standard, basso, sei sette decimali,
- un intero che rappresenta l'esponente di una potenza di 10

ESEMPIO 11.1. 123400000 *si scrive* 1.234×10^8 *abbreviato spesso in* $1.234\,E8$
0.007 *si scrive* 7×10^{-3} *abbreviato spesso in* $7E-3$.

Esistono inoltre delle parole (deca, giga, nano, ecc.) comunemente adottate per numeri grandi e per numeri piccoli:

Multiplo	Prefisso	Simbolo	Multiplo	Prefisso	Simbolo
10	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p

CAPITOLO 2

Piano Cartesiano

1. Coordinate dei punti del piano

Scelto un riferimento cartesiano ortogonale, cioè scelte

- due rette orientate ortogonali, cui diamo i nomi di asse x delle ascisse e asse y delle ordinate,
- due unità di misura, eventualmernte uguali, su ognuno dei due assi

ad ogni punto P del piano corrisponde la coppia delle sue due coordinate (x,y) e, viceversa ad ogni coppia di numeri (u,v) corrisponde un punto del piano.

Si possono notare alcuni fatti significativi:

- l'intersezione dei due assi si chiama origine del riferimento cartesiano e ha coordinate $(0,0)$
- i punti dell'asse delle ascisse hanno coordinate $(x,0)$ e quelli dell'asse delle ordinate hanno coordinate $(0,y)$,
- gli assi x ed y suddividono il piano in quattro quadranti:
  - i punti del primo quadrante hanno coordinate entrambe positive,
  - quelli del secondo hanno ascissa negativa e ordinata positiva,
  - quelli del terzo hanno coordinate entrambe negative,
  - quelli del quarto hanno ascissa positiva e ordinata negativa.

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ In quali quadranti del piano cartesiano stanno i punti di coordinate cartesiane $\left(t^2-t+1, t-t^2-1\right)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?

(2) ▶▶ In quali quadranti del piano stanno i punti $Q = (-\sin(t), 2\sin(t))$ e $S = (-t^3, 2t^3)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?

(3) ▶▶ Se $P = (x, y)$ appartiedne al secondo quadrante a quali quadranti apparterngono i punti $Q = (x^2, y^2)$ e $S = (y, x)$?

2. Le rette: equazioni cartesiane

I punti $P=(x,y)$ di una stessa retta sono caratterizzati dal fatto che le loro coordinate soddisfano tutte una stessa equazione

$$ax+by+c=0$$

Naturalmente rette diverse corrispondono a equazioni diverse:

- l'equazione $x=0$ rappresenta l'asse verticale delle ordinate,
- l'equazione $y+c=0$ rappresenta, al variare di c rette orizzontali,
- le equazioni $ax+by=0$ rappresentano al variare di a e b tutte rette passanti per l'origine.

PROPOSIZIONE 2.1. *Assegnati due punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2) diversi l'equazione della retta da essi individuata è*

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

ESEMPIO 2.2. *La retta determinata dai due punti $(1,2)$ e $(-3,-1)$ è*

$$-3(x-1)+4(y-2)=0 \quad \to \quad -3x+4y-5=0$$

L'equazione trovata, $-3x+4y-5=0$, rappresenta certamente una retta: è facile riconoscere che i due punti assegnati, $(1,2)$ e $(-3,-1)$, le appartengono, e quindi la individuano.

PROPOSIZIONE 2.3. *Se il punto (x_0,y_0) appartiene alla retta $R:\ ax+by+c=0$ allora tutti gli altri suoi punti hanno coordinate (x,y) che verificano l'equazione*

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

Se, ad esempio, $b\neq 0$ allora si ha

$$y-y_0=k\,(x-x_0), \quad k=-\frac{a}{b}$$

la variazione $y-y_0$ delle ordinate è proporzionale alla variazione $x-x_0$ delle ascisse, sempre, con lo stesso fattore k.

2.1. I punti di un segmento.

Assegnati due punti $A=(a_1,a_2)$ e $B=(b_1,b_2)$ i punti P del segmento AB hanno coordinate

$$\begin{cases} x=(1-t)a_1+tb_1 \\ y=(1-t)a_2+tb_2 \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

Per $t=0$ si ottiene l'estremo A e per $t=1$ l'altro estremo, B.

In particolare per $t=1/2$ si ha il punto $\left(\frac{1}{2}(a_1+b_1),\ \frac{1}{2}(a_2+b_2)\right)$, punto medio tra A e B.

I punti

$$U = \left((1-\frac{1}{3})a_1 + \frac{1}{3}b_1,\ (1-\frac{1}{3})a_2 + \frac{1}{3}b_2\right),\ V = \left((1-\frac{2}{3})a_1 + \frac{2}{3}b_1,\ (1-\frac{2}{3})a_2 + \frac{2}{3}b_2\right)$$

decompongono il segmento AB in tre segmenti consecutivi uguali AU, UV, VB

ESEMPIO 2.4. *I punti del segmento di estremi* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *hanno coordinate*

$$x = 1-t, \quad y = t \qquad t \in [0,1]$$

Si verifica facilmente che essi apprtengono tutti alla retta $x+y=1$ *determinata appunto da* $(1,0)$ *e* $(0,1)$.

2.2. Sistemi monometrici o no.

Le coordinate di un punto del piano cartesiano dipendono dalle unità di misura prese sui due assi: se si prende la stessa unità sia sull'asse x che sull'asse y si parla di *riferimento monometrico*.

Non è obbligatorio usare *riferimenti monometrici*, anzi il più delle volte nelle applicazioni i due assi saranno riferiti a unità di misura diverse.

Le rappresentazioni grafiche di cui quasi tutte le statistiche fanno uso riportano in ascisse, ad esempio, gli anni di riferimento e, in ordinate per esempio il PIL nazionale: l'unità di misura nelle ascisse sarà l'anno, l'unità di misura nelle ordinate sarà.... il miliardo di euro.

Cosa cambia nell'aspetto geometrico ?

Per esempio la retta $y = x$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante solo se il sistema è monometrico.

L'inclinazione di una retta di equazione assegnata dipende dalle unità di misura prese sugli assi.

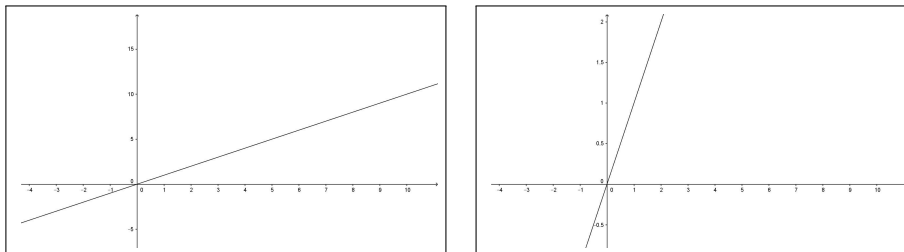



FIGURA 1. La retta $y = x$ in riferimenti non monometrici

2.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare l'equazione della retta passante per i punti $A = (-3, 1)$ e $B = (\sqrt{5}, 1)$?

(2) ▶▶ Determinare tre punti distinti appartenenti alla retta di equazione

$$3x + 5y + 1 = 0.$$

(3) ▶▶ Esaminare se la retta $x + y + 1 = 0$ contiene o meno punti del primo quadrante.

3. Semipiani e cerchi

Ogni retta divide il piano in due parti, dette semipiani S_- ed S_+: se la retta ha equazione $ax + by + c = 0$ i punti di ciascuno dei due semipiani hanno coordinate (x, y) tali che

- $ax + by + c \geq 0 \quad \to \quad (x, y) \in S_+$
- $ax + by + c \leq 0 \quad \to \quad (x, y) \in S_-$

ESEMPIO 3.1. *Consideriamo la retta $x = 0$, l'asse verticale: i semipiani che essa determina sono:*

- *il primo e quarto quadrante: $x \geq 0$*
- *il secondo e terzo quadrante: $x \leq 0$.*

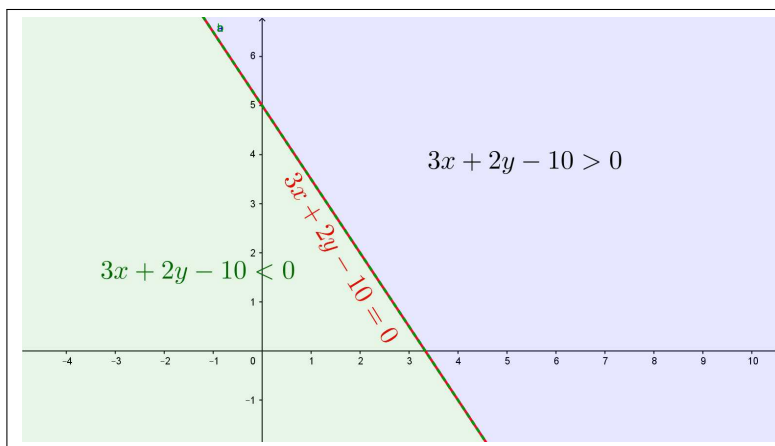



FIGURA 2. La retta $3x + 2y - 10 = 0$ e i due semipiani.

3.1. Distanza nel piano. La distanza di due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) si determina considerando il segmento da essi determinato come ipotenusa di un triangolo

rettangolo che ha i cateti lunghi $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Pertanto, dal teorema di Pitagora, la distanza vale

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

I punti (x, y) della circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r sono pertanto quelli che verificano l'equazione

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Quelli del cerchio delimitato da tale circonferenza sono tutti e soli quelli che verificano la disuguaglianza

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

In particolare i punti *interni* al cerchio verficano la disuguaglianza stretta

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

DEFINIZIONE 3.2. *Un insieme E del piano si dice limitato se è contenuto in un cerchio.*

3.2. Ancora sui sistemi non monometrici.

Supponiamo, ad esempio, che l'unità di misura sull'asse x sia *il centimetro* mentre quella sull'asse y sia *il decimetro*.

Cosa pensare della distanza tra il punto $A = (1, 2)$ e il punto $B = (5, 4)$?

In altri termini quanto è lungo il segmento AB ?

La proposta, ingenua,

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

non può che essere accompagnata dalla domanda $\sqrt{20}$ centimetri o $\sqrt{20}$ decimetri ?

Una gestione corretta del problema avrebbe proposto

- prima di riferire le coordinate dei due punti a un riferimento monometrico, per esempio tutto in centimetri

  $$A = (1, 2) \quad \to \quad (1, 20), \quad B = (5, 4) \quad \to \quad (5, 40)$$

- quindi

  $$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (40-20)^2} = \sqrt{416}$$

  pervenendo alla corretta risposta

  $$\overline{AB} = \sqrt{416}\ cm.$$

Un problema : Quale insieme del piano rappresenta, nel sistema precedente (centimetri per l'asse x e decimetri per y) la disuguaglianza

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Provate a determinare qualche suo punto

$$(1,0), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (0,-1)$$

Riflettendo un po' si capisce che si tratta dell'ovale delimitato dall'ellisse che passa per quei quattro punti: un'ellisse molto stretta e molto lunga....

3.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare due punti A e B appartenenti a semipiani diversi determinati dalla retta $3x + 5y + \sqrt{2} = 0$.

(2) ▶▶ Disegnare sul piano cartesiano monometrico le rette di equazioni

$$\sin(1)\,x + \cos(1)\,y - 1 = 0, \qquad \cos(1)\,x - \sin(1)\,y - \cos(2) = 0.$$

(3) ▶▶ Detti $A = (1,2), \quad B = (-2,3), \quad C = (0,-1)$ verificare che

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

4. Alcune curve comuni e i domini collegati

Supponiamo di lavorare in un sistema ortogonale monometrico: abbiamo già incontrato due equazioni importanti

$$ax + by + c = 0, \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

che determinano

- una retta
- la circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r

È utile tener presente le curve del piano determinate da equazioni in x e y di secondo grado un po' più generali di quella della circonferenza, e gli insiemi del piano da esse determinati:

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ le ellissi centrate nell'origine e di semiassi a e b,
  $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ l'insieme del piano delimitato dall'ellisse precedente
- $y = ax^2 + bx + c$ le parabole con asse verticale,
  $y \geq ax^2 + bx + c$ uno degli insiemi del piano (quello superiore) contornati dalla precedente parabola
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ le iperbole centrate nell'origine e di asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$,

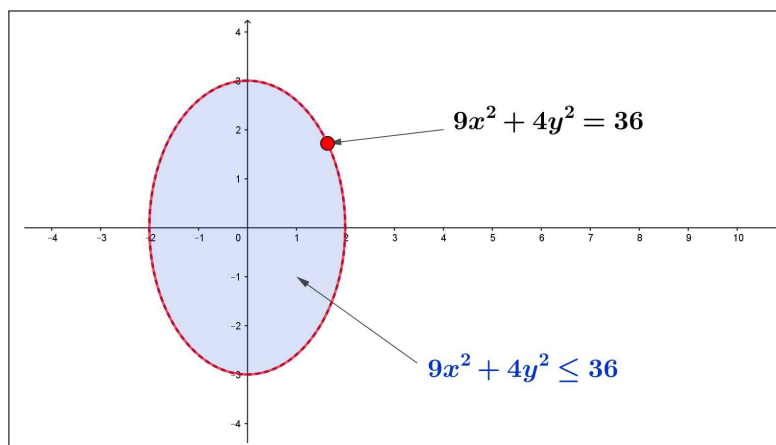



FIGURA 3. Ellisse $9x^2 + 4y^2 = 36$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ uno degli insiemi del piano (quello contenente l'origine) contornati dalla precedente iperbole

- $y = \frac{1}{x}$ l'iperbole centrata nell'origine e di asintoti gli assi cartesiani.

Equazioni di secondo grado in x e y più generali di quelle elencate continuano ancora a rappresentare ellissi, iperboli o parabole, ma poste in posizioni più varie rispetto agli assi cartesiani.

Ricordatevi che potete sempre chiedere a http://www.wolframalpha.com/.

4.1. I punti di un triangolo.

Tre punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ non allineati determinano un triangolo.

I punti P del triangolo (interni e sui lati) hanno coordinate

$$\begin{cases} x = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ y = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \end{cases}$$

per ogni scelta di α, β, γ tale che

$$\begin{cases} \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

ESEMPIO 4.1. *I punti del triangolo di vertici* $(1,1)$, $(3,1)$, $(2,4)$ *hanno coordinate*

$$x = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \quad y = \alpha + \beta + 4\gamma$$

In particolare, scelti

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$$

il punto

$$\left(\frac{1}{3}+1+\frac{2}{3},\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=(2,2)$$

è il baricentro del triangolo.

Le terne α, β, γ di numeri non negativi a somma 1 si ottengono come segue

$$\forall\, u,\, v \in [0,1] \quad \to \quad \begin{cases} \alpha = & u\,v \\ \beta = & (1-u)v \\ \gamma = & 1-v \end{cases}$$

4.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C=(1,-1)$ e raggio $r=\sqrt{2}$.

(2) ▶▶ Disegnare sul piano l'insieme determinato dalle condizioni

$$4x^2+9y^2 \leq 36 \quad e \quad x \geq 0$$

(3) ▶▶ Determinare l'equazione $y=ax^2+bx+c$ della parabola passante per i punti $(1,3)$, $(-1,1)$, $(0,1)$.

5. Lo spazio cartesiano tridimensionale

La descrizione dei punti del piano offerta da un riferimento cartesiano, ogni punto P una coppia di numeri reali (x,y), si può estendere allo spazio con un sistema cartesiano tridimensionale.

Sostanzialmente si tratta di scegliere un piano, che immaginiamo come *piano terra* e far corrispondere ad ogni punto P dello spazio

- la proiezione (ortogonale) P_T di P sul piano terra,
- la quota di P rispetto al piano terra.

La proiezione P_T sarà determinata (riferimento cartesiano sul piano terra) da due coordinate (x,y), la quota sarà determinata a sua volta da un terzo numero z.

È quindi evidente che i punti dello spazio sono descritti da tre numeri (x,y,z) che prendono il nome di *coordinate di P*.

Se $P=(x_1,y_1,z_1)$ e $Q=(x_2,y_2,z_2)$ la distanza $r=\overline{PQ}$ è data, sempre ricorrendo al teorema di Pitagora, dall'espressione

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

analoga a quella osservata per due punti del piano.

I punti di coordinate $(x,0,0)$ costituiscono l'asse x del riferimento, quelli $(0,y,0)$ costituiscono l'asse y e quelli $(0,0,z)$ l'asse z.

5.1. I piani nello spazio.

Si può riconoscere che i punti P di uno stesso piano sono tutti e soli quelli le cui coordinate cartesiane verificano una stessa equazione lineare

$$ax + by + cz = d$$

ESEMPIO 5.1. *Così, ad esempio i punti del piano determinato dai tre punti*

$$(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)$$

sono tutti e soli quelli le cui coordinate verificano l'equazione $x+y+z=1$.

5.2. Le superfici sferiche nello spazio.

Una superfice sferica è determinata dal centro $O = (x_0, y, z_0)$ e dal raggio r: quindi i punti della superfice sono tutti e soli quelli le cui coordinate verificano l'equazione

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

ESEMPIO 5.2. *I punti della superfice sferica di centro l'origine e raggio* $r = 2$ *sono tutti e soli quelli le cui coordinate verificano l'equazione*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

CAPITOLO 3

Sistemi lineari

1. Introduzione

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite, denotate con x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} a\,x + b\,y = h \\ c\,x + d\,y = k \end{array} \right. \tag{1}$$

rappresenta la ricerca dei numeri x_0 e y_0 che soddisfino entrambe le equazioni: i coefficienti a, b, c, d e i termini noti h, k sono numeri assegnati.

ESEMPIO 1.1. *Determinare i numeri x_0 e y_0 che abbiano somma 10 e differenza 4*

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{array} \right.$$

Sommando membro a membro si ottiene $2x = 14 \Rightarrow x = 7$ da cui, ovviamente si trova $x_0 = 7$, $y_0 = 3$.

Il sistema (1) puó essere interpretato in modo geometrico come determinazione del punto (x_0, y_0) di intersezione delle due rette

$$r_1 : \; a\,x + b\,y = h \qquad\qquad r_2 : \; c\,x + d\,y = k$$

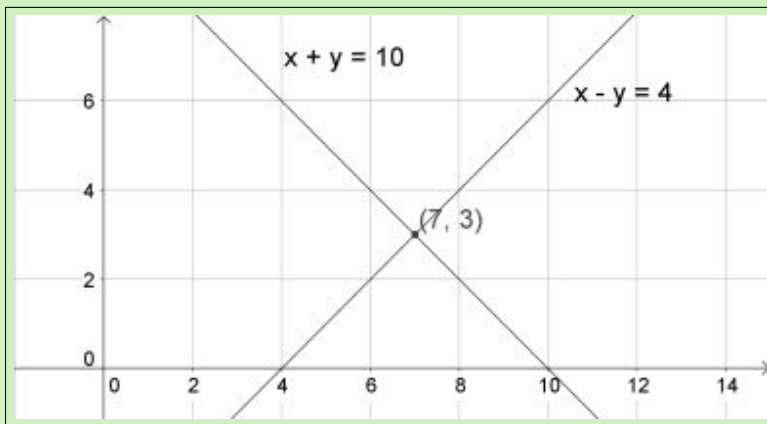



FIGURA 1. Intersezione di due rette

L'interpretazione geometrica di un sistema, punto di intersezione di due rette, suggerisce che :

- la soluzione (x_0, y_0) esiste ed è unica se le due rette sono distinte e incidenti: in questo caso il sistema si dice *determinato*,
- non esiste alcuna soluzione se le due rette distinte sono parallele: in questo caso il sistema si dice *impossibile*,
- esistono infinite soluzioni, se le due rette coincidono: in questo caso il sistema si dice *indeterminato*.

1.1. Esercizi.

(1) ►► Determinare un sistema che abbia come soluzioni $x_0 = 1$ e $y_0 = -2$.

(2) ►► Determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 4x - 5y & = 6 \end{cases}$$

(3) ►► L'equazione

$$(x + y - 1)^2 + (x - y + 2)^2 \ = \ 0$$

a quale sistema lineare corrisponde ?

2. Matrici e determinanti

I quattro coefficienti delle incognite di un sistema

$$\begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases} \tag{2}$$

costituiscono una *matrice* (sinonimo di *tabella*) $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Introdotta la matrice $\mathscr{A}$ il sistema viene anche indicato con la notazione

$$\mathscr{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

operazione che utilizza il *prodotto matrice - vettore* definito come segue

$$\mathscr{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.1.

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \{5, 7\} \quad \to \quad \mathscr{A}\,\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \{2, 3\} \quad \to \quad \mathscr{A}\,\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2.2.

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$$

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + y & = 1 \\ 5x + 2y & = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2.1. I determinanti.

Il numero $ad - bc$ si chiama determinante $\det(\mathscr{A})$ della matrice $\mathscr{A}$ e si indica anche con la semplice notazione[1]

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Scambiando tra loro le righe o le colonne di una matrice il determinante cambia di segno,
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$
- Moltiplicando gli elementi di una stessa colonna o di una stessa riga per un fattore ρ il determinante risulta moltiplicato per tale stesso fattore,
$$\begin{vmatrix} \rho a & \rho b \\ c & d \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho a & b \\ \rho c & d \end{vmatrix}$$
- Addizionando a una colonna o a una riga un multiplo dell'altra colonna o dell'altra riga il determinante non cambia,
$$\begin{vmatrix} a + \alpha b & b \\ c + \alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{vmatrix}$$

2.2. Significato geometrico.

Il modulo del determinante della matrice

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

rappresenta l'area del parallelogramma che ha come lati i due vettori colonna (a, c) e (b, d) o i due vettori riga (a, b) e (c, d).

Tale proprietà aiuta a comprendere come l'annullarsi del determinante corrisponda al parallelismo dei due vettori colonne o righe di una matrice.

[1] Tabella racchiusa tra due barre rettilinee, mentre tradizionalmente la matrice è racchiusa tra due, larghe, parentesi tonde .

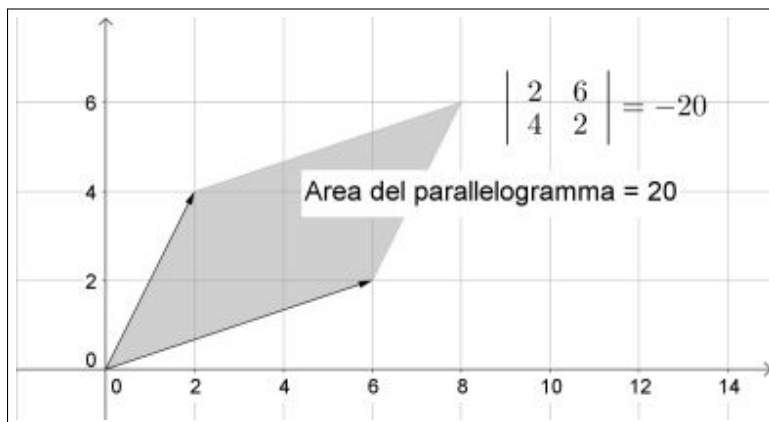



FIGURA 2. Determinanti e area del parallelogramma

OSSERVAZIONE 2.3. *È interessante riconoscere che i due triangoli, abbastanza differenti,*

$$T_1 := \{(0,0),(a,c),(b,d)\}, \qquad T_2 := \{(0,0),(a,b),(c,d)\}$$

hanno la stessa area

$$\mathscr{A}(T_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \mathscr{A}(T_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

2.3. Esercizi.

(1) ►► Calcolare il determinante della matrice $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,-1)$.

(2) ►► Calcolare i determinanti delle due matrici

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) ►► Calcolare il determinante della matrice somma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

3. Le formule di Cramer

Le formule di Cramer[2] sono espressioni eleganti delle soluzioni di sistemi lineari.

[2]Gabriel Cramer (31-07-1704, 4-01-1752)

Moltiplicando membro a membro le equazioni del sistema (1) per i quattro coefficienti d, b, c, a si ottengono le seguenti implicazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} adx+bdy=dh \\ bcx+bdy=bk \end{cases} \\ \\ \begin{cases} acx+bcy=ch \\ acx+ady=ak \end{cases} \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottengono le due equazioni

$$(4) \qquad (ad-bc)x = dh-bk, \qquad (ad-bc)y = ak-ch$$

Se $ad-bc \neq 0$ le (4) determinano direttamente la coppia (x_0, y_0) soluzione del sistema

$$(5) \qquad x_0 = \frac{dh-bk}{ad-bc}, \qquad y_0 = \frac{ak-ch}{ad-bc}.$$

La particolare eleganza delle formule di Cramer emerge servendosi dei determinanti: le formule (5) si scrivono in tal caso

$$(6) \qquad x_0 = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Stesso denominatore, numeratori che includono i termini noti: nella prima colonna per la prima incognita, nella seconda colonna per la seconda incognita.

TEOREMA 3.1. *Il sistema* $\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$ *con* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ *ammette una e una sola soluzione* (x_0, y_0) *espressa dalle formule*

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

3.1. Il caso $ad-bc=0$.

Se $ad-bc=0$ il sistema incorre in due patologie collegate al tipo di secondi membri h e k assegnati:

- puó non ammettere alcuna soluzione, essere sistema *"impossibile"*,
- puó ammettere piú soluzioni diverse, essere sistema *"indeterminato"*,

Se $ad-bc=0$ infatti i primi membri delle (4)

$$(ad-bc)x = dh-bk, \qquad (ad-bc)y = ak-ch$$

sono entrambi nulli e quindi se h e k non sono tali da annullare anche i secondi membri, cioè se

$$dh - bk \neq 0, \quad \text{oppure} \quad ak - ch \neq 0$$

il sistema è *"impossibile"*, cioè non ammette alcuna soluzione.

Secondo la lettura geometrica il caso di sistema *"impossibile"* corrisponde al fatto che le due rette

$$ax + by = h, \qquad cx + dy = k$$

sono parallele e distinte.

Se

$$ad = bc, \quad dh = bk, \quad ak = ch \tag{7}$$

occorre distinguere due casi: quello in cui uno almeno dei coefficienti a, b, c, d, sia diverso da zero e quello in cui invece i coefficienti siano tutti nulli.

- Sia, ad esempio, $a \neq 0$:

  $$\begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = h \\ acx + ady = ak \end{cases}$$

  tenuto conto che $ad = bc$ e $ak = ch$

  $$\begin{cases} ax + by = h \\ acx + bcy = ch \end{cases} \Leftrightarrow ax + by = h$$

  Le infinite coppie (x, y) che soddisfano l'ultima equazione sono soluzioni del sistema che pertanto ha infinite soluzioni, tutti i punti della retta $ax + by = h$.

- $a = b = c = d = 0$

  $$\begin{cases} 0x + 0y = h \\ 0x + 0y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

  Il sistema è compatibile se e solo se $h = k = 0$ e le sue soluzioni sono tutti i punti del piano.

OSSERVAZIONE 3.2. *Si noti che l'insieme delle soluzioni del sistema*

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases}$$

puó essere solo uno dei seguenti insiemi

- *tutto il piano* $\mathbb{R}^2$,
- *una retta di* $\mathbb{R}^2$,
- *un punto di* $\mathbb{R}^2$,
- *l'insieme vuoto.*

3.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare, servendosi delle formule di Cramer, le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sqrt{5}x+\sqrt{3}y & = 1 \\ x+\sqrt{15}y & = 0 \end{cases}$$

(2) ▶▶ Determinare per quali valori di λ il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

è indeterminato e per quali è impossibile.

(3) ▶▶ Dette x_h e y_h le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x+2y & = h \\ x+y & = 0 \end{cases}$$

determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ il punto $P_h = (x_h.y_h)$ appartiene al secondo quadrante.

4. La matrice inversa

Le formule di Cramer stabiliscono che se $ad - bc \neq 0$ il sistema

$$\begin{cases} ax+by = h \\ cx+dy = k \end{cases} \tag{8}$$

ha una e una sola soluzione espressa da

$$x_0 = \frac{dh-bk}{ad-bc}, \qquad y_0 = \frac{ak-ch}{ad-bc}$$

Le formule risolutive precedenti si scrivono, con le notazioni usuali di prodotto matrice - vettore, come

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

In altri termini la soluzione del sistema (8) si esprime come il prodotto della matrice

$$\mathscr{B} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

per il vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathscr{B}$ per il ruolo che svolge prende il nome di matrice inversa di $\mathscr{A}$ e si indica con $\mathscr{A}^{-1}$.

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathscr{A}^{-1}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 4.1.

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathscr{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{A}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Trasformazioni del piano

Abbiamo nominato, precedentemente, l'operazione di *prodotto matrice vettore* o *prodotto matrice punto*: assegnata la matrice

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

possiamo considerare la trasformazione del piano che fa corrispondere ad ogni punto (x,y) il trasformato

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 5.1. *La trasformazione determinata dalla matrice*

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è una dilatazione

$$\mathscr{A}: \ (x,y) \ \mapsto \ (2x,2y)$$

La trasformazione determinata dalla matrice

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Ad esempio

$$\mathscr{A}: \ (1,0) \ \mapsto \ (0,1), \quad (0,-1) \ \mapsto \ (-1,0)$$

La trasformazione determinata dalla matrice

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la rotazione di 90^0 *in senso antiorario. Ad esempio*

$$\mathscr{A}: \ (1,0) \ \mapsto \ (0,1), \quad (0,1) \ \mapsto \ (-1,0)$$

5.1. Come si modificano le aree. La trasformazione determinata da $\mathscr{A}$ muta poligoni in altri poligoni: le loro aree mutano con il fattore $|\det(\mathscr{A})|$.

Verifichiamo l'asserto sui tre casi dell'esempio precedente:

- la prima matrice
$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathscr{A}) = 4$$
trasforma, ad esempio, il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0), (1,1)$, $(0,1)$, lato $\ell = 1$ e quindi area 1, nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(2,0), (2,2)$, $(0,2)$, quadrato di lato $\ell = 2$ e quindi area $2^2 = 4$.
- la seconda matrice
$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathscr{A}) = 1$$
simmetria rispetto a una retta conserva evidentemente le aree,
- la terza matrice
$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathscr{A}) = 1$$
una rotazione conserva evidentemente anch'essa le aree.

5.2. Esercizi.

(1) ►► Assegnata la matrice $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $A = (1,1), B = (-1,2)$ calcolare la distanza dei trasformati $\overline{\mathscr{A}A, \mathscr{A}B}$.

(2) ►► Assegnata la matrice $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ calcolare l'area del poligono ottenuto trasformando con $\mathscr{A}$ il quadrato di estremi l'origine e $(1,1)$.

(3) ►► Assegnata la matrice
$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
e il punto $U = (0,1)$ considerare l'insieme
$$E := \{U, \mathscr{A}U, \mathscr{A}^2U, \mathscr{A}^3U, \dots\}$$
e valutare se tale insieme è limitato.

5.3. Prodotto di matrici.

Se consideriamo due matrici

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

possiamo considerare la trasformazione composta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \mathscr{B}\left[\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} (\alpha a+\beta c)x & + & (\alpha b+\beta c)y \\ (\gamma a+\delta c)x & + & (\gamma b+\delta d)y \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta c \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{pmatrix}$$

che rappreswenta la trasformazione composta prende il nome di matrice prodotto $\mathscr{C} = \mathscr{B}\mathscr{A}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta c \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 5.2. *Siano*

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

riesce

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{B}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{A}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{B}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 148 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{B}\mathscr{A}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 148 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{B}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 28 \\ 38 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{B}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 104 \\ 236 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\mathscr{A}\mathscr{B}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 104 \\ 236 \end{pmatrix}$$

L'esempio mostra anche come la composizione delle due traformazioni, quella determinata dalla matrice $\mathscr{A}$ e quella dalla matrice $\mathscr{B}$ dipenda dall'ordine: se si esegue prima la trasformazione $\mathscr{A}$ e poi la $\mathscr{B}$ si trsforma $(2,3)$ in $(148,200)$.

Se invece si esegue prima la $\mathscr{B}$ e poi la $\mathscr{A}$ il punto $(2,3)$ finisce in $(104,236)$. In altri termini il prodotto di matrici non è commutativo: infatti, sempre nell'esempio trattato si vede che

$$\mathscr{B}\mathscr{A} \neq \mathscr{A}\mathscr{B}$$

PROPOSIZIONE 5.3. *Il prodotto di una matrice $\mathscr{A}$ per la sua inversa $\mathscr{A}^{-1}$ è la matrice identità $\mathscr{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e riesce naturalmente*

$$\mathscr{A}\,.\,\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\,.\,\mathscr{A} = \mathscr{I}$$

5.4. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare la matrice inversa di $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) ▶▶ Detta $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ è dotata di inversa $\mathscr{B}$ e calcolare i determinanti di $\mathscr{A}$ e di $\mathscr{B}$.

(3) ▶▶ Detta $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare l'inversa $\mathscr{B}$ e le matrici prodotto

$$A.B, \quad A.A.B, \quad A.A.A.B$$

6. Autovalori e autovettori

Assegnata la matrice $\mathscr{A}$ cerchiamo i vettori non nulli $\mathbf{p} = (u, v)$ e i numeri λ tali che

$$\mathscr{A}\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}, \tag{9}$$

ovvero $(\mathscr{A} - \lambda)\mathbf{p} = 0$.

Cerchiamo cioè gli eventuali vettori non nulli $\mathbf{p}$ che vengano trasformati da $\mathscr{A}$ in vettori $\mathscr{A}\mathbf{p}$ che abbiano la stessa direzione di $\mathbf{p}$.

$$(\mathscr{A} - \lambda)\mathbf{p} = 0 \quad \to \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il problema corrisponde a cercare le (eventuali) soluzioni $\mathbf{p} = (u_0, v_0)$ non nulle del sistema

$$\begin{cases} (a-\lambda)\,u + b\,v = 0 \\ c\,u + (d-\lambda)\,v = 0 \end{cases} \tag{10}$$

che prendono il nome di *autovettori* della matrice.

Se $\mathbf{p}$ è un autovettore allora lo è anche ogni suo multiplo.

Le formule di Cramer dicono che se

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

l'unica soluzione del sistema omogeneo (10), cioè con i termini noti nulli, è il vettore nullo.

Restano da considerare i valori λ per i quali il determinante della matrice è nullo

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda\,(a+d) + a\,d - b\,c = 0 \tag{11}$$

Se λ soddisfa l'equazione di secondo grado (11) detta *equazione caratteristica* della matrice il sistema (10) ha soluzioni (u_0, v_0) non nulle.

DEFINIZIONE 6.1. *I valori λ che soddisfano l'equazione di secondo grado (11) si dicono* AUTOVALORI DELLA MATRICE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Per ciascun autovalore λ_i ogni soluzione non nulla del sistema (10) si dice AUTOVETTORE DI TALE MATRICE *relativo a tale* AUTOVALORE.

L'equazione caratteristica della matrice

$$\lambda^2 - \lambda\,(a+d) + ad - bc = 0$$

che determina gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ può avere, come tutte le equazioni di secondo grado,

- due radici reali distinte,
- una sola radice reale,
- nessuna radice reale

PROPOSIZIONE 6.2. *Se la matrice ha due autovalori distinti, esistono due autovettori distinti $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ con $\mathbf{p_2} \neq \mu\,\mathbf{p_1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathbf{p_1}$ un autovettore corrispondente a λ_1 e $\mathbf{p_2}$ uno corrispondente a λ_2: se, per assurdo fosse

$$\mathbf{p_2} = \mu\,\mathbf{p_1}$$

si avrebbe, per linearità,

$$\mathscr{A}\,\mathbf{p_1} = \lambda_1\mathbf{p_1} \Rightarrow \mathscr{A}\,\mu\,\mathbf{p_1} = \lambda_1\mu\mathbf{p_1} \quad \rightarrow \quad \mathscr{A}\,\mathbf{p_2} = \lambda_1\mathbf{p_2}$$

da cui

$$\begin{cases} \mathscr{A}\,\mathbf{p_2} = \lambda_1\mathbf{p_2} \\ \mathscr{A}\,\mathbf{p_2} = \lambda_2\mathbf{p_2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

contrariamente all'ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

□

Nel caso di un solo autovalore possono aversi due autovettori linearmente indipendenti, cioè relativi a direzioni diverse, o uno soltanto; nel terzo dei tre casi possibili, nessun autovalore, naturalmente non ci sono autovettori.

ESEMPIO 6.3. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

ha un solo autovalore $\lambda = 1$.

Si tratta della matrice detta identità *infatti riesce, qualunque sia il vettore p*

$$Ap = p$$

Quindi A, pur possedendo un solo autovalore ha tuttavia ancora due autovettori linearmente indipendenti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come pure qualsiasi altra coppia di vettori linearmente indipendenti. Anzi, nel caso della matrice identità *tutti i vettori sono autovettori.*

ESEMPIO 6.4. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

ha un solo autovalore $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} u + v = u \\ v = v \end{cases} \quad \to \quad v = 0$$

Gli autovettori sono pertanto tutti multipli del solo $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) ▶▶ Determinare gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) ▶▶ Determinare una matrice che abbia come autovettori i due vettori

$$u = (1,0), \quad v = (0,1).$$

7. Sistemi di più di due incognite

Si possono incontrare problemi più generali che coinvolgano non due ma più incognite, che devono soddisfare più equazioni.

In luogo di avviare una teoria che risponda a tali generalizzazioni (forse estesissime, perchè non pensare a 1000 equazioni che coinvolgano 1000 incognite...) consideriamo un esempio abbastanza semplice tratto dalla *Settimana Enigmistica* dell'agosto 2016:

> *Luca vuole conoscere il peso dei cubi con cui gioca, ma dispone solo di un peso da* 1 *hg. ed effettua* 5 *pesate come in Figura 3. Sapendo che i cubi di uno stesso colore hanno lo stesso peso e basandosi sulle pesate fatte, qual è il peso di ciascun cubo ?*

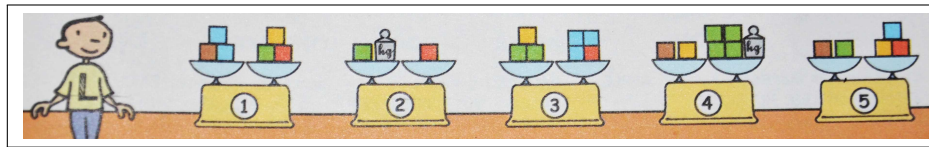



FIGURA 3. Le 5 pesate

Indichiamo con

a = peso dei cubi azzurri
g = peso dei cubi gialli
v = peso dei cubi verdi
r = peso dei cubi rossi
m = peso dei cubi marroni

La lettura degli esiti delle 5 pesate conduce al seguente sistema

$$\begin{cases} 2a+m & = g+v+r \\ v+1 & = r \\ g+2v & = 3a+r \\ m+g & = 4v+1 \\ m+v & = a+g+r \end{cases}$$

Lavorando *per sostituzione* si perviene ai seguenti risultati

$$a = 1\,,\; g = \frac{5}{2}\,,\; v = \frac{3}{2}\,,\; r = \frac{5}{2}\,,\; m = \frac{9}{2}$$

Quanto è stato oneroso il conto ?

Se ammettessimo che un sistema di due equazioni in due incognite si risolve in due minuti potremmo prevedere che un sistema di 5 equazioni in 5 incognite si risolva in 5 minuti ?

O c'è da temere tempi più lunghi ?

CAPITOLO 4

Le prime funzioni

1. Introduzione

Nell'espressione

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

la variabile y è calcolata *in funzione* della variabile x, cioè dipende dal valore che si dia ad x:

$$\begin{cases} x = 0 & \rightarrow & y = 1 \\ x = 1 & \rightarrow & y = 0 \\ x = 5 & \rightarrow & y = 36 \\ \dots \end{cases}$$

L'espressione $2x^2 - 3x + 1$ definisce la funzione f:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione f determina il numero $f(x)$.

Il simbolo f rappresenta quindi il procedimento attraverso il quale dato x si calcola il numero $2x^2 - 3x + 1$:

$$f: \quad x \quad \rightarrow \quad f(x)$$

- x è un *numero*,
- f è un *procedimento*,
- $f(x)$ è il *numero* che il *procedimento* f genera lavorando il *numero* x.

Le funzioni - i procedimenti - che, dato un numero reale x generano, come quella precedentemente osservata, un altro numero reale y si dicono *funzioni reali di variabile reale*.

La lettera, nelle righe precedenti f, che indica il procedimento è semplicemente il nome dato, liberamente, a quel procedimento. Tutte le volte in cui si lavori con diverse funzioni è quindi estremamente utile denominarle con nomi (lettere) diverse.

Studiare, conoscere, indagare una funzione significa raccogliere informazioni sul procedimento che essa rappresenta:

- produce numeri positivi ?
- produce numeri di un certo intervallo ?
- produce numeri via via più piccoli al crescere di x ?

- ecc. ecc.

DEFINIZIONE 1.1. *L'insieme D dei numeri x su cui la funzione f è definita prende il nome di dominio di f.*

ESEMPIO 1.2. *Il dominio non è necessariamente l'intero insieme $\mathbb{R}$: basta pensare alla funzione*

$$r: \quad x \quad \mapsto \quad r(x) = \frac{1}{x}$$

per accorgersi che gli x "leciti" non sono tutti i reali ma (solamente) quelli differenti da zero. Il dominio quindi della funzione r è $D := \mathbb{R} - \{0\}$.

DEFINIZIONE 1.3. *L'insieme di tutti i numeri $f(x)$ prodotti da f in relazione ai diversi $x \in D$ si chiama immagine di f.*

ESEMPIO 1.4. *L'immagine della funzione*

$$g: \quad x \quad \mapsto \quad g(x) = 1 + x^2$$

è l'insieme dei numeri reali $[1, +\infty)$

DEFINIZIONE 1.5. *Nel caso in cui l'insieme immagine di f sia limitato si dice che la funzione è limitata.*

ESEMPIO 1.6. *La funzione*

$$s: \quad x \quad \mapsto \quad s(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ha immagine l'intervallo $(0,1]$, insieme limitato. Quindi la funzione s è limitata.

La precedente funzione g che ha immagine $[1, +\infty)$, insieme non limitato, non è limitata.

1.1. Funzioni pari, dispari, crescenti, ecc. Alle funzioni si applicano spesso numerosi aggettivi che si riferiscono a loro proprietà significative.

Tra questi ricordiamo i due *pari* e *dispari*:

- f si dice *funzione pari* se $f(x) = f(-x)$.
- f si dice *funzione dispari* se $f(-x) = -f(x)$

La *funzione pari* più comune è $f(x) = x^2$, la *funzione dispari* più comune è $f(x) = x^3$.

ESEMPIO 1.7. *La funzione $f(x) = 3x^2 + 1$ è pari: verifichiamo il risultato su $x_0 = 5$*

$$f(5) = 3 \times 5^2 + 1 = 76, \quad f(-5) = 3 \times (-5)^2 + 1 = 76$$

La funzione $g(x) = x^3 - x$ è dispari: verifichiamo il risultato su $x_0 = 2$

$$g(2) = 2^3 - 2 = 6, \quad g(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$$

Per quanto concerne la forma del grafico ricordiamo che:

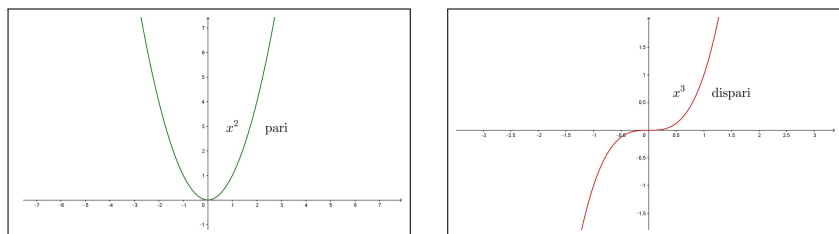



FIGURA 1. x^2 pari, x^3 dispari

- il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y,
- il grafico di una dispari è simmetrico rispetto all'origine[1].

Occorre tener presente naturalmente che ...

... la maggior parte delle funzioni non è né pari né dispari !

Ancora più importanti sono i seguenti aggettivi:

- funzione **crescente**,
- funzione **decrescente**,
- funzione **iniettiva**.

DEFINIZIONE 1.8. *La funzione f è crescente se*

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \to \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Naturalmente dichiarando che una funzione è crescente si intende che tale proprietà è soddisfatta per ogni possibile scelta di $x_1 < x_2$: così se si trovasse anche una sola coppia $x_1 < x_2$ per la quale $f(x_1) \not< f(x_2)$ **si dovrebbe** dichiarare che f *non è crescente*.

DEFINIZIONE 1.9. *La funzione f è decrescente se*

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \to \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Le funzioni crescenti e quelle decrescenti sono dette *monotone*.
Naturalmente non è vero che una funzione che non sia crescente sia di conseguenza decrescente: la maggior parte delle funzioni non sono monotone.

ESEMPIO 1.10. *La funzione $f : x \mapsto 3x + 5$ è crescente, mentre la $g : x \mapsto 1 - x$ è decrescente.*

La funzione $q : x \mapsto x^2$ non è nè crescente nè decrescente:
infatti $-2 < 1 \quad q(-2) \not< q(1)$, e quindi dichiaro che q non è crescente.

Osservato poi che $1 < 2 \quad q(1) < q(2)$ dichiaro che q non è decrescente.

Ne concludo che q non è monotona.

[1]Ne segue che se f è dispari necessariamente $f(0) = 0$.

DEFINIZIONE 1.11. *La funzione f è iniettiva se*

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \quad \to \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

ESEMPIO 1.12. *La funzione $f : x \mapsto 3x+5$ è iniettiva, mentre la $q : x \mapsto x^2$ non è iniettiva, infatti $-1 \neq 1$, ma $\quad q(-1) = q(1)$.*

PROPOSIZIONE 1.13. *Sia le funzioni crescenti che quelle decrescenti sono iniettive.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti se $x_1, x_2 \in D$ sono diversi allora ce ne sarà uno minore e uno maggiore: sia ad esempio $x_1 < x_2$, allora se f è crescente riuscirà $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analogamente se f fosse decrescente riuscirebbe $f(x_1) > f(x_2)$ e quindi ancora $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

OSSERVAZIONE 1.14. *Se f è iniettiva allora l'equazione*

$$f(x) = k$$

con k assegnato e x l'incognita, se ha soluzione allora ne ha una sola.

Infatti non ci possono essere $x_1 \neq x_2$ soluzioni dell'equazione in quanto

$$\begin{cases} f(x_1) = k \\ f(x_2) = k \end{cases} \quad \to \quad f(x_1) = f(x_2)$$

uguaglianza impossibile dal momento che f è iniettiva e quindi su punti $x_1 \neq x_2$ diversi produce valori $f(x_1) \neq f(x_2)$ diversi.

Ricordano tutti come le equazioni di primo grado $ax+b=0$ abbiano una sola soluzione, mentre quelle di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ne possono avere anche due:

- *le funzioni $f(x) = ax+b, \quad a \neq 0,$ sono iniettive,*
- *le funzioni $g(x) = ax^2+bx+c$ non lo sono.*

1.2. Esercizi.

(1) ►► Assegnate le funzioni

$$f(x) = 3x^2+1, \quad g(x) = 2x^3-1, \quad s(x) = g(x)+g(-x)$$

esaminare se sono funzioni pari, dispari, ecc.

(2) ►► Determinare due funzioni f e g tali che

$$f(0) = g(0) = 1, \quad f(1) = g(1) = 0, \quad f(2) = g(2) = -1$$

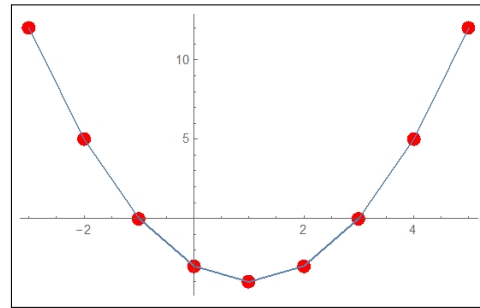
(3) ►► Sia $f(x) = 3x+5$: determinare la somma

$$\sum_{k=-3}^{3} f(k)$$

2. Grafico di una funzione

Sia $f(x) = x^2 - 2x - 3$: ad ogni valore x corrisponde un risultato $y = f(x)$.

Possiamo tabulare la f su un certo insieme di numeri x

x	y
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5
5	12

Il grafico è la curva del piano cartesiano formata dai punti di coordinate $(x, f(x))$.

Il modo più semplice di approssimare il grafico di una funzione $f(x)$ per $x \in [a,b]$ è quello di

- scegliere un certo numero di punti $x_1, x_2, \ldots \in [a,b]$,
- calcolare i valori corrispondenti $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...
- disegnare sul piano cartesiano i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), \ldots$
- tracciare la poligonale da essi determinata.

È questo il procedimento che eseguono i computer nel disegnare i grafici: con l'unica particolarità che utilizzano un numero di punti spesso molto grande.

2.1. Utilità del grafico.

Il grafico illustra le proprietà di una funzione in modo intuitivo, spesso utile. Così è evidente dal grafico precedente, pagina 49, che:

- i valori più bassi prodotti dalla funzione si ottengono in corrispondenza di $x \approx 1$
- più x si allontana da 1 più i corrispondenti valori $f(x)$ diventano grandi
- gli unici x per i quali $f(x) \leq 0$ sono quelli compresi tra -1 e 3
- ecc.

Esistono tecniche anche molto raffinate per disegnare il grafico di una funzione, tecniche che esamineremo, almeno in parte, in seguito: gli strumenti comunque più rapidi (ed efficaci) sono offerti dai computer.

Ricordate che per disegnare il grafico di una funzione potete sempre far ricorso al sito `http://www.wolframalpha.com/` che generalmente aggiunge al semplice grafico numerose importanti informazioni, spesso anche importanti approfondimenti.

2.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare i grafici delle funzioni $f(x) = \lambda\ (x+1)(x-2)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) ▶▶ Determinare il grafico di $f(x) = |1-x^2|$
(3) ▶▶ Determinare il grafico di $f(x) = x^2(1-x)$.

3. Funzioni definite a tratti

L'idea più comune di funzione è quella di un procedimento, quale il raddoppio o l'elevazione al quadrato o altro procedimento generalmente espresso da una formula, che si applica a tutti i numeri x o, almeno a tutti quelli sui quali quel procedimento è applicabile.

Non è questo il caso generale: la funzione potrebbe essere assegnata con diversi procedimenti, ciascuno destinato a particolari intervalli di numeri reali.

ESEMPIO 3.1. *Sia f la funzione che*

ai numeri negativi fa corrispondere il loro quadrato
ai numeri positivi fa corrispondere la loro metà

$$f: \quad x \quad \to \quad \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 0 \\ x/2 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Così, ad esempio, dovendo calcolare la somma $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$ si avrà

$$\sum_{k=-2}^{1} f(k) = (2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)/2 = 5 + \frac{1}{2}$$

avendo calcolato ognuno degli addendi con il procedimento che gli spetta.

Il grafico della f definita in questo esempio è quindi quello di Figura 2.

4. Funzioni composte

Assegnata una funzione f possiamo pensare di applicarla invece che a un semplice numero x ad una espressione.

Ad esempio sia $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$:

$$\begin{array}{lll} f: x & \mapsto 3x^2+5x+1 & = 3x^2+5x+1 \\ f: 1+x & \mapsto 3(1+x)^2+5(1+x)+1 & = 3x^2+11x+9 \\ f: 1+\sqrt{2} & \mapsto 3(1+\sqrt{2})^2+5(1+\sqrt{2})+1 & = 6+11\sqrt{2}+9 \\ f: a+b & \mapsto 3(a+b)^2+5(a+b)+1 & = 3a^2+6ab+3b^2+5a+5b+1 \\ f: \sqrt{4+x} & \mapsto 3(\sqrt{4+x})^2+5\sqrt{4+x}+1 & = 5\sqrt{4+x}+3x+13 \end{array}$$

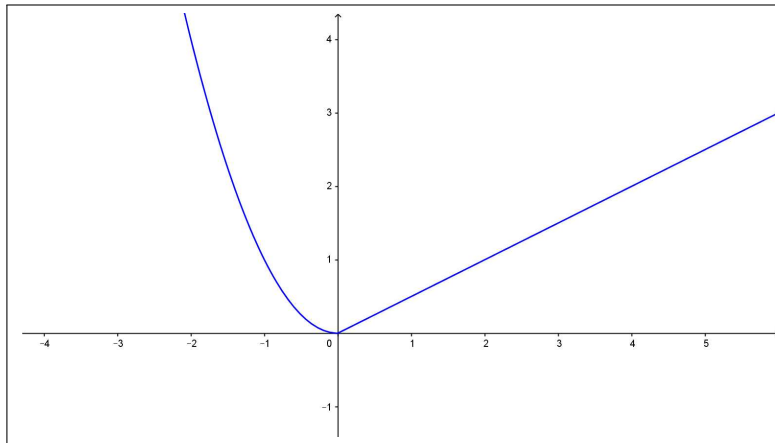



FIGURA 2. Funzioni definite a tratti

Operazioni analoghe possono essere proposte ad esempio al modo seguente

$$g: \ x \mapsto f(x+1) - f(x)$$

pensando che f sia ancora la funzione $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ precedente:

$$g : x \mapsto f(x+1) - f(x) = 3x^2 + 11x + 9 - (3x^2 + 5x + 1) = 6x + 8$$

Il titolo *funzioni composte* si riferisce in generale alla composizione di due (o più) funzioni f e g nel senso di calcolare la seconda g sul risultato della prima f: alla funzione composta viene dato tradizionalmente il nome di

$$g \circ f,$$

espressione che si usa leggere g *tondo* f.

Il valore si indica con la notazione $(g \circ f)(x)$, o con $g[f(x)]$.

Naturalmente la composizione richiede il rispetto di condizioni aggiuntive sull'insieme di definizione: per calcolare $g[f(x)]$ occorre infatti che

- su x si possa calcolare la f
- e sul risultato $f(x)$ si possa calcolare la g.

ESEMPIO 4.1. *Sia* $f(x) = 1 + x$ *e* $g(x) = \sqrt{x}$*: riesce*

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1+x}$$

espressione che richiede $1 + x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -1.$

In termini di procedimento la sequenza che definisce $g \circ f$ è la seguente:

$$x \quad \overset{f}{\mapsto} \quad f(x) \quad \overset{g}{\mapsto} \quad g[f(x)]$$

Ad esempio siano

$$f : x \mapsto 1 + x^2, \qquad g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

il valore di $(g\circ f)(3)$ si calcola come segue:

$$f:3\mapsto 10,\quad g:10\mapsto \frac{1}{1+10}=\frac{1}{11}$$

e pertanto $g[f(3)]=\dfrac{1}{11}$.
Si noti che la composizione di due funzioni dipende dall'ordine con il quale la si esegue, nel senso che, in generale,

$$g[f(x)]\;\neq\; f[g(x)]$$

Verifichiamo cosa succede relativamente alle f e g precedenti:

$$g[f(x)]=\frac{1}{2+x^2},\quad f[g(x)]=1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}$$

espressioni evidentemente diverse,
Ad esempio $g[f(3)]=\dfrac{1}{11},\quad f[g(3)]=\dfrac{17}{16}$.

4.1. Le funzioni iterate.

Fra le composizioni possiamo considerare la composizione di f con se stessa

$$f\circ f:\; x\overset{f}{\mapsto}\; f(x)\;\overset{f}{\mapsto}\; f[f(x)]$$

Così, ad esempio, supponendo $f(x)=1+x^2$

$$f\circ f:\; 3\overset{f}{\mapsto}\;10\overset{f}{\mapsto}\;101$$

Le funzioni $f[f(x)], f\{f[f(x)]\},\dots$ si dicono *iterate* di f: si indicano anche con le notazioni

$$f^{(2)},\; f^{(3)},\dots$$

ESEMPIO 4.2. *Sia*

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

calcoliamo le iterate $f^{(2)},\; f^{(3)},\dots$ *nel punto* $x_0=5$*:*

$f(5)=2.7,\; f^{(2)}(5)=1.72037,\; f^{(3)}(5)=1.44146,\; f^{(4)}(5)=1.41447,\; f^{(5)}(5)=1.41421,\dots$

Non può sfuggire a nessuno come i valori prodotti dalle iterate di f *nel punto* $x_0=5$ *approssimino* $\sqrt{2}$.

Può essere interessante sperimentare[2]

- *i valori che le stesse iterate produrranno in punti diversi dal* 5 *considerato,*

[2]Vedi il Metodo di Newton, pagina 223

- *i valori che si otterrebbero iterando in luogo della f scelta la g simile*
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

4.2. La congettura $3n+1$. Il titolo spetta a una congettura (ancora aperta) fatta da illustri matematici del '900: Collatz, Kakutani, Ulam, ecc.

La congettura è la seguente:

Detta $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ la funzione
$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & per \quad n \quad dispari \\ \\ \frac{1}{2}n & per \quad n \quad pari \end{cases}$$
qualunque sia $n_0 \in \mathbb{N}$ esiste un ordine m_0 tale che $f^{(m_0)}(n_0) = 1$, avendo indicato naturalmente con $f^{(m)}$ le iterate di f.

ESEMPIO 4.3. *Sia, ad esempio $n_0 = 3$ le iterate di f producono $\{10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$. Alla settima iterazione si ha, effettivamente, $f^{(7)}(3) = 1$.*

Scelta invece $n_0 = 6$ le iterate producono $\{3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$. Alla ottava iterazione si ha $f^{(8)}(6) = 1$.

Per $n_0 = 27$ la prima iterata che produce 1 è la $111-$esima.

Naturalmente l'idea di sperimentare la congettura su numerosi n_0 è ragionevole, ma ovviamente non prova la sua validità generale: ad esempio se $n_0 = 2^{123456789}$ un numero pari spaventosamente grande è chiaro che iterando 123456789 volte la f, cioè dividendo 123456789 volte a metà si arriva a 1.
Ma se si fosse partiti dal dispari $n_0 = 2^{123456789} + 1$ chi ci assicura che, prima o poi si sarebbe raggiunto 1 ?
...e anche se lo si fosse raggiunto (forse un calcolo da milioni di anni) chi assicurerebbe analoga soddisfazione partendo da $n_0 = 3^{123456789} + 1$?
Si dice che Paul Erdos (1913-1996), uno dei più illustri matematici dello scorso secolo, commentasse la congettura $3n+1$ con la famosa frase

Mathematics is not yet ready for such problems.

4.3. Iterate e frazioni continue. Consideriamo un'equazione di secondo grado, ad esempio
$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 8x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 - \frac{15}{x}$$
Indicata con
$$f(x) = 8 - \frac{15}{x}$$

le soluzioni dell'equazione di secondo grado assegnata verificano l'equazione $x = f(x)$ come pure, di conseguenza, applicando f a primo e secondo membro, $f(x) = f[f(x)]$.
Si ha pertanto

$$\begin{cases} x & = f(x) \\ f(x) & = f[f(x)] \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = f[f(x)]$$

Con lo stesso ragionamento si ottengono le successive analoghe relazioni

$$x = f(x) \quad \rightarrow \quad x = f^{(2)}(x) \quad \rightarrow \quad x = f^{(3)}(x) \quad \rightarrow \quad \ldots \quad x = f^{(n)}(x)$$

È interessante apprezzare la forma con la quale le iterate si presenteranno

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) = f(x) \qquad & = 8 - \frac{15}{x} \\
f^{(2)}(x) = f^{(1)}[f(x)] \quad & = 8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{x}} \\
f^{(3)}(x) = f^{(2)}[f(x)] \quad & = 8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{x}}} \\
f^{(3)}(x) = f^{(3)}[f(x)] \quad & = 8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{x}}}}
\end{aligned}$$

Si tratta di una forma analoga a quella delle frazioni, con una iterazione particolarmente semplice ed evidente: tali espressioni, pensate per ordini di iterazione comunque grandi, hanno il nome classico di

frazioni continue

Sperimentiamo i valori delle precedenti iterate a partire da $x = 1$

x	1
$f(1)$	-7
$f^{(2)}(1)$	10.1429
$f^{(3)}(1)$	6.52113
$f^{(4)}(1)$	5.69978
$f^{(5)}(1)$	5.36832
$f^{(6)}(1)$	5.20583
$f^{(7)}(1)$	5.11862
$f^{(8)}(1)$	5.06952
$f^{(9)}(1)$	5.04114

È abbastanza evidente che i valori che le iterate di f producono a partire da $x = 1$ approssimano sempre più 5, una radice dell'equazione di secondo grado inizialmente assegnata.

La convergenza osservata non vuole certamente candidare il complicato procedimento di frazioni continue a gestire il molto semplice e noto calcolo delle radici di un'equazione di secondo grado !

4.4. Esercizi.

(1) ▶▶ Siano
$$f(x) = \frac{2+x}{1+x^2}, \quad g(x) = 1+x$$
determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

(2) ▶▶ Sia $f(x) = 3x^2$ e sia $x_0 = \frac{1}{10}$: determinare l'insieme E dei valori $f^{[k]}(x_0)$ essendo $f^{[k]}$ le iterate di f e decidere se E è limitato.

(3) ▶▶ Siano $f(x) = ax+b, \quad g(x) = mx+p$: trovare valori dei quattro parametri a,b,m,p tali che $f \circ g \equiv g \circ f$.

5. Soluzioni di equazioni, funzioni inverse

Assegnata[3] una funzione f si può considerare l'equazione

$$f(x) = y \tag{12}$$

con y assegnata e x incognita da determinare nel dominio di f.

È evidente che:

- se y non appartiene all'immagine di f l'equazione (12) non ha soluzione,
- se f è iniettiva l'equazione (12) non può avere più di una soluzione.

[3]Assegnare una funzione vuol dire anche assegnare il suo dominio o, in mancanza, sottintendere che esso sia l'intero insieme in cui la funzione è calcolabile

Sia ad esempio $f(x) = 2x+3$ l'equazione (12) diventa

$$2x+3 = y \quad \to \quad x = \frac{1}{2}(y-3)$$

La funzione

$$y \quad \to \quad \frac{1}{2}(y-3)$$

prende il nome di *inversa* di f e si indica con f^{-1}:

$$f: \quad t \quad \to \quad 2t+3 \qquad f^{-1}: \quad \tau \quad \to \quad \frac{1}{2}(\tau-3)$$

Così, ad esempio: $f: \quad 5 \quad \to \quad 13 \qquad f^{-1}: \quad 13 \quad \to \quad 5.$

ESEMPIO 5.1.

$$f: \quad x \quad \to \quad \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y \quad \to \quad ax+b = cxy+dy \quad \to \quad x = \frac{dy-b}{a-cy}$$

da cui

$$f: \quad t \quad \to \quad \frac{at+b}{ct+d} \qquad f^{-1}: \quad \tau \quad \to \quad \frac{d\tau-b}{a-c\tau}$$

OSSERVAZIONE 5.2. *Se g è l'inversa di f allora f è l'inversa di g: in altri termini il ruolo delle due funzioni è simmetrico*

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)$$

5.1. Il ruolo del grafico. Se si dispone del grafico della funzione f allora risolvere l'equazione $f(x) = y$ dato y equivale a determinare le ascisse dei punti del grafico che abbiano ordinata y.

ESEMPIO 5.3. *Sia $f(x) = e^x - 1$: l'equazione $f(x) = 2$ corrisponde a determinare l'ascissa dell'intersezione del grafico di f con la retta orizzontale $y = 2$*

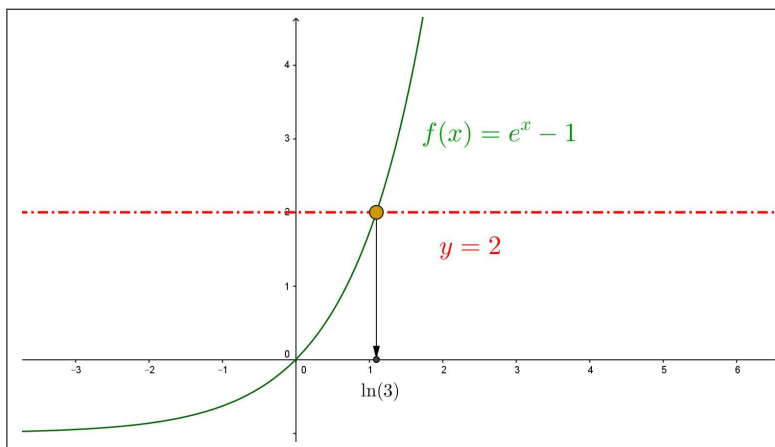



FIGURA 3. $e^x - 1 = 2$

5.2. Esercizi.

(1) ►► Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$1+(1-x^2)^2 = k$$
ha soluzioni.

(2) ►► Determinare l'inversa della funzione $f(x) = x^3+1$

(3) ►► Sia
$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha soluzione e determinare l'inversa di f.

6. I polinomi

Si chiamano polinomi di grado n le funzioni
$$f : x \quad \to \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$
I numeri $a_0, a_1, \ldots$ assegnati prendono il nome di *coefficienti del polinomio*.

ESEMPIO 6.1. *Il polinomio* $3x^2+5x-1$ *ha grado* 2 *e coefficienti*
$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 3$$
L'indice dei coefficienti dice a quale potenza della x *si riferiscono:* a_2 *è il coefficiente di* x^2*, ecc.*

La proprietà commutativa della somma permette di riconoscere che
$$3x^2+5x-1, \quad -1+3x^2+5x, \quad -1+5x+3x^2$$
sono lo stesso polinomio.

Un polinomio di grado n può essere indicato anche con la notazione sommatoria
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0$$

6.1. Grado $n = 1$.

$$y = ax+b$$
Il grafico è una retta: i due coefficienti a e b si riferiscono rispettivamente

- a all'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale delle ascisse,
- b all'ordinata dell'intersezione della retta con l'asse verticale delle ordinate.

Quindi, convenendo di avanzare nel verso della x i grafici di $ax+b$ sono in salita se $a>0$, in discesa se $a<0$, orizzontali se $a=0$.

Per disegnare il grafico del polinomio $ax+b$, una retta, basta trovare due suoi punti e poi tracciare la retta con la riga. I punti più semplici sono le intersezioni della retta con gli assi:

$$X=(0,b), \qquad Y=(-b/a,0)$$

6.2. Grado $n=2$.

$$y=ax^2+bx+c$$

Il grafico è quello di parabole: i tre coefficienti a, b, c si riferiscono rispettivamente

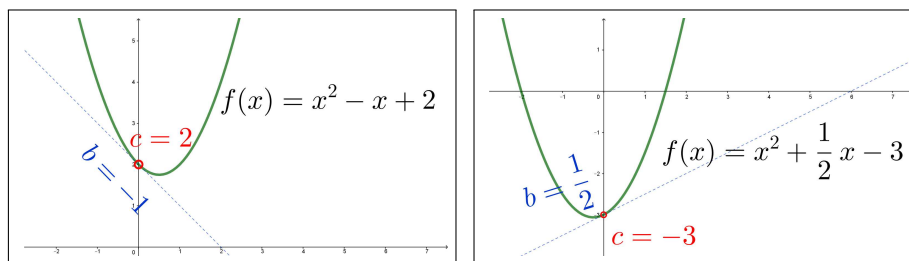



FIGURA 4. $y=ax^2+bx+c$

- a all'apertura, più o meno ampia della parabola (a grande $\to$ parabola aguzza, a piccolo $\to$ parabola larga), e col suo segno al fatto che essa sia rivolta verso l'alto o verso il basso,
- b all'inclinazione con cui il grafico traversa l'asse verticale delle ordinate,
- c all'ordinata dell'intersezione della parabola con l'asse verticale delle ordinate.

Tenuto conto che, per $a\neq 0$ si ha

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

si riconosce che i grafici dei polinomi di secondo grado sono tutti traslazioni (orizzontali e verticali) del grafico di ax^2:

- l'ascissa del punto di minimo o di massimo, del vertice, è $-\dfrac{b}{2a}$,
- il valore del minimo, o del massimo, è $\pm\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Un modo di immaginare facilmente la forma del grafico di ax^2+bx+c è , ricordata la forma *parabola*,

- ricordare il ruolo del segno di a,
- determinare le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, ricordando che
  - se ce ne sono la parabola traversa l'asse x,

– l'ascissa del vertice è il valor medio tra le radici,
– se non ce ne sono sta interamente sopra, o interamente sotto tale asse.

6.2.1. *Le equazioni di secondo grado.*
Assegnato il polinomio di secondo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ può essere richiesta la determinazionme degli x nei quali si annulla, valori che si dicono tradizionalmente *radici* dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tenuto conto della relazione

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

precedentemente osservata si riconosce che le radici sono

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

naturalmente a patto che il radicando $b^2 - 4ac$ sia non negativo.

È importante notare che

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

ESEMPIO 6.2. *Determinare un polinomio di secondo grado che abbia come radici $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$.*

$P(x) = ax^2 + bx + c$ con

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 - 3 & = -\frac{b}{a} \\ \\ x_1 x_2 & = 5(-3) & = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Tre coefficienti adatti sono pertanto

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15 \quad \to \quad P(x) = x^2 - 2x - 15$$

Naturalmente anche i polinomi $2x^2 - 4x - 30$, $-x^2 + 2x + 15, \ldots$ sono altrettanto adatti...!

ESEMPIO 6.3. *Siano α e β le radici dell'equazione $x^2 + 8x - 5 = 0$: determinare un'equazione di secondo grado che abbia come radici α/β, β/α.*

Un'equazione adatta è

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

Tenuto prersente che

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} & = \dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \quad = \dfrac{64+10}{-5} \quad = -\dfrac{74}{5} \\ \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\beta}{\alpha} & = 1 \end{cases}$$

Un'equazione adatta è pertanto

$$x^2+\frac{74}{5}x+1=0 \quad \to \quad 5x^2+74x+5=0$$

6.3. Grado $n = 3$.

$$y = ax^3+bx^2+cx+d$$

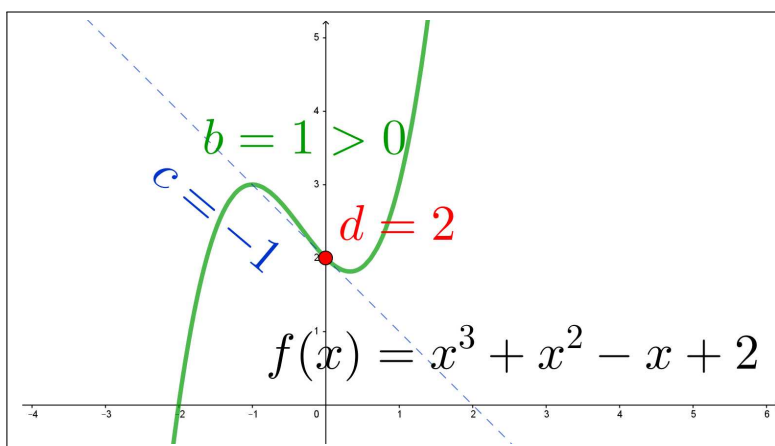



FIGURA 5. $y = ax^3+bx^2+cx+d$

I quattro coefficienti a, b, c, d si riferiscono rispettivamente

- a, col suo segno, sostanzialmente al carattere in salita o in discesa del grafico, allontanandosi dall'origine,
- b, col suo segno, alla forma convessa o concava del grafico intorno all'origine,
- c all'inclinazione con cui traversa l'asse verticale delle ordinate,
- d all'ordinata dell'intersezione del grafico con l'asse verticale delle ordinate.

6.4. Polinomi di grado pari o dispari.

I grafici dei polinomi dipendono fondamentalmente dal loro grado.

- i grafici di quelli di grado dispari somigliano tutti
  - al grafico di x^3 se il coefficiente del termine di grado più alto è positivo,
  - al grafico di $-x^3$ se il coefficiente del termine di grado più alto è negativo,

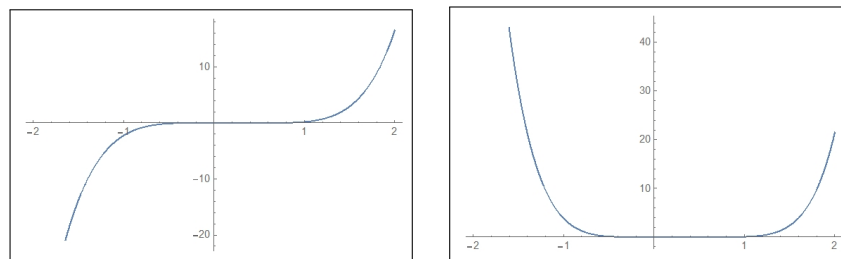



FIGURA 6. Polinomi di grado dispari e di grado pari

- i grafici di quelli di grado pari somigliano tutti
  - al grafico di x^2 se il coefficiente del termine di grado più alto è positivo,
  - al grafico di $-x^2$ se il coefficiente del termine di grado più alto è negativo.

I grafici di Figura 6 si riferiscono a $(x-0.6)(x-0.5)(x-0.3)(x+0.1)(x+0.2)$ il primo, grado 5, il primo e a $(x-0.7)(x-0.6)(x-0.5)(x-0.3)(x+0.1)(x+0.2)$ il secondo, grado 6.

6.5. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare un polinomio $P(x)$ tale che

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = -1, \quad P(3) = 4$$

(2) ▶▶ Determinare i polinomi $D(x)$ di quinto grado che rappresintino funzioni di tipo dispari.

(3) ▶▶ Disegnare il grafico del polinomio $x(1-x^2)$.

7. Funzioni razionali

Assegnati due polinomi

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

la funzione R data dall'espressione

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

prende il nome di *funzione razionale*: $P(x)$ si dice numeratore e $Q(x)$ denominatore della funzione $R(x)$.

Gli esempi più comuni riguardano i casi di numeratori e denominatori polinomi di grado 1 o 2.

$$\frac{1}{x}, \qquad \frac{x+2}{x+1}, \qquad \frac{3x^2+2x+1}{x+2}, \qquad \frac{x-1}{3x^2+2x-1}$$

Le funzioni razionali implicano una divisione, pertanto non sono definite sui valori x nei quali il denominatore $Q(x) = 0$.

Così ad esempio la prima funzione, $1/x$ non è definita per $x = 0$, la seconda non è definita per $x = -1$, ecc.

7.1. Funzioni razionali proprie. Una funzione razionale R è detta *propria* se il numeratore ha grado minore di quello del denominatore:

$1/x$ è propria, $(x+2)/(x+1)$ non lo è.

Esiste un bellissimo teorema, detto *algoritmo euclideo* che afferma che

TEOREMA 7.1. *Ogni funzione razionale si può rappresentare come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria.*

ESEMPIO 7.2. *Sia*

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

riesce ovviamente

$$R(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

somma del polinomio $P(x) = x$ e della funzione razionale propria $1/x$.

La rappresentazione proposta ricorda molto quella della divisione fra interi, divisione con *quoziente* e *resto*

ESEMPIO 7.3.

$$23 : 4 = 5 \quad con \quad resto \quad di \quad 3 \qquad \to \qquad \frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$$

Si noti come il resto 3 sia minore del divisore 4, ovvero la frazione 3/4 sia minore di 1.

7.2. La divisione fra polinomi. Vediamo, su un esempio, l'algoritmo di divisione tra polinomi che ricalca quello della divisione tra interi citato.

Cominciamo con un polinomio fatto di un solo monomio $P(x) = x^4$ e un altro $Q(x) = x^2 - 1$ di grado minore.

Si ha

$$\begin{cases} x^4 = x^2(x^2-1) + x^2 \\ x^2 = (x^2-1) + 1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2-1) + x^2 + (x^2-1) + 1$$

da cui semplificando l'addendo x^2 presente nei due membri, si ha

$$x^4 = (x^2+1)(x^2-1)+1 \quad \to \quad \frac{x^4}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

L'uguaglianza esprime x^4 come prodotto di x^2+1, *polinomio quoziente* per x^2-1, *polinomio divisore* con l'aggiunta di 1, come *polinomio resto*, di grado zero, minore del grado del divisore.

Una volta imparata la divisione per singoli monomi la si esegue, per linearità su polinomi somme di piu monomi, ricorrendo anche a qualche algoritmo mnemonico che semplifica il calcolo.

ESEMPIO 7.4. *Assegnati* $P(x) = x^3+5x+1, \quad Q(x) = x^2+3$ *determinare quoziente e resto.*

$$\begin{cases} x^3 &= x(x^2+3)-3x \\ 5x &= 0(x^2+3)+5x \\ 1 &= 0(x^2+3)+1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha

$$x^3+5x+1 = x\,(x^2+3)-3x+5x+1 \quad \to \quad x^3+5x+1 = x\,(x^2+3)+2x+1$$

Quoziente x *e resto* $2x+1$.

$$\frac{x^3+5x+1}{x^2+3} = x+\frac{2x+1}{x^2+3}$$

7.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Assegnati $P(x) = x^3+x^2+x+1$ e $Q(x) = x^2+x+1$ calcolare quoziente e resto della divisione di $P(x)$ per $Q(x)$

(2) ▶▶ Ridurre la funzione razionale $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ alla somma di un polinomio e di una funzione razionale propria.

(3) ▶▶ Siano $f(x) = \dfrac{3+2x}{1+x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$: calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$.

8. Frazioni parziali

Le funzioni razionali della forma

$$\frac{a}{cx+b}$$

sono dette *frazioni parziali semplici*: molte funzioni razionali possono essere espresse come somme di *frazioni parziali semplici*, circostanza che si rivela d'un'utilità [4] particolare quando ci occuperemo di integrali.

[4] La sequenza sorprendente di due apostrofi si trova in Manzoni, nella Introduzione alla Storia della Colonna Infame.

ESEMPIO 8.1. *Proviamo a determinare i coefficienti A, B, in modo che*

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{8x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

La somma a secondo membro è

$$\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

e pertanto, per avere l'uguaglianza, deve riuscire per ogni x

$$A(x+1)+B(x-2) = 8x-1$$

ovvero

$$\begin{cases} (A+B)x = 8x \\ A-2B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+B = 8 \\ A-2B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \end{cases}$$

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1}$$

8.1. Esercizi.

(1) ►► Esprimere la funzione razionale $\frac{1+x}{x^2-5x+6}$ come somma di frazioni parziali semplici.

(2) ►► Esprimere la funzione razionale $\frac{1+x}{1-x^2}$ come somma di frazioni parziali semplici.

(3) ►► Esprimere la funzione razionale $\frac{1}{1-x^4}$ come somma di frazioni parziali.

9. La funzione parte intera

Facciamo corrispondere ad ogni numero reale x il numero intero che gli è più vicino da sinistra, numero che indicheremo con $[x]$.

Così, ad esempio

x	$[x]$
$-2,3$	-3
-1	-1
0.51	0
3.6	3

La $[x]$ rappresenta una funzione a valori interi: in corrispondenza ad ogni numero intero fa un piccolo salto, aumentando di un'unità.

La funzione parte intera $[x]$ è indicata con il nome Floor(x).

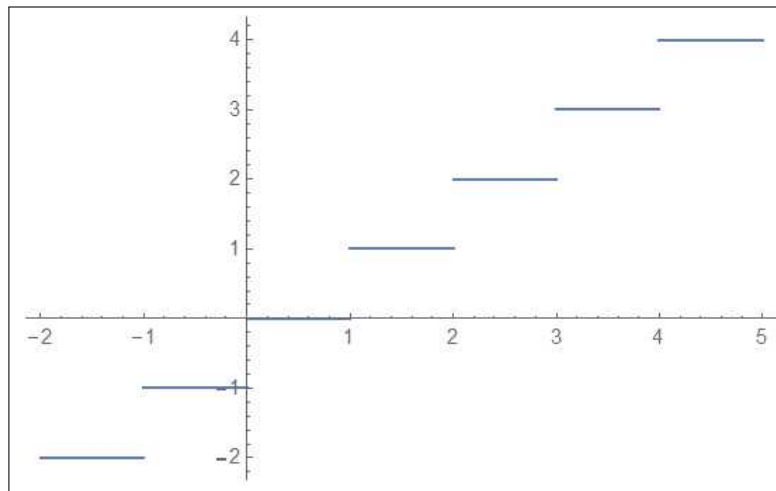



FIGURA 7. La funzione $[x]$, $\quad x \in [-2,5]$

La funzione che ad x fa corrispondere la parte intera di $x+0.5$ ha il nome di Round(x)

$$\text{Round(x)} = \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

è ancora una funzione a valori interi che fa corrispondere ad ogni x non l'intero più vicino da sinistra ma il più vicino in assoluto.

Così, ad esempio,

x	Round(x)
$-2,3$	-2
-1	-1
0.51	0
3.6	4

La funzione Round(x) rappresenta l'ordinario *arrotondamento*.

Anche la funzione Round(x), vedi Figura 8, compie dei piccoli salti di un'unità in corrispondenza dei numeri -0.5, 0.5, 1.5, $2.5, \ldots$.

9.1. Funzioni non decrescenti, ecc.

Le funzioni $[x]$, Round(x) non sono funzioni crescenti, nel significato che abbiamo accolto precedentemente, tuttavia il loro carattere

$$x_1 \leq x_2 \quad \to \quad \begin{cases} [x_1] \leq [x_2] \\ \text{Round}(x_1) \leq \text{Round}(x_2) \end{cases}$$

merita una citazione: esse vengono dette funzioni non decrescenti.

Riassumendo sono generalmente accolte le seguenti definizioni:

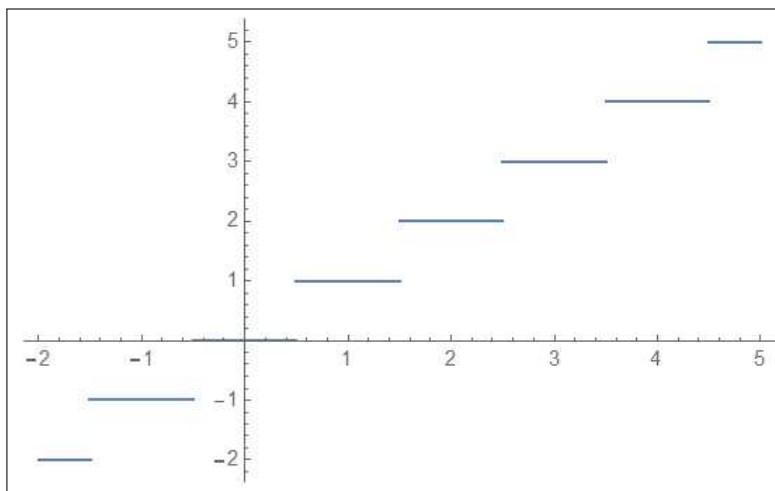



FIGURA 8. La funzione Round(x), $x \in [-2, 5]$

$x_1 < x_2$	$\rightarrow$	$f(x_1) < f(x_2)$	funzioni crescenti
$x_1 \leq x_2$	$\rightarrow$	$f(x_1) \leq f(x_2)$	funzioni non decrescenti
$x_1 < x_2$	$\rightarrow$	$f(x_1) > f(x_2)$	funzioni decrescenti
$x_1 \leq x_2$	$\rightarrow$	$f(x_1) \geq f(x_2)$	funzioni non crescenti

Le *funzioni crescenti* sono anche dette **crescenti in senso stretto** mentre le *funzioni non decrescenti* sono anche dette **crescenti in senso debole**.

Discorso analogo per le decrescenti.

10. Grafici deducibili

Dedichiamo questo paragrafo ad alcune semplici osservazioni che consentono di ricavare facilmente dal grafico di una o due funzioni semplici e comuni il grafico di numerose altre ad esse collegate.

10.1. Traslazioni e/o dilatazioni. Data $f(x)$ il titolo si riferisce alle funzioni ad essa collegate:

- $f(x)+1, \quad f(x)-2, \quad \dots,$
- $f(x-1), \quad f(x+1), \quad \dots,$
- $2f(x), \quad -f(x), \quad f(x)/3, \dots,$
- $f(2x), \quad f(x/2), \quad \dots$

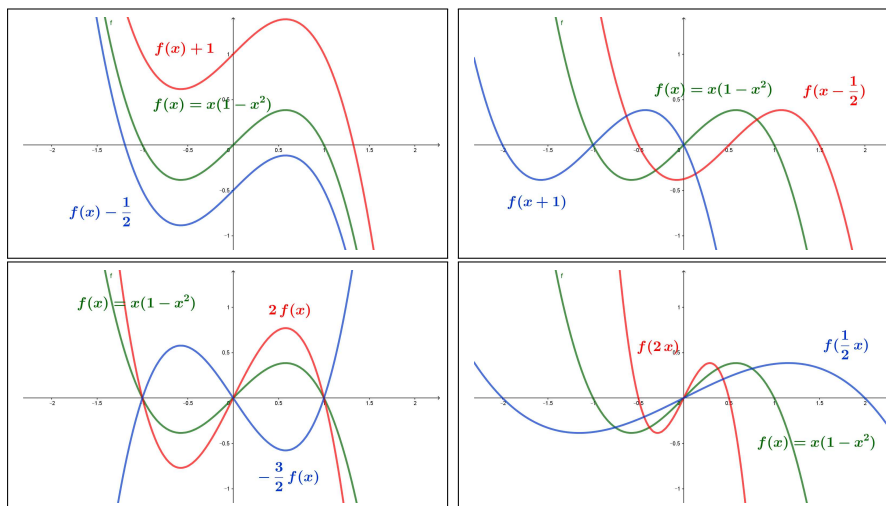



FIGURA 9. Traslazioni e/o dilatazioni a partire da $f(x) = x(1-x^2)$

I loro grafici riportati nelle figure 9 illustrano *without words* i procedimenti: traslazioni verticali o orizzontali nei primi due casi, deformazioni ancora verticali o orizzontali negli altri due.

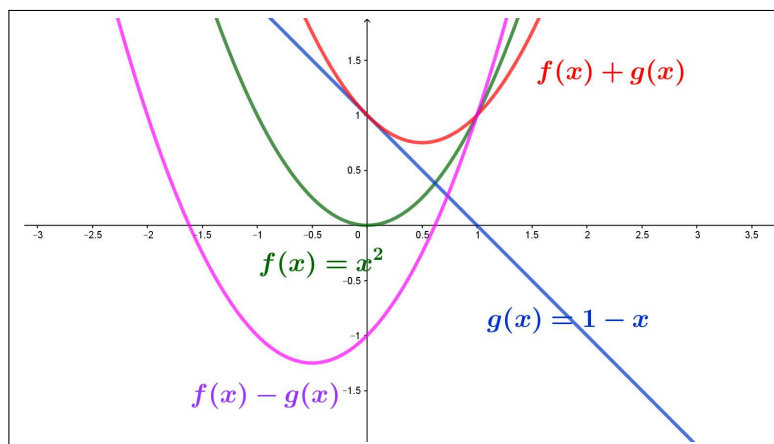



FIGURA 10. Somme, differenze

10.2. Somme, differenze. Date $f(x)$ e $g(x)$, e i loro grafici (in Figura 10 $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1-x$) si possono costruire i grafici di

- $g(x)$ a $f(x)+g(x)$,
- $g(x)$ a $f(x)-g(x)$.

Vedi Figura 10.

10.3. Prodotti, quozienti. Il grafico di un prodotto deve tener conto specialmente che:

- il prodotto è nullo dove si annulla almeno uno dei fattori,
- il segno del prodotto si determina dai segni dei fattori con la regola dei segni,
- fattori di modulo maggiore di 1 dilatano, mentre fattori di modulo minore di 1 contraggono.

Vedi Figura 11.

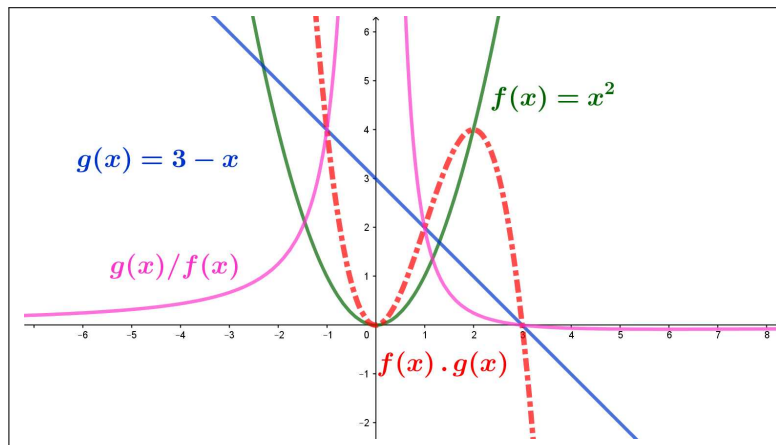



FIGURA 11. Prodotti, quozienti

10.4. Il modulo. Disponendo del grafico dedlla funzione $f(x)$ è semplicissimo realizzare quello della $|f(x)|$: si tratta semplicemente di ribaltare le parti del grafico di $f(x)$ che eventualmente si trovino al di sotto dell'asse x, vedi Figura 12.

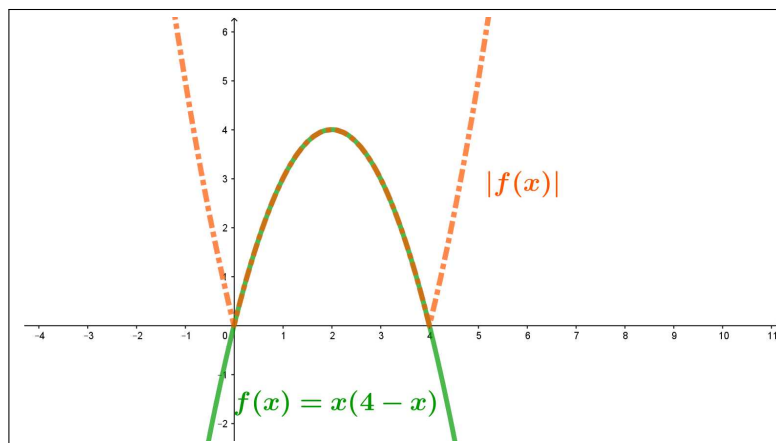



FIGURA 12. Il modulo

CAPITOLO 5

Esponenziali, logaritmi, goniometriche

1. Funzioni esponenziali

Scelta una base positiva a possiamo considerare le potenze a^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Valgono le proprietà già osservate a pagina 13:

$$\begin{cases} a^0 = 1 & 1^n \equiv 1 \\ a^{-2} = \frac{1}{a^2} & a^{1/2} = \sqrt{a} \\ a^{4/3} = a\sqrt[3]{a} & a^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

che consentono di considerare potenze a^r per ogni razionale r.

L'ipotesi che la base a debba essere positiva è evidente pensando semplicemente a $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

La possibilità di approssimare ogni numero reale x con razionali suggerisce di definire a^x per x reale tramite i valori a^r relativi ai razionali r che approssimano x.

In altri termini, ad esempio, $a^{\sqrt{2}}$ è, per definizione, il numero al quale si avvicinano[1] sempre più le potenze ad esponenti razionali

$$a^{1.4}, \quad a^{1.41}, \quad a^{1.414}, \ldots$$

DEFINIZIONE 1.1. *Scelto $a > 0$ la funzione*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \mapsto a^x$$

si chiama funzione esponenziale di base a.

La presenza del tasto $\boxed{\sqrt{}}$ sulla maggioranza delle calcolatrici permette di calcolare numerose potenze di esponente razionale: così, ad esempio $5^{2.75}$ coincide naturalmente con

$$5^{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 5^2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}} = 5^2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{5}} \approx 83,592$$

Anche esponenti più generali possono essere gestiti come nel precedente caso di 2.75: infatti la disponibilità della radice quadrata rende gestibili tutti gli esponenti

[1] Veramente andrebbe provato che si avvicinino veramente a qualcosa e non si disperdano invece come, teoricamente, si potrebbe temere.

potenze di $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^{\frac{1}{2}} & = \sqrt{a} \\ a^{\frac{1}{2^2}} & = \sqrt{\sqrt{a}} \\ a^{\frac{1}{2^3}} & = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \end{cases}$$

Da cui, ad esempio

$$10^{0.875} = 10^{0.5+0.375} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}} = \sqrt{10} \times \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \right)^3 \approx 5,623$$

È ragionevole del resto ritenere che ogni numero decimale di $[0,1)$ si possa approssimare con somme di potenze di $1/2$ e quindi ogni potenza $a^{0.\alpha\beta\dots}$ si possa approssimare servendosi di radici quadrate $\sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \dots$.

1.1. Si incontrano funzioni esponenziali ...

Si incontrano funzioni esponenziali ad esempio riferendosi all'andamento numerico di una popolazione della quale si sappia un tasso di aumento del 2% annuo: se il valore iniziale è P_0, dopo un anno si avrà

$$P_1 = P_0 + \frac{2}{100} P_0 = (1 + 0.02) P_0 = 1.02 P_0$$

analogamente dopo due anni si avrà $P_2 = 1.02 P_1 = 1.02^2 P_0$ e, in generale dopo n anni

$$P_n = (1.02)^n P_0$$

Si riconosce anche che dopo periodi di t anni, con t anche non intero, si avrà ancora

$$P_t = P_0 (1.02)^t$$

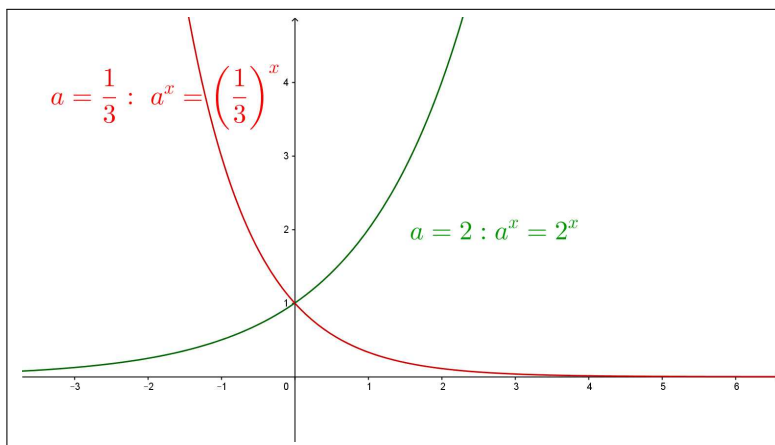



FIGURA 1. 2^x, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

1.2. Proprietà della funzione esponenziale.
Conviene, per semplicità, esplorare le proprietà della a^x pensando che x sia un intero.

- $\forall x \in \mathbb{R} : \quad a^x > 0$
- se $a = 1$ allora $a^x \equiv 1$,
- $1 < a$ implica che a^x:
  - è crescente: $x_1 < x_2 \quad \to \quad a^{x_1} < a^{x_2}$
  - è positivo grande se x è positivo grande,
  - è positivo vicino a zero se x è negativo grande,
- $0 < a < 1$ implica che a^x
  - è decrescente: $x_1 < x_2 \quad \to \quad a^{x_1} > a^{x_2}$
  - è positivo grande se x è negativo grande,
  - è positivo vicino a zero se x è positivo grande,

ESEMPIO 1.2.
Sia $a = 2$, base maggiore di 1,

$$a^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}, \quad a^7 = 128, \quad a^{100} = 1267650600228229401496703205376$$

Sia invece $a = 0.1$, base minore di 1,

$$a^{-7} = 10^7 = 10000000, \quad a^7 = \frac{1}{10000000}, \quad \ldots$$

OSSERVAZIONE 1.3. *La radice quadrata $\sqrt{2}$ è il più noto numero irrazionale: con la notazione degli esponenti frazionari si indica*

$$\sqrt{2} \quad = \quad 2^{1/2}$$

che fa pensare, ragionevolmente, che siano proprio gli esponenti non interi la principale causa di irrazionalità.

Una questione interessante può essere la seguente:

> *se a e b sono tutti e due irrazionali sarà irrazionale anche la potenza a^b ?*

NO: la terribile potenza a^b può, in qualche caso, essere razionale.

Infatti prendiamo

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2}$$

e ragioniamo sulla potenza $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Non abbiamo la minima idea di quanto sia c ma possiamo ragionare sui due casi possibili:

(1) *c sia razionale, e allora avremmo trovato l'esempio di una potenza di base ed esponenti irrazionali che risulta razionale,*

(2) *c non sia razionale, considerata allora*

$$c^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

abbiamo l'esempio di una potenza con base e esponente irrazionali che vale addirittura un numero naturale.

ESEMPIO 1.4. *Quale è più grande tra* $\sqrt[8]{8!}$ *e* $\sqrt[9]{9!}$ *?*

La risposta è semplice osservando che

$$\left(\sqrt[8]{8!}\right)^{9\times 8} = \left(8!\right)^{9} = 8! \times \left(8!\right)^{8}$$

$$\left(\sqrt[9]{9!}\right)^{9\times 8} = \left(9!\right)^{8} = \left(9 \times 8!\right)^{8} = 9^{8} \times \left(8!\right)^{8}$$

Si riconosce quindi che

$$\left(\sqrt[8]{8!}\right)^{9\times 8} < \left(\sqrt[9]{9!}\right)^{9\times 8} \quad \to \quad \sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$$

1.3. La funzione e^x.

La funzione esponenziale di base la costante *e* di Nepero gode di una particolare celebrità:

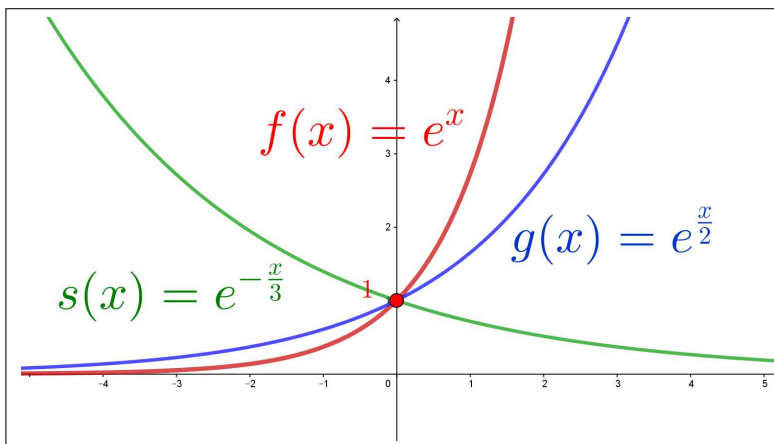



FIGURA 2. Campane di Gauss e^x, $e^{x/2}$, $e^{-x/3}$

- nella maggioranza dei casi la locuzione *funzione esponenziale* si riferisce appunto alla e^x,

- sulla calcolatrici il tasto EXP si riferisce alla e^x,
- i valori della e^x, nonostante la terribile base e si calcolano con relativa facilità, almeno per x abbastanza piccolo, tenuto presente che

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

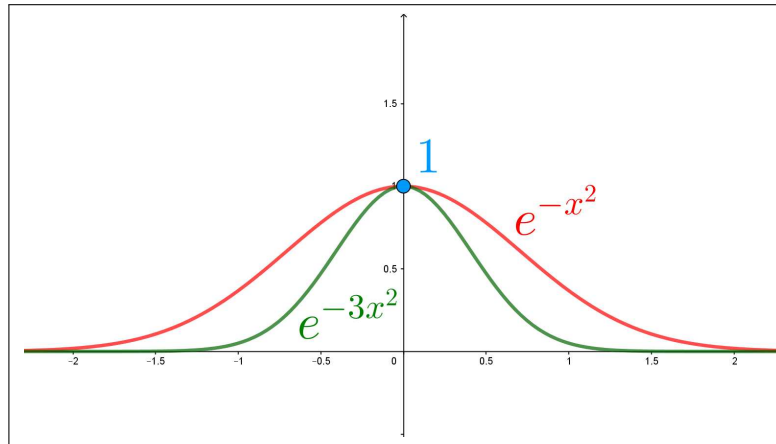



FIGURA 3. e^{-x^2}, e^{-3x^2}

La funzione composta e^{-x^2}, detta *gaussiana*, come pure tutte quelle ad essa associate $A\,e^{-\lambda x^2}$, hanno un ruolo molto importante nella distribuzione dei possibili errori casuali delle attività sperimentali.

I grafici delle $A\,e^{-\lambda x^2}$, a forma di campana, vengono detti appunto *campane di Gauss*.

ESEMPIO 1.5. *L'immagine, cioè i valori prodotti, di* $f(x) = A\,e^{-\lambda x^2}$*, con* $A > 0$ *e* $\lambda > 0$ *è l'intervallo* $(0, A]$*:*

- *più* A *è grande più la funzione produce valori* $f(0) = A$ *alti,*
- *più* λ *è grande più il grafico a campana di* f *è stretto, nel senso che non appena* x *si discosta anche poco dall'origine i valori* $f(x)$ *si avvicinano rapidamente allo zero.*

1.4. Esercizi.

(1) ►► Semplificare le seguenti espressioni servendosi delle proprietà dell'esponenziale

$$\frac{6x^{-3}y^2}{12x^{-4}y^5}, \qquad \frac{\left(2x^{2/3}\right)^3}{\left(4x^{-1/3}\right)^2}, \qquad \frac{\left(x^3y^{-1}\right)^2}{\left(xy^2\right)^{-2}}$$

(2) ▶▶ Supponiamo che la somma di 500 euro sia depositata in Banca con un contratto di interesse annuo del 5.5%: calcolare le somme maturate dopo 5 e dopo 10 anni.

(3) ▶▶ In una soluzione assegnata gli ioni OH^- hanno concentrazione 1.04×10^{-5} mol L^{-1}: calcolare il pOH e il pH di tale soluzione.

2. I logaritmi

Consideriamo, dato $b > 0$, l'equazione

$$10^x = b$$

nell'incognita x.

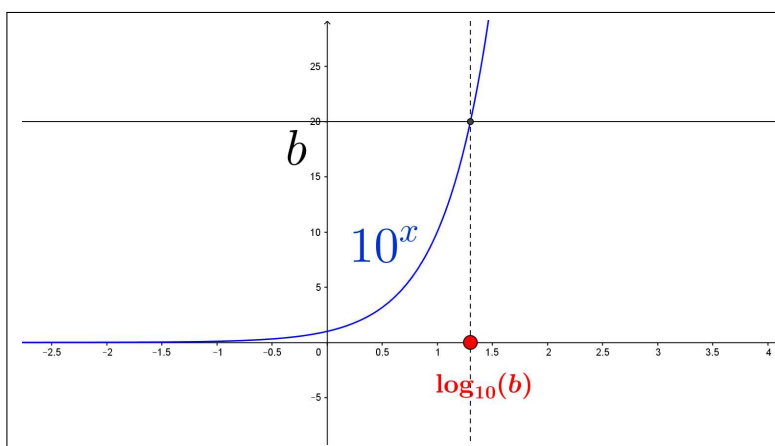



FIGURA 4. 10^x, $\log_{10}(b)$

In altri termini cerchiamo il valore x in corrispondenza del quale la funzione esponenziale[2] 10^x produce il valore b.

Tenuto presente che l'esponenziale 10^x produce sempre valori positivi è chiaro che l'equazione proposta non ha soluzione se $b \leq 0$.

È altrettanto chiaro che, tenuto conto che la funzione esponenziale 10^x produce valori sia vicini a zero che positivi molto grandi, per ogni $b > 0$ ci sarà un valore x che soddisfi l'equazione.

---

[2] La Figura 4 è riferita a un piano cartesiano non monometrico: l'unità di misura sull'asse y è un decimo di quella sull'asse x. Il motivo è rendere meno rapida, e quindi più leggibile, la crescita dell'esponenziale 10^x.

È anche chiaro che non ce ne possono essere due $x_1 < x_2$ perchè 10^x è crescente e quindi

$$x_1 < x_2 \quad \to \quad 10^{x_1} < 10^{x_2}$$

e quindi se uno dei due valori diversi 10^{x_1} e 10^{x_2} vale b non può valere b anche l'altro.

La soluzione x dell'equazione $10^x = b$ prende il nome di

$$\log_{10}(b)$$

che si legge *logaritmo in base* 10 *di b* o *logaritmo decimale di b* o, più brevemente *logaritmo di b*.

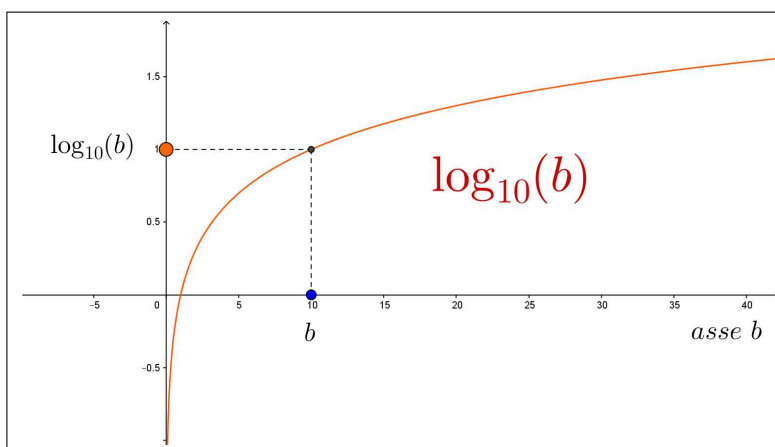



FIGURA 5. $\log_{10}(b)$, sistema non monometrico.

ESEMPIO 2.1. *Consideriamo l'equazione* $10^x = b$*:*

$$\begin{array}{lclcr}
10^x = 1 & \to & \log_{10}(1) & = & 0 \\
10^x = 10 & \to & \log_{10}(10) & = & 1 \\
10^x = 50 & \to & \log_{10}(50) & = & ? \\
10^x = 100 & \to & \log_{10}(100) & = & 2 \\
10^x = 0.1 & \to & \log_{10}(0.1) & = & -1 \\
10^x = 0.001 & \to & \log_{10}(0.1) & = & -3
\end{array}$$

ESEMPIO 2.2. *Ogni numero positivo a può essere rappresentato come potenza di* 10*, ovviamente con esponente non sempre intero...!*

$$3 = 10^x \quad \to \quad x = \log(3) \approx 0,47712 \quad \to \quad 3 \approx 10^{0,47712}$$

Si noti come

$$0,47712 \approx 0.5 \quad \to \quad 10^{0,47712} \approx 10^{0,5} = \sqrt{10} \quad \to \quad 3 \approx \sqrt{10} \approx 3,16227$$

Si tenga presente che, quasi sempre, la notazione $\log_{10}$ *viene semplificata scrivendo semplicemente* log*, tralasciando cioè la specifica* 10*.*

2.1. Proprietà dei logaritmi.

- $a > 0,\ \forall r \in \mathbb{Q}:\ \log(a^r) = r\log(a)$
- $a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}:\ \log(a^x) = x\log(a)$
- $a > 0,\ b > 0:\quad \log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $a > 0,\ b > 0:\quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

ESEMPIO 2.3. *Determinare la soluzione x dell'equazione*

$$4^x + 6^x = 9^x$$

Trascriviamo l'equazione nella forma

$$2^{2x} + 3^x 2^x = 3^{2x} \quad \to \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

Posto

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

l'equazione si riduce a

$$t^2 + t - 1 = 0 \quad \to \quad t = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Poichè $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ *è positivo solo la seconda soluzione è accettabile.*
Si ha quindi

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \to \quad x = \frac{\log\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 1.18681$$

ovvero

$$4^{1.18681} + 6^{1.18681} \approx 9^{1.18681}$$

2.2. Logaritmi in basi diverse. Abbiamo incontrato i logaritmi in base 10, $\log_{10}(b)$, cercando la soluzione dell'equazione $10^x = b$: a fianco di tale equazione se ne possono considerare tante altre analoghe: ad esempio

$$3^x = b, \quad 2^x = b, \quad 0.1^x = b, \quad \dots \tag{13}$$

Quella che non si può considerare è $1^x = b$: se $b \neq 1$ ovviamente non avrebbe soluzioni, mentre se $b = 1$ tutti i reali x sarebbero soluzione !

DEFINIZIONE 2.4. *Fissato* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *si dice logaritmo in base a di b la soluzione dell'equazione*

$$a^x = b$$

ad essa si da il nome di $\log_a(b)$.

La sorpresa è che chi conosce i logaritmi in base 10 conosce, forse senza saperlo, anche quelli in base 3.

Consideriamo infatti l'equazione $3^x = 5$: la soluzione è , per definizione $x = \log_3(5)$: trascriviamo i due numeri 3 e 5 come potenze di 10

$$\begin{cases} 3 = 10^{\log_{10}(3)} \\ 5 = 10^{\log_{10}(5)} \end{cases} \qquad 3^x = 5 \quad \to \quad 10^{x \log_{10}(3)} = 10^{\log_{10}(5)}$$

Da cui

$$x \log_{10}(3) = \log_{10}(5) \quad \to \quad x = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3)}$$

Si ha pertanto

$$\log_3(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3)}$$

Naturalmente quanto fatto a partire dalla base 3 si fa, analogamente, per ogni altra base a, riconoscendo quindi che

$$\log_a(b) = \frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}$$

Tra le infinite basi possibili una è particolarmente importante nel Calcolo: la costante e di Nepero che abbiamo incontrato a pagina 106.

Addirittura i logaritmi riferiti alla base e hanno l'ambizioso nome di

logaritmi naturali

e si denotano spesso con la notazione $\ln(b)$.

La tabellina seguente confronta i logaritmi in base 10 e quelli in base e per alcuni valori di b: si osservi che i logaritmi naturali valgono poco più del doppio di quelli decimali.

b	$Log_{10}(b)$	$ln(b)$
1	0	0.
10	1	2.30259
100	2	4.60517
1000	3	6.90776
10000	4	9.21034
100000	5	11.5129
1000000	6	13.8155

ESEMPIO 2.5.

$$8^{\log_2(3)} \quad = \quad ?$$

Tenuto presente che $8 = 2^3$ *si ha*

$$8^{\log_2(3)} = 2^{3\log_2(3)} = 2^{\log_2(3^3)} = 3^3 = 27$$

ESEMPIO 2.6.

$$\log_2(3) \quad \overset{?}{>} \quad \log_3(4)$$

Moltiplicando membro a membro per 2 *la disuguaglianza da provare equivale a*

$$2\log_2(3) \overset{?}{>} 2\log_3(4) \quad \to \quad \log_2(9) \overset{?}{>} \log_3(16)$$

Tenuto conto che

$$\log_2(9) > \log_2(8) = 3 = \log_3(27) > \log_3(16)$$

si riconosce che $\log_2(3) > \log_3(4)$.

2.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Stimare servendosi delle note approssimazioni di π e di e i valori $\pi^2, \pi^{-1}, \pi^e, e^\pi$,
(2) ▶▶ Calcolare i logaritmi in base 10 dei valori calcolati nell'esercizio precedente.
(3) ▶▶Disegnare il grafico delle tre funzioni $2x, \quad e^{2x}, \quad \log(2x)$

2.4. Applicazioni. I logaritmi, ci riferiamo a quelli in base 10, sono stati, prima dell'avvernto del calcolo automatico, meccanico prima ed elettronico oggi, uno strumento atto a facilitare:

- moltiplicazioni,
- divisioni,
- potenze anche ad esponenti non interi, le radici per intendersi,

Il loro uso dipendeva dalla disponibilità di *Tavole logaritmiche*, grossi volumi in cui erano tabulati appunto i logaritmi dei numeri decimali, in genere con una dozzina di cifre decimali, per i numeri da 1 a 10000 o poco più, tavole preparate nel corso dei secoli, dal '600 allo '800 da laboriosi bravissimi matematici.

Tali tavole potevano essere lette nei due versi: dato un numero a trovarne il logaritmo $\log(a)$ oppure dato un numero b cercare di quale numero a fosse il logaritmo. Ricerche sia in un verso che nell'altro che conducevano a numerose approssimazioni dettate dal buon senso.

ESEMPIO 2.7. *Per moltiplicare* 12345×67891 *si potevano cercare sulle tavole i logaritmi dei due fattori:*

$$\log(12345) \approx 4,0915, \qquad \log(67891) \approx 4,8318$$

osservare che, per la nota proprietà dei logaritmi

$$\log(12345 \times 67891) \approx 4,0915 + 4,8318 = 8,9233 = 8 + 0.9233$$

Trovare sulle tavole che $0,9233$ *è il logaritmo di* 8.381 *e quindi* $8,9233$ *è il logaritmo di* $8.38 \times 10^8 = 838000000$.

Il valore stimato, 838000000*, non differisce in fondo gran che dal vero prodotto* $12345 \times 67891 = 838114395$.

ESEMPIO 2.8. *Il calcolo delle potenze ad esponente non intero, le radici, è forse il pù apprezzato servizio offerto dalle tavole dei logaritmi.*

Non è ovvio, ad esempio, quale debba essere il lato ℓ di un cubo che abbia volume $V = 123456789$:

$$\ell^3 = V \quad \to \quad \ell = \sqrt[3]{123456789} \quad \to \quad \log(\ell) = \frac{1}{3}\log(123456789)$$

da cui

$$\log(\ell) \approx \frac{8,0915}{3} \approx 2,6972 \quad \to \quad \ell \approx 498$$

Il volume di un cubo di lato 498 *vale* 123505992*, non troppo lontano dal volume V richiesto.*

Attualmente i logaritmi non rivestono più interesse nel calcolo numerico ma sono presenti in numerose misure di carattere fisico chimico, misure di parametri molto grandi o molto picccoli soggetti a variazioni relativamente grandi.

Il *pH*

La concentrazione H degli ioni H^+ in una soluzione è in genere molto piccola ed è espressa con potenze negative di 10.

L'informazione sul carattere basico, neutro o acido della soluzione viene espressa considerando il numero **pH** definito come

$$pH = -\log_{10}(H)$$

In generale una soluzione è :

- *neutra* se $pH = 7$,
- *acida* se $0 \leq pH \leq 7 \quad \to \quad \log(H) \geq -7 \quad \to \quad H \geq 10^{-7}$,
- *basica* se $7 \leq pH \leq 14 \quad \to \quad \log(H) \leq -7 \quad \to \quad H \leq 10^{-7}$

La scala Richter

La scala Richter, dal nome del fondatore C.Richter, 1935, misura l'intensità di un terremoto.

La misura, certamente complessa, è fatta sui sismografi che registrano il fenomeno: si considera il rapporto

$$R = \frac{S}{S_0}$$

tra lo spostamento delle testine dello strumento osservato e lo spostamento *minimo* convenzionalmente accolto come osservabile.

Il logaritmo di tale rapporto R , $M = \log(R)$ denominato *magnitudo* del terremoto, è il numero che viene diffuso dai geologi[3] dopo il terremoto.

Ovviamente se due terremoti hanno magnitudo M_1 ed M_2 com $M_2 = 2M_1$ vorrà dire che il rapporto R_2 del secondo non è il doppio di R_1 del primo ma è il quadrato.

L'energia E sviluppata da un terremoto è ritenuta proporzionale alla magnitudo M elevata a $3/2$

$$E = c\,M^{\frac{3}{2}}$$

Tale stima, in un'unità di misura in cui $c = 1$, corrisponde alla tabella seguente

M	R	E
1	1.10^1	31.6228
2	1.10^2	$1. \times 10^3$
3	1.10^3	31.6228×10^4
4	1.10^4	$1. \times 10^6$
5	1.10^5	3.16228×10^7
6	1.10^6	$1. \times 10^9$
7	1.10^7	3.16228×10^{10}
8	1.10^8	$1. \times 10^{12}$

2.5. Esercizi.

(1) ►► Tradurre la seguente equazione, detta relazione di Arrhenius,

$$k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

in una equivalente relazione logaritmica.

(2) ►► Supponiamo che le somme di 500 e di 750 euro siano depositate in Banca con due contratti di interesse: la prima del 5.5% e la seconda del 4%. Determinare il momento t in cui i due depositi hanno lo stesso ammontare.

(3) ►► Determinare le soluzioni dell'equazione $e^x + 6e^{-x} = 5$.

3. Le funzioni goniometriche

Le funzioni goniometriche si incontrano, almeno la prima volta, nell'ambito della *trigonometria*: si tratta delle due funzioni

$$seno, \qquad coseno$$

e di qualche altra sostanzialmente ad esse riconducibile.

Hanno il nome di *funzioni goniometriche* in quanto la loro originaria definizione si riferisce a misure angolari.

[3] Le notizie, diffuse dall' *Istituto italiano di Geofisica e Vulcanologia* si trovano all'indirizzo http://cnt.rm.ingv.it/

- gli angoli si misurano *in radianti*, cioè si attribuisce ad ogni angolo come misura la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio 1 e centro nel vertice da esso intercettato,
- la misura è intesa di angoli orientati scegliendo come verso di rotazione quello antiorario,
- detti $A = (1,0)$ il primo estremo dell'arco di misura x intercettato sulla circonferenza, le coordinate, ascissa e ordinata, del secondo estremo costituiscono i due numeri

$$\cos(x) \quad e \quad \sin(x)$$

Le definizioni precedenti si riconoscono sul seguente disegno:

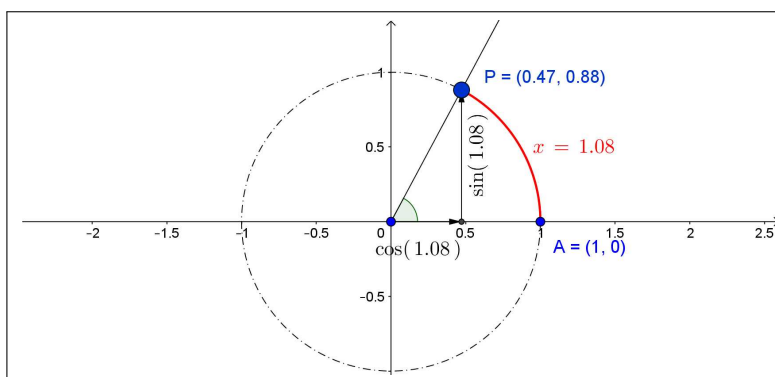



FIGURA 6. Le funzioni seno e coseno

- all'angolo scelto viene riconosciuta la misura in radianti di 1.08: si noti che se avessimo scelto un angolo retto la misura sarebbe stata $\pi/2 \approx 1.57$,
- collocato uno dei lati dell'angolo sull'asse delle ascisse abbiamo considerato il punto P in cui il secondo lato taglia la circonferenza,
- le coordinate di P, $(0.47, 0.88)$ rappresentano

$$0.47 = \cos(1.08), \qquad 0.88 = \sin(1.08)$$

- ovviamente angoli diversi condurrebbero
  - ad archi di lunghezze x diverse,
  - a punti P diversi,
  - a valori $\cos(x)$ e $\sin(x)$ diversi

Alcune proprietà evidenti possono essere elencate subito:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Esse derivano dall'essere $\cos(x)$ e $\sin(x)$ le coordinate di un punto della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$.

È importante memorizzare i valori di $\cos(x)$ e $\sin(x)$ per un certo numero di angoli fondamentali,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

3.1. La risoluzione dei triangoli rettangoli. Sia T un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 1 e sia α uno dei due angoli acuti: allora i due cateti sono lunghi uno $\cos(\alpha)$ e l'altro $\sin(\alpha)$. Per riconoscerlo basta inserire il triangolo rettangolo nel cerchio goniometrico di Figura 6 con l'ipotenusa raggio del cerchio.

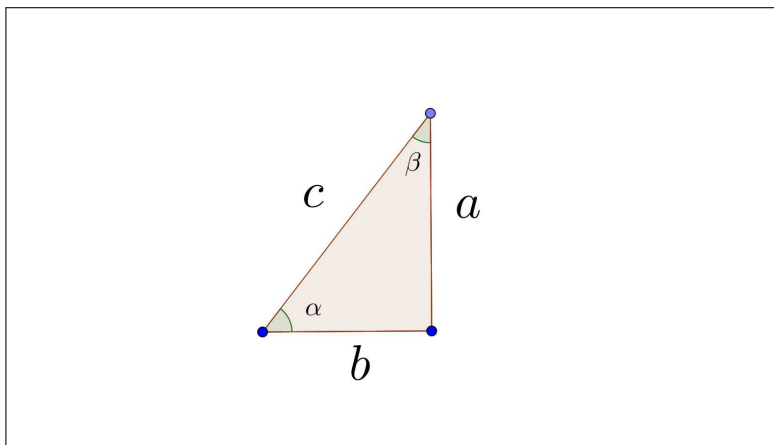



FIGURA 7. La risoluzione dei triangoli rettangoli

Nel caso generale semplici osservazioni di similitudine giustificano le formule

$$b = c\cos(\alpha), \quad a = c\sin(\alpha), \quad a = b\tan(\alpha), \quad b = a\tan(\beta)$$

riferite al triangolo in figura 7.

3.2. La periodicità.
La definizione geometrica, vedi figura 6, implica valori angolari $x \in [0, 2\pi]$.

Le funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ vengono *prolungate* per periodicità oltre tale intervallo: questo significa che, ad esempio accolta l'approssimazione $2\pi \approx 6.28$ si ha

$$\cos(7.28) = \cos(1), \quad \sin((-3) = \sin(3.28), \quad \sin(62.8) = \sin(0), \quad \dots$$

Prolungate come detto, le fuzioni *cos* e *sin* sono definite in tutto $\mathbb{R}$ e a valori in $[-1, 1]$: *cos* è funzione pari, mentre *sin* è dispari.

I grafici di $\cos(x)$ e di $\sin(x)$ sono in figura 8.

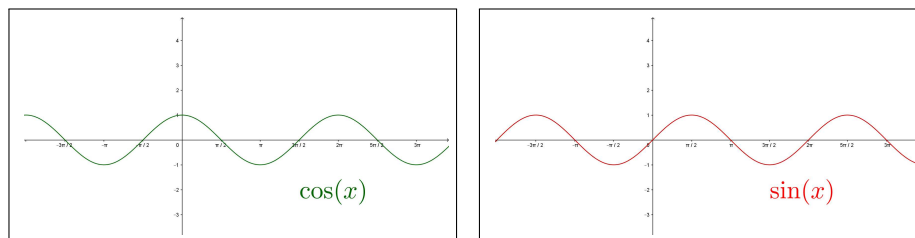



FIGURA 8. Le funzioni coseno e seno.

4. Le coordinate polari

A fianco alle coordinate cartesiane i punti del piano possono essere determinati con il sistema delle coordinate polari, determinate da

- un punto O, *il polo*,
- una semiretta p, *l'asse polare*,
- un verso di rotazione, quello *antiorario*.

Ogni punto P del piano è determinato da due numeri, che si chiamano *coordinate polari* di P:

- la distanza ρ da P ad O
- la misura θ dell'angolo tra l'asse polare e la semiretta OP, orientato nel verso antiorario:

$$P = (\rho, \theta)$$

Messo nel piano un riferimento cartesiano (ortogonale e monometrico) si associa ad esso il sistema di coordinate polari con polo O coincidente con l'origine del riferimento cartesiano e asse polare coincidente con l'asse x.

Se le coordinate polari di P sono (ρ, θ) allora le coordinate cartesiane sono

$$x = \rho\,\cos(\theta), \quad y = \rho\,\sin(\theta)$$

Viceversa se le coordinate cartesiane di P sono (x, y) le coordinate polari sono

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0,\ y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Le coordinate polari sono particolarmente utili tutte le volte che di un punto P non conti in particolare la posizione nel piano quanto la sua distanza da un punto O assegnato: per valutare, ad esempio, la quantità di calore ricevuta in P per irraggiamento da una sorgente posta in O conterà sostanzialmente solo la distanza $\rho = \overline{OP}$.

4.1. Le funzioni goniometriche sulla calcolatrice. L'abitudine a ritenere *seno* e *coseno* funzioni di angoli unitamente all'ambiguità con cui gli angoli sono misurati (gradi o radianti) può indurre a errori.

Cosa significa $\sin(1)$?

Chi accoglie quel numero 1 come la misura in gradi di un angolo penserà, necessariamente, a un angolo piccolissimo e, quindi anche a un valore $\sin(1)$ piccolissimo.

Ma se, invece quel numero 1 fosse la misura in radianti allora quell'angolo sarebbe tutt'altro che piccolo, basta ricordare che un angolo retto misura in radianti circa 1.57.

La convenzione matematica universalmente adottata è quella di misurare gli angoli in radianti e quindi $\sin(1)$ deve essere inteso come valore abbastanza vicino a 1.

Le misure in gradi rappresentano un sistema di misura molto popolare abbandonato tuttavia, per motivi che avremo occasione di conoscere, dal calcolo.

Purtroppo le calcolatrici, incluse quelle presenti sui Pc o sugli smartphone conservano, con uguale dignità i diversi sistemi di misura, gradi (= deg), radianti (= rad), GRAD (questi ultimi assai poco frequenti): è tuttavia sempre presente un tasto che seleziona quale sistema usare.

angolo	*retto*	*piatto*	*giro*
deg	90	180	360
rad	$\pi/2$	π	2π
GRAD	100	200	400

4.2. Qualche composizione. A fianco delle $\cos(t)$, $\sin(t)$ si possono considerare le

$$A\cos(t), \quad A\cos(t+k), \quad \cos(\omega\, t), \quad \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

- la prima, $A\cos(t)$ somiglia molto alla $\cos(t)$, con l'unica differenza che mentre i valori della $\cos(t)$ spaziano su $[-1,1]$ quelli della $A\cos(t)$ spaziano su $[-A,A]$,
- la seconda, una ulteriore modifica della prima, ha come grafico un traslato orizzontalmente di k, verso sinistra se $k \geq 0$ e verso destra nell'altro caso, del grafico della prima,
- la terza corrisponde a un cambio di scala della variabile t: il valore di $\cos(\omega t)$ nel punto $t = 1$ è il valore della $\cos(t)$ nel punto ω, ecc.

- la quarta ha il nome classico di funzione tangente, $\tan(t)$: come tutti i quozienti richiede che il denominatore non sia zero. Quindi la funzione tangente è definita su tutti i $t \in \mathbb{R}$ tali che $\cos(t) \neq 0$.

4.3. Le formule di addizione.

Le funzioni coseno e seno sono collegate fra loro da numerose complesse relazioni: ricordiamo qui solo le *formule di addizione* (e naturalmente le analoghe *formule di sottrazione*).

La questione è la seguente: assegnati due angoli di misure α e β che legame intercorre tra i valori

$$\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha),\ \cos(\beta),\ \sin(\alpha),\ \sin(\beta) \quad ?$$

L'idea naif che

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$$

e analogamente per $\sin(\alpha+\beta)$ va rigettata (basta verificare su un paio dei valori fondamentali riportati nella precedente tabella di pagina 82).

Le formule giuste (che non dimostriamo per semplicità) sono le seguenti

$$\begin{array}{lll} \sin(\alpha\pm\beta) & = \sin(\alpha)\cos(\beta) & \pm\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha\pm\beta) & = \cos(\alpha)\cos(\beta) & \mp\sin(\beta)\cos(\alpha) \end{array}$$

La scelta dei segni $\pm$ è evidente: il seno di una somma si esprime con la somma dei due prodotti, il seno della differenza si esprime con la differenza.

L'opposto si ha per il coseno di una somma che si esprime con la differenza dei due prodotti mentre il coseno della differenza si esprime con la somma dei due prodotti.

Conseguenze importanti delle formule di addizione sono le seguenti relazioni

$$\sin(t-\pi/2) = \cos(t), \quad \cos(t-\pi/2) = \sin(t)$$

ESEMPIO 4.1. *Costruiamo, per punti, il grafico della funzione*

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

precedentemente considerata nell'Esempio di pagina 87.

- *disegniamo, per punti, il grafico di* $\sin(x)$ *ricordando i suoi notissimi valori in corrispondenza dei punti* $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$
- *analogo discorso, disegniamo, per punti, sullo stesso piano cartesiano, il grafico di* $\cos(x)$ *ricordando i suoi notissimi valori in corrispondenza dei punti* $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$
- *realizziamo la somma ricordando che:*
  - *ove uno dei due addendi è zero la somma coincide con l'altro addendo,*
  - *la somma di due addendi positivi è positiva,*
  - *la somma di due addendi negativi è negativa.*

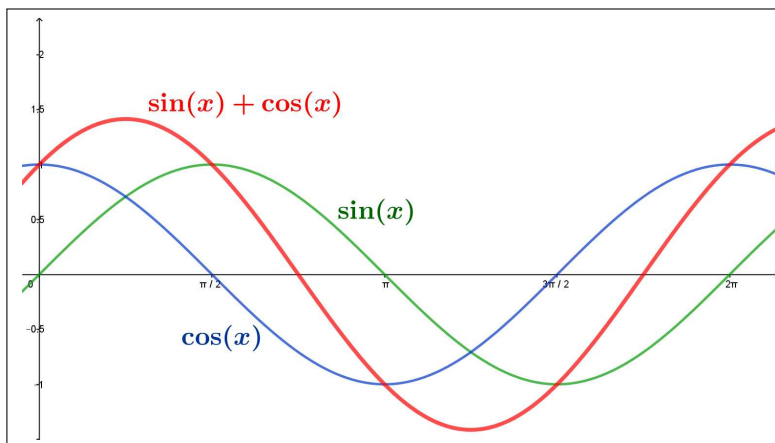



FIGURA 9. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

4.4. Somme di seno e coseno.
Consideriamo, assegnate due costanti a e b, la funzione

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \qquad f(t) = a\,\sin(t) + b\,\cos(t)$$

che possiamo anche scrivere come

$$f(t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(t)\right)$$

I due coefficienti

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

hanno somma dei quadrati 1 e pertanto sono le coordinate di un punto della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Esiste quindi un angolo φ, naturalmente dipendente dai due valori a e b, tale che

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi) \\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\varphi) \end{cases}$$

Pertanto la funzione $f(t)$ ha la forma

$$f(t) = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\cos(\varphi)\,\sin(t) + \sin(\varphi)\cos(t)\Big) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\varphi)$$

Da cui

$$a\,\sin(t) + b\,\cos(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\varphi)$$

cioè le funzioni $f(t)$ costruite come combinazioni lineari di $\sin(t)$ e $\cos(t)$ coincidono con multipli di $\sin(t)$ traslato, si dice anche *sfasato*, di un valore φ opportuno.

ESEMPIO 4.2. *Sia* $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$ *si ha*

$$f(t) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\right)$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\pi/4)$$

si ha

$$\sin(t) + \cos(t) = \sqrt{2}\,(\sin(t)\,\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\cos(t)) = \sqrt{2}\,\sin(t + \pi/4)$$

Qual'è il minimo e quale il massimo di $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$?

Semplice, sono il minimo e il massimo di $\sqrt{2}\,\sin(t + \pi/4)$*, quindi sono* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$*.*

4.5. Solo grafici ondosi ... ?

I grafici di $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(x) + \cos(x)$, ... hanno tutti forme sinusoidali, onde di ampiezza o periodo diversi, ma che sembrano tutte somigliare a onde che si ripetono. Quasi che grafici di funzioni goniometriche e disegni ondosi fossero quasi sinonimi.

Non è così: somme di seni e coseni possano esprimere funzioni che presentano grafici assai diversi.

Consideriamo come esempio le seguenti somme di seni

$$\begin{cases} S_3(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \\ \\ S_5(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) \\ \\ S_7(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) \\ \dots \\ S_{21}(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + +\frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots + \frac{1}{21}\sin(21x) \end{cases}$$

I loro grafici sono rispettivamente:

La varietà di grafici ottenuti, Figura 10, lascia intuire quanto le somme di funzioni goniometriche possano produrre risultati generali.

Quasi tutte le funzioni con le quali ci troviamo a lavorare possono infatti essere approssimate con somme di seni e coseni: tali approssimazioni sono state per la prima volta[4] osservate e usate intelligentemente dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830).

In suo onore tali approssimazioni portano il nome di *Serie di Fourier* e costituiscono uno degli strumenti fondamentali del Calcolo.

[4]Prescindendo dalle tecniche, gli epicicli, con le quali gli astronomi tolemaici interpretavano il moto apparente dei pianeti.

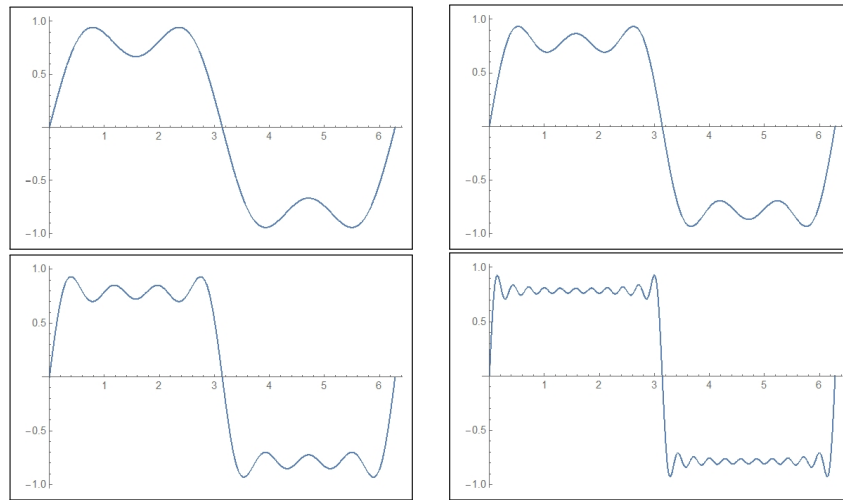



FIGURA 10. $S_3(x), \quad S_5(x), \quad S_7(x), \quad S_{21}(x)$

4.6. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare la somma $\sum_{k=0}^{4} \sin(k\pi/4)$.

(2) ▶▶ Calcolare la somma $\sum_{k=0}^{9} \cos(k\pi)$.

(3) ▶▶ Risolvere l'equazione $3\cos^2(x) + 2\sin^2(x) + \cos(x) = 2$

CAPITOLO 6

I numeri complessi

1. Il piano complesso

I punti P del piano cartesiano si indicano normalmente con la coppia (x, y) delle loro coordinate.

Tale coppia può essere scritta in forme equivalenti ma tipograficamente diverse

$$(x, y), \quad [x, y], \quad \{x, y\}, \quad x + iy, \quad \ldots$$

All'ultima proposta, rinuncia alle parentesi e comparsa del simbolo i, si da il nome di *numero complesso* $z = x + iy$.

- il primo numero, x, ha il nome di *parte reale di* z e si indica con $\Re z$,
- il secondo numero y il coefficiente del simbolo i, prende il nome di *parte immaginaria di* z e si indica con $\Im z$,
- il numero complesso $x - iy$, invertito il segno della parte immaginaria, prende il nome di *coniugato di* z e si indica con la notazione $\bar{z}$: sul piano rappresenta il simmetrico di z rispetto all'asse delle ascisse,
- il numero $\sqrt{x^2 + y^2}$ prende il nome di *modulo di* z e si indica con la notazione $|z|$: rappresenta la distanza di $P = (x, y)$ dall'origine,
- la misura dell'angolo tra l'asse delle ascisse e la semiretta dall'origine al punto (x, y), angolo orientato in senso antiorario, si chiama *argomento di* z e si indica con $\arg(z)$ e, come tutte le misure angolari, è considerato a meno di multipli di 2π.

ESEMPIO 1.1. *Sia* $z = 3 - 4i$*:*

- *il punto* $(3, -4)$ *appartiene al quarto quadrante,*
- 3 *è la parte reale di z, mentre* -4 *è la parte immaginaria,*
- *il numero complesso* $3 + 4i$ *è il coniugato di z,*
- *il numero* $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ *è il modulo di z,*
- *il numero reale* $-0,927$ *è l'argomento di z*

I numeri complessi con $y = 0$ sono gli ordinari numeri reali; quelli con $x = 0$ si chiamano invece *immaginari puri*.

PROPOSIZIONE 1.2. *Valgono le seguenti relazioni tra z e* $\bar{z}$*:*

- $\Re \bar{z} = \Re z, \quad \Im \bar{z} = -\Im z$
- $|\bar{z}| = |z|$

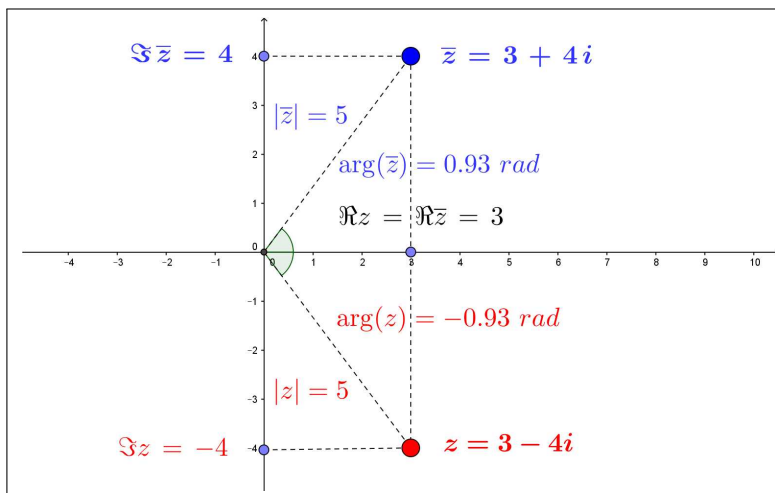



FIGURA 1. $z = 3 - 4i$

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il modulo del numero complesso $z = 3 + 4i$.
(2) ▶▶ Determinare l'argomento del numero complesso $z = 3\cos(4\pi/3) + 3\sin(4\pi/3)\,i$ e del suo quadrato z^2.
(3) ▶▶ Detto $z = 5 - \sqrt{3}\,i$ determinare la parte reale e la parte immaginaria del prodotto $z\bar{z}$.

2. Aritmetica dei numeri complessi

Sui numeri complessi si eseguono le operazioni dell'aritmetica seguendo le regole seguenti:

- prodotto per un fattore reale, somme e differenze corrispondono a
  - moltiplicare parte reale e parte immaginaria per quel fattore,
  - sommare (o sottrarre) parti reali e parti immaginarie.
- per il prodotto $(x+iy)(u+iv)$ si moltiplicano i due binomi come normale, con l'ulteriore convenzione che $i^2 = -1$,

  $$(x+iy)(u+iv) = xu + ixv + iyv + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

- per il quoziente $\dfrac{x+iy}{u+iv}$ si moltiplicano numeratore e denominatore per il coniugato di $u+iv$

  $$\frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{1}{u^2+v^2}(x+iy)(u-iv)$$

PROPOSIZIONE 2.1. *Le operazioni aritmetiche introdotte soddisfano le relazioni seguenti:*

$$\begin{cases} |z \pm w| \leq |z| + |w|, \\ |zw| = |z|\,|w|, \\ \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \\ \\ \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \\ \\ \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pm 2k\pi \end{cases}$$

ESEMPIO 2.2. *Siano $z = 1 + 2i$ e $w = 3 - i$: si ha*

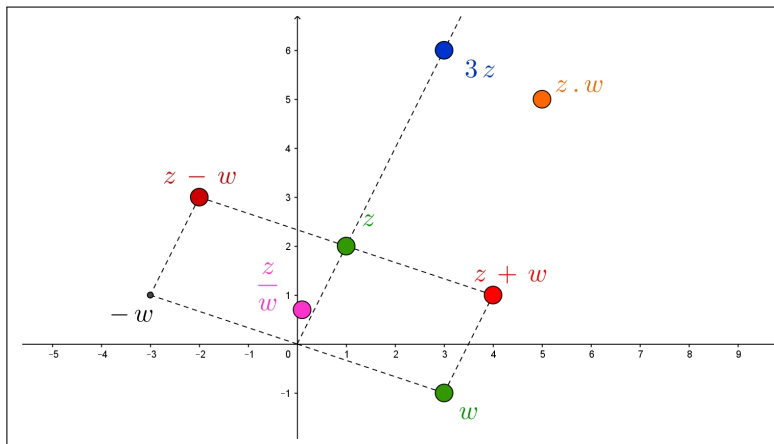



FIGURA 2. Aritmetica sui complessi

- $3z = 3 + 6i$, *una dilatazione di fattore* 3,
- $z + w = (1+3) + (2-1)i = 4 + i$, *la nota regola del parallelogramma con la quale si sommano i vedttori,*
- $z - w = (1-3) + (2+1)i = -2 + 3i$
- $zw = (1+2i)(3-i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, *si osservi che l'argomento del prodotto coincide con la somma degli argomenti dei due fattori (naturalmente modulo 2π),*
- $\dfrac{1+2i}{3-i} = \dfrac{(1+2i)\,\overline{(3-i)}}{(3-i)\,\overline{(3-i)}} = \dfrac{1+7i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$
  Si osservi che l'argomento del quoziente coincide con la differenza degli argomenti (naturalmente modulo 2π).

Definita la moltiplicazione fra due numeri complessi si possono considerare le potenze intere

$$z^2 = zz, \quad z^3 = zzz, \ldots, z^n = \overbrace{zz, \ldots z}^{n}$$

PROPOSIZIONE 2.3. *Le potenze intere z^n di un numero complesso z verificano le seguenti relazioni*

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

La relazione sugli argomenti deve essere intesa modulo 2π.

2.1. Esercizi.

(1) ►► Detti $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 1 + i$ determinare parte reale e parte immaginaria dei due numeri

$$z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}$$

(2) ►► Detto $z = i$ determinare l'insieme $E =: \{1, z, z^2, z^3, z^4, \dots\}$ e decidere se è limitato nel piano complesso.

(3) ►► Detti $z_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} - \dfrac{n}{1+n^2}\,i, \quad n \in \mathbb{N}$ esaminare se costituiscono un insieme limitato nel piano.

3. L'esponenziale complesso

Oltre alle operazioni dell'aritmetica si introduce sui complessi la funzione esponenziale definita come segue

$$e^{x+iy} = e^x \Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big)$$

essendo e^x la funzione esponenziale[1], presente sulle calcolatrici col tasto Exp e coseno e seno le ordinarie funzioni goniometriche.

L' esponenziale e^{x+iy} ora introdotto è una funzione che ha *dominio* l'insieme dei numeri complessi $\mathscr{C}$ e *immagine* l'insieme dei numeri complessi privato dello zero.

ESEMPIO 3.1.

$$e^{1+i\pi} = e^1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = e(-1+0i) = -e$$
$$e^{i\pi/2} = e^0(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = 1(0+i) = i$$

PROPOSIZIONE 3.2. *La funzione esponenziale soddisfa sui complessi le stesse proprietà formali che verifica sui reali:* $e^0 = 1, \quad e^{z+w} = e^z\, e^w, \quad e^{nz} = (e^z)^n$.

Inoltre riesce $|e^{x+iy}| = e^x \qquad \overline{e^{x+iy}} = e^{x-iy}$.

ESEMPIO 3.3. *Si ha*

- $e^{1+i\pi} = e^1\, e^{i\pi} = e(-1) = -e$
- $e^{2z} = e^{z+z} = e^z\, e^z = (e^z)^2$

[1] L'esponenziale e^x è trattato un po' più estesamente a pagina 69.

OSSERVAZIONE 3.4. *L'espressione dell'esponenziale complesso riferito al numero complesso* $i\pi$ *produce la relazione detta identità di Eulero*

FIGURA 3. $e^{i\pi}+1=0$

che, sorprendentemente, coinvolge i 5 forse più importanti oggetti matematici: 0, 1, π, i, e.

3.1. Le rotazioni nel piano.

I punti $P=(x,y)$ del piano cartesiano possono sempre leggersi anche come numeri complessi $z=x+iy$: il prodotto

$$z\times e^{i\alpha}=(x+iy)\times(\cos(\alpha)+i\,\sin(\alpha))=(x\cos(\alpha)-y\,\sin(\alpha))+(x\,\sin(\alpha)+y\,\cos(\alpha))$$

rappresenta il punto Q ruotato di P intorno all'origine di un angolo α nel verso antiorario.

ESEMPIO 3.5. *Scelto* $\alpha=\pi/2$ *si ha* $e^{i\pi/2}=i$*: la Figura 4 di pagina 93 mostra le rotazioni di* $\pi/2$ *di vari punti* P

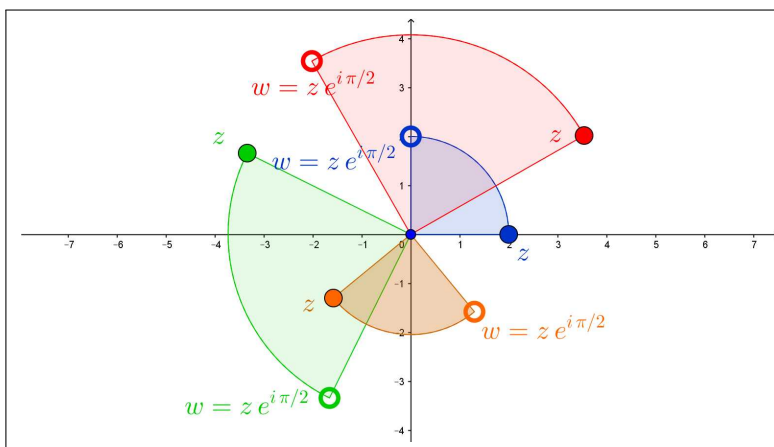



FIGURA 4. $z \quad\rightarrow\quad z\,e^{i\pi/2}$

3.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare il modulo e l'argomento di $e^{\log(2)+i\frac{\pi}{2}}$
(2) ▶▶ Determinare per quali z e^z è un immaginario puro.
(3) ▶▶ Determinare dei due numeri e^{1-2i} e e^{-1+2i} quale è più vicino all'origine.

4. Le formule di Eulero

La funzione esponenziale e^{x+iy} nel campo complesso produce, per $x=0$, le relazioni

$$\begin{cases} e^{iy} & = \cos(y)+i\sin(y) \\ e^{-iy} & = \cos(y)-i\sin(y) \end{cases}$$

dalle quali si ricavano (sommando e/o sottraendo) le relazioni

$$\cos(y)=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \quad \sin(y)=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

dette *formule di Eulero*.

Dalle formule di Eulero discendono quasi tutte le complicate relazioni trigonometriche.

Ad esempio

$$(\cos(y)+i\sin(y))\,(\cos(y)-i\sin(y))=e^{iy}\,e^{-iy}=e^0=1 \quad \to \quad \cos^2(y)+\sin^2(y)=1$$

Come pure

$$e^{i\alpha}\,e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}\to[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)]\times[\cos(\beta)+i\sin(\beta)]=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

da cui, svolgendo il prodotto e uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottengono le formule di addizione del coseno e del seno

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\beta)\sin(\alpha) \end{cases}$$

ESEMPIO 4.1. *Costruiamo, servendosi delle formule di Eulero la regola di triplicazione del coseno* $\cos(3x)$*:*

$$\cos(3x)=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}=\frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3-3\,e^{ix}\,e^{-ix}\,(e^{ix}+e^{-ix})}{2}=$$
$$=4\cos^3(x)-3\cos(x)$$

CAPITOLO 7

Le successioni

1. La convenzione degli indici

Esistono notazioni tipografiche molto usate con le quali è bene familiarizzare. La prima riguarda le file, le **successioni**, di numeri assegnati: con le notazioni

$$a_1, \quad a_2, \dots \quad a_{100}, \dots$$

si intendono rispettivamente

- a_1 il primo numero della successione,
- a_2 il secondo numero,
- a_{100} il centesimo, ecc. ecc.

ESEMPIO 1.1. *Consideriamo la successione dei numeri naturali pari*

$$\{2, 4, 6, \dots\}$$

avremo $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \dots \quad a_{100} = 200 \dots.$

Per indicare tutti i numeri di una successione si scrive, spesso, $\{a_n\}$: la notazione è particolarmente efficace nel momento in cui per assegnare una successione di numeri si assegna un'espressione per i suoi elementi $a_1, a_2, \dots a_{100}, \dots.$

Così per indicare la successione dei multipli di 7 si potranno indicare gli elementi

$$\{a_n = 7n, \quad n = 1, 2, \dots\}$$

ovvero l'intera successione semplicemente con $\{7n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

Ogni funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ che abbia dominio i naturali $\mathbb{N}$ determina una successione

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots \quad \{a_n\} = \{f(n)\}$$

Viceversa ogni successione $\{a_n\}$ determina una funzione definita sui naturali

$$f : \quad n \quad \mapsto \quad f(n) = a_n$$

Quindi, da un punto di vista teorico *successioni* e *funzioni reali definite sui naturali* sono lo stesso oggetto matematico.

ESEMPIO 1.2. *Consideriamo le successioni*

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots\}$$
$$\{b_n\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots\}$$
$$\{c_n\} = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, \dots\}$$

costruite ripetendo rispettivamente due volte, tre volte, quattro volte i naturali.

È interessante riconoscere le funzioni $a, b, c : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ *che le definiscono*

$$a(n) = 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad b(n) = 1 + \left[\frac{n-1}{3}\right], \quad c(n) = 1 + \left[\frac{n-1}{4}\right],$$

tutte costruite sulla funzione $[x]$ *parte intera.*

OSSERVAZIONE 1.3. ***Le file, le successioni, i numeri reali, la numerabilità***
La fila, la successione, più evidente e semplice è la successione

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

dei numeri naturali.

Come insieme è formato da infiniti elementi: si può porre il problema di riconoscere se ogni insieme formato da infiniti elementi possa presentarsi come una fila:

un primo elemento, un secondo, un terzo, ...

La risposta è NO ! ma la conoscenza di insiemi infiniti che non possano essere descritti con una lunghissima, infinita, fila è tutt'altro che ovvia.

L'esempio più importante è quello dell'insieme di tutti i numeri reali compresi tra 0 *e* 1, *numeri che rappresentiamo tutti in forma decimale con*

$$0, a\, b\, c\, d \dots$$

Supponiamo, per assurdo, che sia possibile disporre tutti i numeri di $[0, 1]$ *in una fila e accorgiamoci che ci sarà inevitabilmente qualche numero di* $[0, 1]$, *cioè qualche* $x = 0, \alpha\, \beta\, \gamma\, \delta \dots$ *che sfugge a tale fila:*

- *sia* $0, a_1\, b_1\, c_1\, d_1 \dots$ *il primo numero della fila, cominciamo a costruire* x *dandogli come primo decimale un* $\alpha_1 \neq a_1$
- *sia* $0, a_2\, b_2\, c_2\, d_2 \dots$ *il secondo numero della fila, continuiamo a costruire* x *dandogli come secondo decimale un* $\beta_2 \neq b_2$
- *sia* $0, a_3\, b_3\, c_3\, d_3 \dots$ *il terzo numero della fila, continuiamo a costruire* x *dandogli come terzo decimale un* $\gamma_3 \neq c_3$
- *ecc. ecc.*

Il numero $x = 0, \alpha_1\, \beta_2\, \gamma_3 \dots$ *è un numero di* $[0, 1]$ *che non si trova nella fila ipotizzata, è infatti diverso dal primo elemento, è diverso dal secondo, ecc. ecc. : la fila pertanto non esaurisce l'insieme* $[0, 1]$.

Quindi l'insieme $[0, 1]$ *ha più elementi di quanti se ne possano realizzare con una fila.*

Gli insiemi che hanno più elementi di quanti se ne possano realizzare con una fila si chiamano insiemi non numerabili.

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Esaminare se la successione $\left\{\frac{n^2}{1+n^2},\ n=1,2,\dots\right\}$ è limitata.

(2) ▶▶ Calcolare i primi 8 termini della successione $\left\{a_n = \frac{\cos(n\pi/4)}{1+n}\right\}$.

(3) ▶▶ Calcolare i primi 8 termini della successione $\left\{a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\right\}$.

2. Le successioni convergenti

Si dice che la successione $\{a_n\}$ converge al numero ℓ se

più grande è n tanto più a_n è vicino a ℓ.

Il numero ℓ ha il nome di *limite della successione* e si indica con

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Il fenomeno di avere *limite* corrisponde intuitivamente a riconoscere che i numeri a_n tendono a *stabilizzarsi* sul valore ℓ.

ESEMPIO 2.1. *Consideriamo la divisione* 2 *diviso* 3.
Dal momento che 2 *non è multiplo di* 3*, le diverse risposte dipendono dal numero di decimali con i quali lavorare*

$$0.6, \quad 0.66, \quad 0.666, \quad \dots$$

Siamo tutti giustamente sicuri che la successione così costruita differ by as little as we please *dal numero razionale* $2/3$[1].

ESEMPIO 2.2. *Siamo tutti giustamente sicuri che la successione*

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ a_4 = 1.414, .., a_{10} = 1.414213562, \dots$$

costruita tramite il noto algoritmo di radice quadrata, converge a $\sqrt{2}$.

ESEMPIO 2.3. *La successione*

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1, .., a_{10} = -1, \dots$$

non è convergente: infatti i suoi numeri che saltellano tra 1 *e* -1 *evidentemente non si stabilizzano nè su* 1 *nè su* -1 *nè tantomeno su alcun altro valore* ℓ.

Nel caso che il limite ℓ sia zero si dice che la successione è *infinitesima*.

[1] L'esempio è dato da J. Edwards nel celebre *Differential Calculus for beginners*, London 1896

ESEMPIO 2.4. *La successione $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ converge a $\ell = 1$. Infatti la differenza tra 1 e a_n vale*

$$|1 - a_n| = \frac{1}{n}$$

quantità via via più piccola al crescere di n.

2.1. Utilità della convergenza.

La convergenza è una proprietà di regolarità per una successione molto utile nelle applicazioni: così ad esempio

- sapere che la successione $\{a_n\}$ ha limite $\ell = 10$ permette di essere sicuri che i termini della successione saranno, da un certo posto in poi sicuramente maggiori di 5,
- sapere che la successione $\{a_n\}$ ha limite $\ell = 0$ permette di essere sicuri che i termini $\{a_n\}$ saranno, da un certo posto in poi sicuramente minori di 1 in modulo,
- sapere che la successione $\{a_n\}$ ha limite $\ell = 1$ permette di essere sicuri che la successione
$$b_n = \frac{1}{1 + a_n}$$
sarà convergente a $1/2$.

2.2. La definizione tecnica.

DEFINIZIONE 2.5. *I requisiti del numero ℓ di essere il limite della successione $\{a_n\}$ si esprimono in modo tecnico con la seguente proprietà*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \quad n_\varepsilon \leq n \quad \rightarrow \quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

L'espressione tecnica significa che

> ***Comunque*** *si proponga una distanza ε i numeri a_n della successione da un certo posto n_ε in poi disteranno da ℓ meno di ε.*

Si capisce facilmente che più la distanza assegnata ε è piccola più la soglia n_e dovrà, probabilmente, essere alta.

2.3. Esercizi.

(1) ►► Sia $a_n = 1 + \dfrac{1}{1+n^2}$: riconoscere che è convergente, detto ℓ il suo limite determinare da quale n_0 in poi riesce $|a_n - \ell| \leq 0.1$.

(2) ►► Sia $a_n = \dfrac{2^n}{3^n}$: riconoscere che è convergente, detto ℓ il suo limite determinare da quale n_0 in poi riesce $|a_n - \ell| \leq 0.1$.

(3) ▶▶ Sia $a_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}$: riconoscere che la nuova successione $b_n = (-1)^n a_n$ è convergente.

3. Le successioni divergenti

Tra le successioni *non convergenti* hanno particolare interesse quelle i cui termini

- diventano sempre più grandi e positivi, successioni che si dicono *divergenti positivamente* e per le quali si usa anche la grafia $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- diventano sempre più grandi e negativi, successioni che si dicono *divergenti negativamente* e per le quali si usa anche la grafia $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- diventano sempre più grandi in modulo, cioè prescindendo dal segno, successioni che si dicono *divergenti* e per le quali si usa anche la grafia $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

Quando $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si dice anche che $+\infty$ è il limite della successione $\{a_n\}$. Analogamente si dice che la successione $\{a_n\}$ ha limite $-\infty$ quando $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Si osservi che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

ma non è vero il viceversa come si riconosce pensando alla successione

$$a_n \quad = \quad (-1)^n\, n \qquad n \in \mathbb{N}$$

per la quale riesce

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

mentre la successione $\{a_n\}$ non ha limite, non diverge infatti nè positivamente nè negativamente.

La nota proprietà della divisione,

il numero uno diviso numeri grandi produce quozienti piccoli
il numero uno diviso numeri piccoli produce quozienti grandi

permette di riconoscere le due Proposizioni seguenti:

PROPOSIZIONE 3.1. *Se la successione $\{a_n\}$ è divergente, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, la successione*

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

è infinitesima.

PROPOSIZIONE 3.2. *Se la successione* $\{a_n\}$ *è infinitesima la successione*

$$b_n = \frac{1}{|a_n|}$$

ove definibile, $a_n \neq 0$*, è divergente.*

DEFINIZIONE 3.3. *Le successioni convergenti, quelle divergenti positivamente e quelle divergenti negativamente si dicono successioni regolari o successioni dotate di limite finito o infinito.*

ESEMPIO 3.4. *La successione* $\{1, 2, 3, \dots\}$*, divergente positivamente è regolare e il suo limite è* $+\infty$*.*

La successione $\{1, -1, 1, 1, -1, \dots\}$ *non è regolare.*

3.1. Successioni divergenti famose.

La successione divergente più famosa è quella $\{1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali stessi.

È divergente anche quella dei quadrati $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$.

È interessante sottolineare una sorta di ordinamento tra successioni divergenti, ordinamento fondato sulla *rapidità* con cui esse divergono,

$$\{\log(\sqrt{n})\}, \quad \{\log(n)\}, \quad \{\sqrt{n}\}, \quad \{n\}, \quad \{n^2\}, \quad \{2^n\}, \quad \{n!\}^{[2]}, \quad \{n^n\}, \dots$$

dichiarando che una successione divergente $\{a_n\}$ diverge *più rapidamente* di un'altra $\{b_n\}$ se il loro quoziente $\{a_n/b_n\}$ diverge anch'esso.

Così, ad esempio, la successione $\{n^n\}$ diverge *più rapidamente* della $\{2^n\}$ in quanto il quoziente

$$\left\{\frac{n^n}{2^n}\right\} \quad \to \quad +\infty$$

ESEMPIO 3.5. *Per ogni* $\in \mathbb{N}$ *riesce* $n^n \geq n!$

La prima cosa da verificare, avanti a qualunque affermazione che coinvolga tutti i numeri naturali è verificarla sui più piccoli naturali, sui quali la verifica è certamente più facile.

Così si riconosce che

$$1^1 \geq 1!, \quad 2^2 \geq 2!, \quad 3^3 \geq 3!, \quad 4^4 \geq 4!$$

Da questi primi successi a concludere che la proprietà proposta (in questo caso la disuguaglianza $n^n \geq n!$*) sia vera per tutti gli infiniti naturali ci passa...!*

Il procedimento tecnico più efficace è ***l'induzione****.*

Si tratta di provare che:

[2] $n! = n(n-1)\dots3.2.1$

- *la proprietà sia vera per il primo dei naturali, $n = 1$,*
- *provare che se la proprietà è vera per un **qualsiasi** naturale n è di conseguenza vera anche per il successivo $n+1$.*

Il secondo passo è quello determinante: infatti dall'essere la proprietà vera per $n = 1$ seguirà che è vera per $n = 2$, dall'essere vera per $n = 2$ seguirà che è vera per $n = 3$, ecc. ecc.

Verifichiamo il passo 2: supponiamo che

$$n_0^{n_0} \geq n_0!$$

e occupiamoci della conseguente validità (o meno) della disuguaglianza successiva.

Osserviamo che

$$(n_0+1)^{n_0+1} = (n_0+1)(n_0+1)^{n_0} \geq (n_0+1)n_0^{n_0} \geq (n_0+1)\,n_0! = (n_0+1)\,!$$

ovvero

$$n_0^{n_0} \geq n_0! \quad \rightarrow \quad (n_0+1)^{n_0+1} \geq (n_0+1)\,!$$

Cioè la disuguaglianza proposta dall'essere vera al livello n_0 è di conseguenza vera per il livello successivo n_0+1 ...

... quindi non finisce mai di essere vera !

3.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $a_n = \sqrt{n} - n$: determinare i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$$

(2) ▶▶ Sia $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$: determinare i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} n^2\, a_n$$

(3) ▶▶ Sia $a_n = n - \dfrac{n^2}{1+n}$: determinare i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n\, a_n$$

4. Proprietà di una successione

- **Limitatezza** : si dice che la successione $\{a_n\}$ è limitata se tutti i suoi numeri sono contenuti in uno stesso intervallo $[m, M]$.

ATTENZIONE: Una successione limitata non è necessariamente una successione dotata di limite: la somiglianza delle due espressioni italiane *limitata* e *dotata di limite* è ... una sciagura linguistica!

Nella lingua inglese le successioni limitate sono dette *bounded*, quelle che hanno limite, sono dette *convergent*, parole ben diverse per proprietà diverse.

ESEMPIO 4.1. *La successione* $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ *è limitata ma non è dotata di limite.*

- **Monotonia** : si dice che la successione $\{a_n\}$ è monotòna (attenti all'accento[3].) se succede una delle due situazioni:
  - i numeri a_n crescono sempre al crescere di n:

$$a_1 \leq a_2, \quad a_2 \leq a_3, \dots a_n \leq a_{n+1}$$

  - i numeri a_n calano sempre al crescere di n:

$$a_1 \geq a_2, \quad a_2 \geq a_3, \dots a_n \geq a_{n+1}$$

Nel primo caso la successione si dice *crescente*, nel secondo *decrescente*.

OSSERVAZIONE 4.2. *Dove si incontrano successioni crescenti ? O come si producono ?*

Si tratta di un procedimento molto semplice e comune:

- *si prende una fila (una successione)* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ *di numeri positivi,*
- *si considerano le somme parziali*

$$a_1 = \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad a_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \dots \quad a_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

È evidente che $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$.

Incontreremo questo procedimento quando avremo occasione di occuparci di serie a termini positivi.

TEOREMA 4.3. *Le successioni convergenti sono limitate (bounded) .*

DIMOSTRAZIONE. Scelto $\varepsilon = 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \to \quad \exists n_1 : \quad \forall n_1 \leq n \quad a_n \in [\ell - 1, \ \ell + 1]$$

[3]In un certo senso l'aggettivo *monotono*, quasi sinonimo di *poco variato, noioso,...* nella lingua parlata è in accordo con il significato matematico di *monotòna*, che indica *...sempre uno stesso andamento...* a crescere o a calare.

Quindi i termini della successione, escludendo al più i primi n_1 stanno nell'intervallo $[\ell - 1,\ \ell + 1]$.

I primi n_1 del resto, un numero finito, saranno certamente contenuti in un intervallo $[A, B]$.

Quindi tutti i termini della successione stanno nell'insieme unione

$$[\ell - 1,\ \ell + 1] \cup [A, B]$$

insieme unione di due intervalli limitati, quindi certamente limitato.

□

OSSERVAZIONE 4.4. *Il precedente Teorema è usato frequentemente in negativo: osservato cioè che una successione non è limitata se ne deduce che certamente non è convergente !*

5. Il teorema dei carabinieri

TEOREMA 5.1 (Il teorema dei carabinieri). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni per le quali accada che*

- $\forall n : \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n$

allora riesce anche

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. La prima condizione dice che i numeri b_n stanno stretti tra i due a_n e c_n (*come l'arrestato, b_n ad ogni passo n, sta stretto tra i due carabinieri a_n e c_n*).

La seconda condizione dice che i numeri a_n e c_n si *stabilizzano* sullo stesso valore ℓ (*i due carabinieri, passo dopo passo, si dirigono entrambi alla prigione*)

La conclusione è che i numeri b_n, stretti tra a_n e c_n, non possono fare altrimenti che stabilizzarsi anch'essi su ℓ (*l'arrestato, stretto (...costretto...) tra i due carabinieri, non può che dirigersi, passo dopo passo, anche lui alla prigione*).
Si osservi che il Teorema vale sia nel caso che ℓ sia finito, sia nel caso di $\ell = \pm\infty$. □

OSSERVAZIONE 5.2. *Il precedente teorema dei carabinieri è l'esempio più evidente di valutazione di una successione confrontandola con altre di cui si hanno informazioni.*

Se, per esempio sapessimo che $a_n \geq b_n$ e sapessimo che la successione b_n converge a 10 avremmo ovviamente l'informazione che se a_n converge il suo limite ℓ non potrà che essere anche lui maggiore o uguale a 10.

TEOREMA 5.3. *Se* $\forall n: \ a_n \leq b_n$ *e se le due successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *convergono rispettivamente a* A *e a* B *allora* $A \leq B$.

Viceversa se $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *convergono rispettivamente a* A *e a* B *e riesce* $A < B$ *(minore stretto) allora si ha* $\forall n \geq n_0: \quad a_n < b_n$*, cioè la disuguaglianza stretta tra i due limiti viene soddisfatta definitivamente anche dai termini delle due successioni.*

OSSERVAZIONE 5.4. *Risultati del tipo del precedente teorema sono detti permanenza del segno .*

6. Il criterio del rapporto

TEOREMA 6.1 (Il criterio del rapporto.). *Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri positivi, e sia*

$$\lambda \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $\lambda \in [0,1)$ *la successione* $\{a_n\}$ *ha limite zero (è infinitesima)*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per semplicità che tutti i rapporti verifichino la disuguaglianza

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2}$$

allora

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq \left(\frac{1}{2}\right) a_1, \\
&a_3 \leq \left(\frac{1}{2}\right) a_2 \quad \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_1 \\
&a_4 \leq \left(\frac{1}{2}\right) a_3 \quad \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_1 \\
&\dots
\end{aligned}$$

ovvero

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1 \tag{14}$$

da cui l'asserto per il Teorema dei Carabinieri.
Osserviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1 \quad \to \quad \forall n \geq n_\rho : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1$$

cioè la disuguaglianza per i rapporti si realizza anzichè dal primo rapporto da un certo posto n_ρ in poi: il risultato (14) anche si realizzerà da n_ρ in poi, conducendo comunque allo stesso risultato:

$$0 \leq a_n \leq \rho^{n-n_\rho-1} a_\rho \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

COROLLARIO 6.2. *Se*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

la successione è divergente.

Se invece $\lambda = 1$ la successione può essere sia convergente che divergente: in altri termini il risultato

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

non permette di individuare il carattere della successione.

ESEMPIO 6.3. *La successione costante $a_n \equiv 17$ è convergente e riesce $\lambda = 1$, mentre la successione divergente $a_n = n$ produce anch'essa $\lambda = 1$.*

6.1. Le successioni geometriche. Diamo questo nome alle successioni

$$\{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots\} \quad \{a_n = \rho^n\}$$

formate dalle potenze di uno stesso numero ρ assegnato che prende il nome di *base* della successione.

È facile riconoscere che a seconda della scelta della base ρ la successione geometrica che ne deriva è o meno convergente.

$$\begin{cases} \rho \in (-1,1) & \to \quad \lim \rho^n = 0 \\ \rho = 1 & \to \quad \lim \rho^n = 1 \\ \rho > 1 & \to \quad \{\rho^n\} \quad \textit{diverge} \quad \textit{positivamente} \\ \rho \le -1 & \to \quad \{\rho^n\} \quad \textit{non} \quad \textit{converge} \end{cases}$$

Il criterio del rapporto infatti presenta, per $\rho > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

da cui:

$$\begin{cases} 0 < \rho < 1 & \to \quad \textit{convergenza} \\ \rho > 1 & \to \quad \textit{divergenza} \end{cases}$$

I casi di $\rho < 0$, nei quali i termini della successionme geometrica presentano segni alterni, si riconoscono facilmente osservando i loro moduli

$$a_n = \rho^n \quad \to \quad |a_n| = |\rho|^n$$

da cui è evidente che

$$\begin{aligned} \rho \le -1 \quad & \to \quad \text{non convergenza} \\ -1 < \rho \le 0 \quad & \to \quad \text{convergenza a zero} \end{aligned}$$

7. Il teorema di convergenza monotona

Al di fuori dei casi particolari di espressioni molto semplici (per intendersi quelle che trovate nei comuni eserciziari) è assai difficile poter decidere che una successione sia convergente.

Il risultato più generale disponibile è offerto dal seguente

TEOREMA 7.1. *Tutte le successioni* ***limitate e monotone*** *sono convergenti.*

7.1. Due successioni monotone importanti.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

- La prima $\{a_n\}$ è **crescente:**

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

  dove è stata usata la nota disuguaglianza di Bernouilli $(1+x)^n \geq 1+nx$ valida per $|x| \leq 1$, prendendo $x = -1/n^2$, da cui

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \quad \to \quad a_{n-1} \leq a_n.$$

- La seconda $\{b_n\}$ è **decrescente**

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

  Tenuto conto che, sempre per la nota disuguaglianza di Bernouilli si ha

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \quad \to \quad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n \leq 1$$

  ne segue

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1 \quad \to \quad b_n \leq b_{n-1}$$

7.2. Il numero *e* di Nepero. L'applicazione più importante dei teoremi dei carabinieri (pagina 103) e della convergenza monotona (pagina 106) riguarda la convergenza della successione

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

precedentemente considerata, vedi pagina 106, e riconosciuta crescente.

$$\begin{cases} a_1 & = 2 \\ a_2 & = \dfrac{9}{4} \\ a_3 & = \dfrac{64}{27} \\ a_4 & = \dfrac{625}{256} \\ a_5 & = \dfrac{7776}{3125} \\ a_6 & = \dfrac{117649}{46656} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 & = 2. \\ a_2 & = 2.25 \\ a_3 & = 2.37037 \\ a_4 & = 2.44141 \\ a_5 & = 2.48832 \\ a_6 & = 2.52163 \end{cases}$$

Tenuto conto che la successione $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente ed è una maggiorante della $\{a_n\}$ si ha

$$2 = a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq \cdots \leq b_1 = 4$$

ne segue che la successione $\{a_n\}$

- limitata: $a_n \in [2, 4]$
- crescente (pagina 106)

è convergente.

Il suo limite è il famoso numero e di Nepero

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828182845904523536028747135 27....$$

che ha un ruolo centrale nel calcolo, paragonabile a quello di π.

A titolo di informazione:

- e è irrazionale,
- e non è radice di nessun polinomio a coefficienti interi.

La seconda proprietà attribuisce a e un *grado di irrazionalità* più alto di quello di $\sqrt{2}$ numero che invece è radice di $x^2 - 2 = 0$.

7.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Siano $\alpha_k = 1 - \sin(k)$, $k = 1, 2, \ldots$: posto $a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, $n \in \mathbb{N}$ scrivere i primi 5 termini $a_1, \ldots, a_5$ e riconoscere che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente.

(2) ▶▶ Riconoscere che la successione $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ è monotona crescente.

(3) ▶▶ Riconoscere che la successione $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{1+3^n}$ è limitata.

8. Operazioni razionali sulle successioni

Prese due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ si possono tramite esse, costruirne altre mediante le ordinarie operazioni razionali

$$\{a_n + b_n\}, \quad \{a_n b_n\}, \quad \{\alpha a_n + \beta b_n\}, \quad \ldots$$

Se le due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono convergenti cosa può dirsi di quelle costruite tramite esse con le ordinarie operazioni razionali ?

E se le due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ fossero divergenti ?

8.1. Somme, differenze, ... Le risposte sono semplicissime per quanto riguarda le combinazioni lineari $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ di due successioni convergenti:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = A \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = B \end{cases} \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

Infatti

$$|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| \leq |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B|$$

e quindi se le due distanze $|a_n - A|$ e $|b_n - B|$ divengono al crescere di n sempre più piccole altrettanto potrà dirsi della distanza $|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)|$.

Altrettanto semplice è il caso in cui una delle due $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sia divergente e l'altra sia limitata (*bounded*).

Anche il caso di $\alpha > 0$, $\beta > 0$, con a_n e b_n che divergono entrambe positivamente è semplice: altrettanto divergenti positivamente saranno αa_n, βb_n e, quindi anche la loro somma $(\alpha a_n + \beta b_n)$.

Molto meno ovvio è il caso in cui a_n e b_n siano divergenti una positivamente e l'altra negativamente: se αa_n e βb_n diventano entrambi grandi cosa attendersi della loro differenza ?

ESEMPIO 8.1. *Siano*

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \{b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

la prima divergente positivamente, la seconda negativamente: la loro somma

$$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$$

è (ovviamente) convergente a zero.

Siano

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \{b_n\} = \{-2, -4, -6, \dots\}$$

la prima divergente positivamente, la seconda negativamente: la loro somma

$$\{a_n + b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

è (ovviamente) divergente negativamente.

La combinazione lineare di due successioni divergenti presenta il primo caso di *forma indeterminata*: espressione che significa che la divergenza delle due successioni a_n e b_n **non determina** proprietà analoghe per la $\{a_n + b_n\}$.

8.2. Prodotti.

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = A \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = B \end{cases} \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} (a_n \,.\, b_n) = A \,.\, B$$

Infatti

$$|a_n \,.\, b_n \, - \, A \,.\, B| = |a_n \,.\, b_n \, - \, a_n B + a_n B - A \,.\, B| \leq |a_n|\,|b_n - B| + B\,|a_n - A|$$

Visto che

- $\{a_n\}$ è convergente quindi è limitata $|a_n| \leq M$ e allora il termine $|a_n|\,|b_n - B| \leq M|b_n - B|$ diventa piccolo al crescere di n,
- analogamente $B\,|a_n - A|$ diventa piccolo al crescere di n

si riconosce che il prodotto di due successioni convergenti è convergente.

OSSERVAZIONE 8.2. *Il prodotto di due successioni, una infinitesima e una divergente presenta una forma indeterminata nello stesso senso detto sopra: le proprietà delle due successioni fattori* ***non determina*** *proprietà analoghe per il prodotto.*

ESEMPIO 8.3. *Siano* $\{a_n = \frac{1}{n}\}$ *infinitesima e* $\{b_n = n\}$ *divergente.*

La successione prodotto $\{a_n \,.\, b_n = \frac{1}{n} \,.\, n \equiv 1\}$ *è convergente.*

Siano $\{a_n = \frac{1}{n}\}$ *infinitesima e* $\{b_n = n^2\}$ *divergente.*

La successione prodotto $\{a_n \,.\, b_n = \frac{1}{n} \,.\, n^2 = n\}$ *è divergente.*

8.3. Quozienti. Discorso analogo ai prodotti con la difficoltà aggiuntiva per quanto concerne $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ del noto undicesimo comandamento

... non dividerai per zero !

8.4. Una parziale gestione delle forme indeterminate.

$$\infty - \infty \qquad 0\,.\,\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Chi vince tra i due ?

Le risposte sono ottenute per esperienza. Gli esempi successivi mostrano un ragionevole elenco di situazioni standard, esempi nei quali si fa uso sia del teorema dei carabinieri, del criterio del rapporto e del teorema di convergenza monotona.

ESEMPIO 8.4. $\{a_n = n\}, \quad \{b_n = n^2\}, \quad \{a_n - b_n = n - n^2\}$:

$$a_n - b_n = n\,.\,(1-n) \quad \to \quad -\infty$$

L'esempio precedente consente di valutare il limite di qualunque successione

$$a_n = \alpha n^m + \beta n^{m-1} + \ldots + \gamma$$

i cui termini siano espressi da un polinomio: si tratta di successioni divergenti positivamente se il coefficiente della potenza più alta è positivo, negativamente nell'altro caso.

ESEMPIO 8.5. $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$:

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \quad \to \quad \frac{1}{2}$$

Come nel caso precedente si può riconoscere che le successioni espresse in forma razionale:

- sono infinitesime se il grado del polinomio a numeratore è più basso del grado di quello a denominatore,
- sono convergenti se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, e il limite è il quoziente dei due coefficienti di grado massimo,
- sono divergenti (positivamente o negativamente) se il grado del polinomio a numeratore è più alto del grado di quello a denominatore.

ESEMPIO 8.6. $\boxed{a_n = \dfrac{1+n}{3^n}:}$

Tenuto conto che $3^n = (1+2)^n \geq 1+2n$ *si ha intanto che*

$$\frac{1+n}{3^n} \leq \frac{1+n}{1+2n} \leq 1$$

ovvero la limitatezza.

La convergenza si ricava da un esame più approfondito dell'esponenziale 3^n*: si sa infatti che* $3^n = (1+2)^n \geq 1+2n+\binom{n}{2}2^2 = 1+2n+2n(n-1) = 1+2n^2$ *e quindi*

$$0 \leq \frac{1+n}{3^n} \leq \frac{1+n}{1+2n^2}$$

Il teorema dei carabinieri assicura che $\lim a_n = 0$.

ESEMPIO 8.7. $\{a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Pertanto

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Teorema dei carabinieri....

$$\lim a_n = 0$$

ESEMPIO 8.8. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n(n-1)\dots 321}{nn\dots n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{2}{n}\frac{1}{n} \leq 1\,1\dots\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Ne segue

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

Teorema dei carabinieri....

$$\lim a_n = 0$$

ESEMPIO 8.9. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x},\ x > 1$

$$\sqrt[n]{x} = 1 + h_n \quad \Leftrightarrow \quad x = (1+h_n)^n > 1 + n\,h_n \quad \to \quad 0 < h_n < \frac{x-1}{n}$$

$$\to \quad \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1$$

ESEMPIO 8.10. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x},\ 0 < x < 1$

Il caso $0 < x < 1$ *si tratta analogamente osservando che*

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/x}} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

Il caso $x = 1$ *è evidente:* $\sqrt[n]{x} \equiv 1$.

OSSERVAZIONE 8.11. ***L'esperimento con la calcolatrice***
La calcolatrice tascabile ha certamente il tasto $\boxed{\sqrt{\ }}$ *che produce la radice quadrata: iterandolo più volte si ottengono le radici quarte, ottave, ecc.*

Provate a scrivere un numero x e a premere successivamente più volte il tasto di radice:
i numeri che si generano sono

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}, \dots$$

Essi sono una sottosuccessione della $\sqrt[n]{x}$ *che abbiamo riconosciuto essere convergente a* 1.
Potete assistere direttamente, sul visore della calcolatrice, allo stabilizzarsi su 1.

ESEMPIO 8.12. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n}, \quad x > 1, \quad p \in \mathbb{N}$

Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^p}{x^{n+1}}}{\frac{n^p}{x^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \frac{1}{x} = \frac{1}{x} < 1$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0$$

ESEMPIO 8.13. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 0$

Sia $[\log(n)]$ *la parte intera di* $\log(n)$ *si ha*

$$[\log(n)] \quad \leq \quad \log(n) \quad \leq \quad [\log(n)] + 1$$

$$n^\alpha = e^{\alpha \log(n)} = (e^\alpha)^{\log(n)} \quad \to \quad (e^\alpha)^{[\log(n)]} \leq n^\alpha \leq (e^\alpha)^{[\log(n)]+1}$$

Indicati per semplicità con $m = [\log(n)],\ x = e^\alpha$ *si ha*

$$\frac{m}{x^{m+1}} \leq \frac{\log(n)}{n^\alpha} \leq \frac{m+1}{x^m} \quad \to \quad \frac{1}{x}\,\frac{m}{x^m} \leq \frac{\log(n)}{n^\alpha} \leq x\,\frac{m+1}{x^{m+1}}$$

Tenuto conto che $n \to \infty \quad \to \quad m \to \infty$ *e che*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{x^m} = 0$$

discende, per il Teorema dei Carabinieri che anche

$$\forall \alpha > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha} = 0$$

ESEMPIO 8.14. $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \geq 0}$

Utilizziamo ancora il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

Ne segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

8.5. Esercizi.

(1) ►► Tenuto presente che $a_n \leq e \leq b_n$ essendo $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ le successioni monotone di pagina 106 maggiorare le differenze

$$|a_2 - e|, \ |a_4 - e|, \ |a_{10} - e|$$

(2) ►► Provare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ è convergente a e^3.

(3) ►► Provare che la successione $a_n = \frac{e^n}{1+e^n}$ è convergente.

(4) ►► Sia $a_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2^n}\right)^n$: verificare che $\{a_n\}$ è
- limitata.
- crescente

e che, quindi è convergente.

(5) ►► Sia $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$: verificare che $\{a_n\}$ è limitata.

(6) ►► Sia $a_n = (-1)^n n$: verificare che $b_n = \frac{1}{a_n}$ è convergente.

9. Successioni ricorsive

Le successioni possono essere generate in maniera *ricorsiva*:

- si assegna il primo termine a_1
- si calcola il secondo termine a_2 operando su a_1 con una certa regola,
- si calcola il terzo termine a_3 operando su a_2 con la stessa regola precedente,
- così procedendo si determinano, di passo in passo, tutti i numeri a_n.

ESEMPIO 9.1. *Supponiamo* $a_1 = 0.5$ *e supponiamo che la regola sia la seguente*

$$a_2 = 3\,a_1\,(1-a_1), \quad a_3 = 3\,a_2\,(1-a_2), \quad \dots a_{n+1} = 3\,a_n\,(1-a_n), \dots$$

Riesce

$$a_1 = 0.5,\; a_2 = 0.75,\; a_3 = 0.5625,\; a_4 = 0.738281,\; a_5 = 0.579666,\; a_6 = 0.73096, \dots$$

È certamente difficile prevedere se la successione che stiamo costruendo sarà o meno convergente.

OSSERVAZIONE 9.2. *Il procedimento di costruzione ricorsiva di una successione è quello già proposto in termini di funzioni iterate:*

$$a_1, \quad a_2 = f^{(1)}(a_1), \quad a_3 = f^{(2)}(a_1), \quad \dots, \quad a_{n+1} = f^{(n)}(a_1), \dots$$

ESEMPIO 9.3. *Un esperimento con una normale calcolatrice tascabile:*

- *supponiamo di disporre di una calcolatrice che, ad esempio, abbia il tasto* cos *che consente di calcolare il coseno di un numero, e supponiamo di aver settato la scelta di lavorare in radianti,*
- *scriviamo, sulla calcolatrice, un numero a,*
- *premiamo il tasto* cos*: sul visore comparirà il numero* $\cos(a)$*,*
- *premiamo di nuovo il tasto* cos*: sul visore comparirà il numero* $\cos[\cos(a)] = \cos^{(2)}(a)$
- *continuando a premere il tasto* cos *più volte sul visore compariranno successivamente*

$$\cos^{(3)}(a), \quad \cos^{(4)}(a), \quad \cos^{(5)}(a), \quad \dots$$

È interessante notare come, indipendentemente dal valore scelto inizialmente la successione $\{\cos^{(n)}(a)\}$ *mostri di convergere ad un numero* $\ell \approx 0.739085$*, numero che verifica l'equazione* $\ell = \cos(\ell)$*.*

9.1. Una successione ricorsiva.

Consideriamo la successione

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1+\sqrt{1}, \quad a_3 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad a_4 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \dots$$

che si definisce ricorsivamente come

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1+\sqrt{a_n}$$

Osserviamo che

- i suoi termini sono certamente tutti numeri maggiori o uguali a 1,
- si tratta di una successione crescente: $a_2 > a_1$,

$$\begin{cases} a_{n+2} = 1 + \sqrt{a_{n+1}} \\ \\ a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} \end{cases} \quad \to \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}$$

  da cui si riconosce che

$$a_{n+1} > a_n \quad \to \quad \sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{a_n} \quad \to \quad a_{n+2} > a_{n+1}$$

  da cui, per induzione il carattere crescente della successione,
- si ha $a_1 \leq 3$ e se $a_n \leq 3$ ne segue che $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} \leq 1 + \sqrt{3} \leq 3$ e quindi per induzione

$$\forall n: \quad a_n \leq 3$$

La successione $\{a_n\}$, monotona e limitata è quindi convergente.

Detto ℓ il suo limite si ha certamente

$$a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1 + \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} \quad \to \quad \ell = 1 + \sqrt{\ell}$$

Da cui

$$\ell - 1 = \sqrt{\ell} \quad \to \quad (l-1)^2 = \ell \quad \to \quad \ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

9.2. Esercizi.

(1) ►► Sia $\{a_n\}$ la successione ricorsiva

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Posto $b_n = a_n - 2$ determinare l'espressione ricorsiva della $\{b_n\}$.

(2) ►► Scrivere i primi 5 termini della successione ricorsiva

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 2a_n^2,$$

e determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) ►► Sia $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad$ determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

10. La successione di Fibonacci

La proposta precedente, dare il primo numero a_1 e dedurre tutti i successivi applicando una regola, non è l'unico procedimento possibile.

Si potrebbe infatti

- assegnare i primi due elementi a_1 e a_2,
- dedurre il terzo a_3 applicando una certa regola che coinvolga a_1 e a_2,
- dedurre il quarto a_4 con la stessa regola precedente applicata ad a_2 e a_3,
- e così via determinando ogni elemento a_n con la stessa regola applicata ai due precedenti.

La successione di Fibonacci (celebrata in tante occasioni) corrisponde alla proposta precedente: $a_1 = 1,\ a_2 = 1$

$$\begin{cases} a_3 & = a_1 + a_2 & = 2 \\ a_4 & = a_2 + a_3 & = 3 \\ a_5 & = a_3 + a_4 & = 5 \\ \dots \\ a_{20} & = a_{18} + a_{19} & = 6765 \\ \dots \end{cases}$$

È abbastanza evidente che la successione di Fibonacci è divergente positivamente.

10.1. Una relazione tra Fibonacci pari e Fibonacci dispari.

Posto $a_0 = 0$ si ha

$$\begin{array}{lllll} a_2 & = a_1 \\ a_4 & = a_3 + a_2 & = a_3 + a_1 \\ a_6 & = a_5 + a_4 & = a_5 + a_3 + a_2 & = a_5 + a_3 + a_1 \\ a_8 & = a_7 + a_6 & = a_7 + a_5 + a_4 & = a_7 + a_5 + a_3 + a_2 & = a_7 + a_5 + a_3 + a_1 \end{array}$$

Si può provare, per induzione, che

$$a_{2m} = a_{2m-1} + a_{2m-3} + \ldots + a_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{2i-1} \tag{15}$$

Infatti:

- per $m = 1$ la relazione è stata riconosciuta $a_2 = a_1$,
- supposta vera la relazione per m_0 si ha

  $$a_{2(m_0+1)} = a_{2m_0+1} + a_{2m_0} = a_{2m_0+1} + a_{2m_0-1} + a_{2m_0-3} + \ldots + a_1$$

  ovvero

  che riconosce come la relazione sia di conseguenza vera anche per il livello $m_0 + 1$ successivo.

Quindi la relazione (15) è bvera per ogni m-

10.2. Sempre sulla Fibonacci.

Si possono cercare espressioni $a_n = \lambda^n$ diverse che soddisfino la relazione di Fibonacci

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$$

Raccolto λ^n a fattor comune, basta scegliere λ tale che

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

e quindi

$$\left\{\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}, \quad \left\{\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}$$

Per linearità è facile riconoscere che per ogni α e β anche le successioni

$$a_n = \alpha\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n, \quad b_n = \beta\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n$$

soddisfano la relazione di Fibonacci e, per linearità la soddisfano anche le somme

$$c_n = \alpha\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n + \beta\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n$$

Non solo, ma, servendosi delle due costanti arbitrarie α e β si possono costruire successioni c_n che verifichino condizioni iniziali $c_0 = A$ e $c_1 = B$ del resto a piacere. Basta scegliere α e β che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right) + \beta\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right) = B \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = \dfrac{A-2B}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{10}\left(\sqrt{5}A + 5A - 2\sqrt{5}B\right), \qquad \beta = \frac{1}{10}\left(-\sqrt{5}A + 5A + 2\sqrt{5}B\right)$$

11. La successione "Look and say"

La successione "Look and say" è una curiosa successione di interi definiti ricorsivamente con il procedimento *Look and say* che corrisponde a

guarda e descrivi

Sia $a_1 = 1$:

Domanda: cosa vedi in a_1?
Risposta : vedo un uno.

Allora scrivi $a_2 = 11$

Domanda: cosa vedi in a_2?
Risposta : vedo due uno.

Allora scrivi $a_3 = 21$

Domanda: cosa vedi in a_3?
Risposta : vedo un due e un uno.

Allora scrivi $a_4 = 1211$

Domanda: cosa vedi in a_4?
Risposta : vedo un uno un due e due uno.

Allora scrivi $a_5 = 111221$

ecc. ecc.

$$\{a_n\} = \{1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, .\}$$

È del tutto evidente che tale successione non è limitata: è tuttavia tutt'altro che banale valutare se essa sia o meno crescente, cioè se $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n < a_{n+1}$.

Come altrettanto complesso è decidere se il numero L_n di cifre che formano gli a_n formi una successione L_n crescente.

11.1. Esercizi.

(1) ►► Sia
$$a_1 = 0,\; a_2 = 10,\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$
scrivere i primi 5 termini di indice pari e i primi 5 termini di indice dispari.

(2) ►► Verificare che la precedente successione $\{a_n\}$ coincide con la seguente
$$\alpha_n = \frac{20}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
e quindi dedurre il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) ►► Determinare $\rho \in \mathbb{R}$ in modo che la successione $\{\rho^n\}$ verifichi la relazione ricorsiva $\rho^{n+2} = 3\rho^{n+1} - 2\rho^n$.

12. Esercizi di ricapitolazione

(1) ►► Sia $a_n = 1 + \dfrac{1}{1+n^2}$: riconoscere che è convergente, detto ℓ il suo limite determinare da quale n_0 in poi riesce $|a_n - \ell| \le 0.1$.

(2) ►► Riconoscere che la successione $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{1+3^n}$ è limitata.

(3) ►► Sia $a_n = \dfrac{2^n}{3^n}$: riconoscere che è convergente, detto ℓ il suo limite determinare da quale n_0 in poi riesce $|a_n - \ell| \le 0.1$.

(4) ►► Sia $a_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}$: riconoscere che la nuova successione $b_n = (-1)^n a_n$ è convergente.

(5) ▶▶ Sia $a_n = \sqrt{n} - n$: determinare i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$$

(6) ▶▶ Sia $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$: determinare i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 a_n$$

(7) ▶▶ Provare che la successione $a_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$ è convergente.

(8) ▶▶ Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$$

(9) ▶▶ Sia $a_n = 4 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$: verificare che $\{a_n\}$ è

- limitata.
- crescente

e che, quindi è convergente.

(10) ▶▶ Sia $a_n = (-1)^n n$: verificare che $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ è convergente.

(11) ▶▶ Sia $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad$ determinare il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(12) ▶▶ Sia

$$a_1 = 0,\ a_2 = 10,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

scrivere i primi 5 termini.

(13) ▶▶ Verificare che la precedente successione $\{a_n\}$ coincide con la seguente

$$\alpha_n = \frac{20}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

e quindi dedurre il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(14) ▶▶ Determinare $\rho \in \mathbb{R}$ in modo che la successione $\{\rho^n\}$ verifichi la relazione ricorsiva $\rho^{n+2} = 3\rho^{n+1} - 2\rho^n$.

(15) ▶▶ Scrivere i primi 5 termini della successione ricorsiva

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 2a_n^2,$$

e determinare il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(16) ▶▶ Sia $\{a_n\}$ la successione ricorsiva

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Posto $b_n = a_n - 2$ determinare l'espressione ricorsiva della $\{b_n\}$.

CAPITOLO 8

La statistica

1. Statistica descrittiva

La Tabella seguente mostra i risultati ottenuti ripetendo 50 volte il seguente esperimento:

- lanciare dieci voltre una moneta,
- registrare il numero di volte che si è ottenuto *TESTA*

4	6	7	3	6	3	5	7	6	6
3	4	4	5	8	6	5	2	6	3
7	7	4	4	3	0	8	5	4	4
6	2	8	2	6	7	5	5	5	4
9	5	2	3	2	9	5	6	7	4

I passi che si compiono a fronte di una raccolta di dati, cioè di una statistica, sono rivolti a rendere il lavoro più comprensibile: questo si ottiene con strategie diverse, grafiche e numeriche,

- si determina la distribuzione delle frequenze assolute e si disegna il relativo istogramma,
- si determina la distribuzione delle frequenze relative e si disegna la torta corrispondente,
- si calcolano alcuni parametri numerici collegati (valor medio, deviazione standard,...)

I dati raccolti nella tabella precedente consistono negli 11 risultati $\{0, 1, 2, \dots 10\}$ possibili per l'esperimento: le frequenze assolute, cioè il numero di volte che ciascun risultato è stato ottenuto è riportato qui di seguito

$risultati$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$frequenze$	1	0	5	5	9	10	9	6	3	2	0

Naturalmente la somma delle frequenze assolute è 50, il numero di volte in cui l'esperimento è stato effettuato.

Il relativo istogramma è

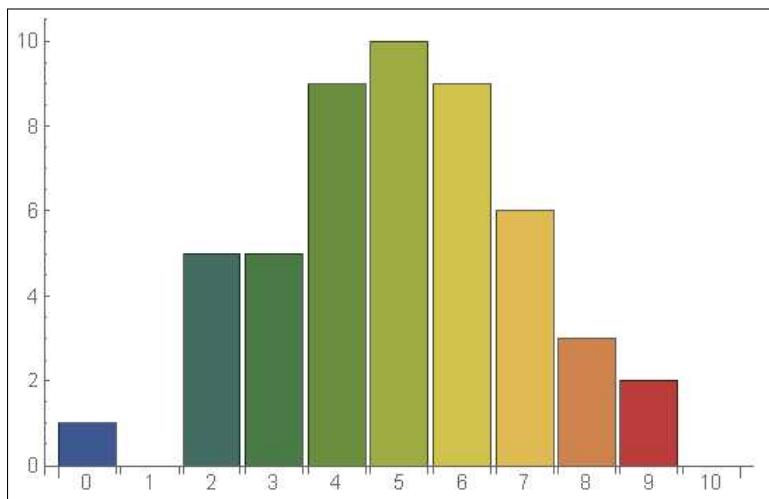



FIGURA 1. L'istogramma delle frequenze

Una indagine analoga può riguardare le frequenze relative, cioè le percentuali di volte con cui ciascun risultato è stato ottenuto: detta n_i la frequenza assoluta del risultato i la frequenza relativa è n_i/N essendo N il numero di esperimenti eseguiti, nel nostro caso $N = 50$

risultati	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequenze	2%	0%	10%	10%	18%	20%	18%	12%	6%	4%	0%

Naturalmente la somma delle frequenze relative da 1.

La rappresentazione grafica delle frequenze relative si esprime in genere con i *diagrammi a torta*

I colori corrispondono ai diversi valori ottenuti: l'ampiezza dei settori circolari corrisponde alle frequenze relative.

Si vede bene come al risultato 5 sia stato attribuito il colore verde chiaro e lo spicchio verde chiaro nella torta sia il più ampio, corrispondente al 20%, un quinto di tutta la torta, vedi Figura 2.

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare quanti dei numeri $n \in [1, 100]$ siano multipli di 2, di 3,... di 10 e realizzare il relativo diagramma a torta.

(2) ▶▶ La popolazione mondiale, in milioni, è suddivisa come segue: 4508 in Asia, 1267 in Africa, 739 in Europa, 365 in America del Nord, 652 in America Latina 41 in Oceania.

Determinare il relativo diagramma a torta.

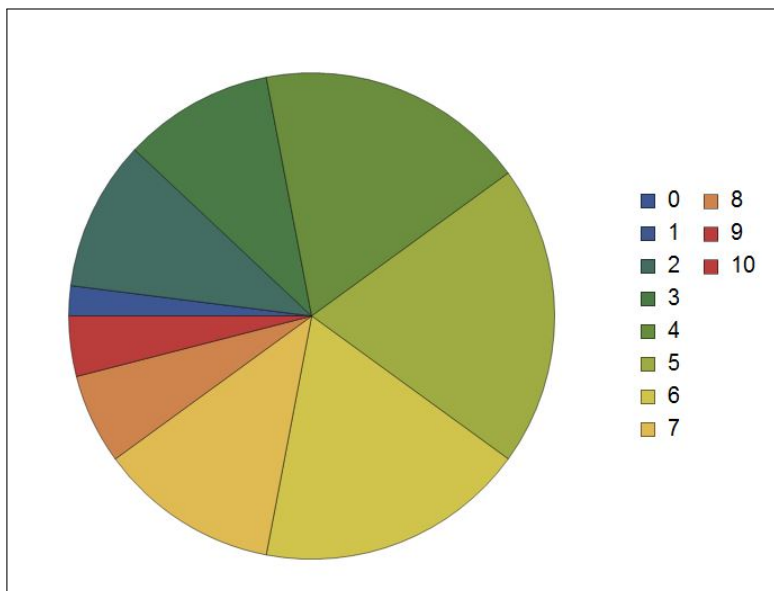



FIGURA 2. La torta delle frequenze relative

(3) ►► Determinare la statistica dei quadrati perfetti n^2 che appartengono agli intervalli $[1, 100]$, $[101, 200]$, $\dots$, $[901, 1000]$, le rispettive frequenze assolute e relative.

2. Le classi

La statistica precedente riguardava valori *discreti*: ciascun esperimento poteva produrre solo uno degli 11 risultati possibili.

Questa semplicità non è necessariamente presente sempre: consideriamo, ad esempio la statistica delle altezze di un campione di 50 persone di una popolazione.

I valori che si otterranno saranno, espressi con numeri non interi e potenzialmente, a seconda della precisione della misura, anche con più decimali.

Supponiamo di aver raccolte nella seguente tabella le misure trovate arrotondate al decimo di centimetro

162.4	179.6	188.4	158.0	181.2	155.6	171.6	188.0	180.0	176.8
157.2	162.8	193.6	172.4	195.6	179.6	172.8	148.4	181.2	170.8
190.	186.0	163.6	162.0	155.6	133.2	196.4	174.8	164.0	174.8
165.2	181.2	147.6	197.2	149.2	188.0	177.2	171.6	173.6	172.4
164.4	194.4	173.2	151.6	147.6	157.2	182.8	170.8	188.4	187.2

Tenuto conto che le altezze trovate variano tra 133 e 198 può essere vantaggioso raggruppare le varie altezze in 7 classi, lunga ciascuna 10 *cm*

$$[125-135), \quad [135, 145), \quad \dots [185, 195), \quad [195, 205)$$

che possiamo indicare citando l'altezza media.

Così la classe 130 raggruppa le altezze tra 125 e 135 esclusa, la 140 le altezze tra 135 e 145 esclusa, ...

classe :	130	140	150	160	170	180	190	200
persone :	1	0	5	11	12	9	9	3

Si osservi come giustamente la somma delle frequene assolute, la seconda riga, faccia 50, numero totale del campione studiato.

L'istogramma corrispondente è il seguente

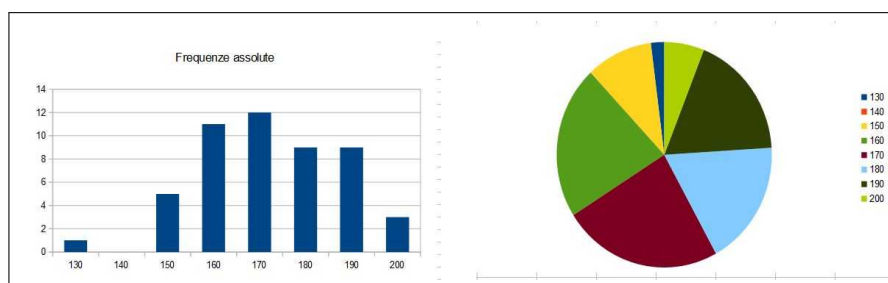



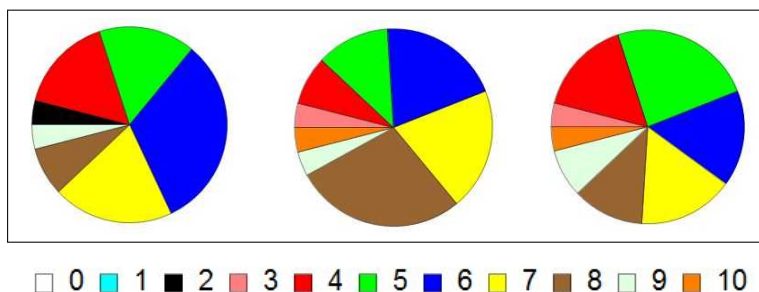
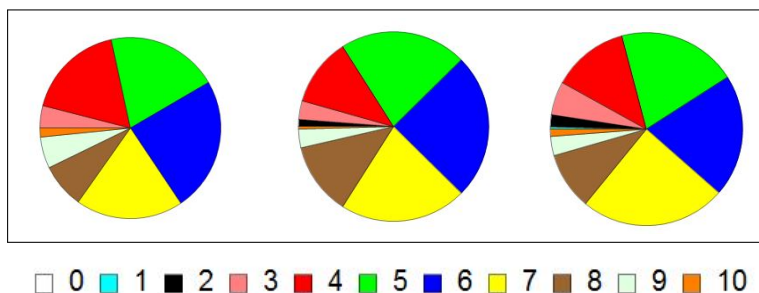
FIGURA 3. L'istogramma delle frequenze assolute e la torta di quelle relative

3. La legge dei grandi numeri

Le frequenze assolute e quelle relative delle statistiche relative a un certo esperimento dipendono dal numero N di prove effettuate: la legge dei **grandi numeri** ipotizza invece che le *frequenze relative* si stabilizzino, al crescere del numero N delle prove su valori che dipendono solo dal tipo di esperimento.

Verifichiamo quanto detto sulle statistiche relative al numero di *teste* ottenute lanciando 10 volte una moneta:

- consideriamo le tre torte delle frequenze relative riferite a tre statistiche ciascuna relativa a 25 serie di 10 lanci ciascuna Si tratta di torte abbastan-

za differenti tra loro: il predominio del blu, il 6, nella prima non si ritrova nella seconda, lo scarso rosso, il 4, nella seconda aumenta notevolmente nella terza.

- consideriamo ora altre tre torte riferite a tre statistiche ciascuna relativa a

250 serie di 10 lanci ciascuna Si tratta di torte abbastanza simili tra loro: il rosso, 4, il verde, 5, il blu, 6 e il giallo, 7 si spartiscono quasi in parti uguali i tre quarti della torta.

Morale: Se il numero N di volte in cui uno stesso esperimento è eseguito è abbastanza grande le frequenze relative

$$\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_k}{N}$$

con cui i diversi possibili k risultati si producono tendono a rimanere costanti.

4. La media

La *media* μ di una statistica[1] è per definizione la *media aritmetica* dei suoi dati.

ESEMPIO 4.1. *Sia* $S = \{1,4,2,7,1,6,2,2,3,2\}$ *la media è*

$$\mu = \frac{1}{10}(1+4+2+7+1+6+2+2+3+2) = \frac{30}{10} = 3$$

La media μ di una statistica S si denota spesso con $E(S)$: così

$$E(\{1,4,2,7,1,6,2,2,3,2\}) = 3$$

Detti m ed M il minimo e il massimo dei valori presenti nella statistica S è evidente che

$$m \leq E(S) \leq M$$

La media di una statistica può essere agevolata dalla conoscenza delle frequenze assolute o relative dei termini che vi figurano.

[1] Un glossario dei termini statistici è offerto dall'ISTAT all'indirizzo
http://www3.istat.it/servizi/studenti/binariodie/CorsoExcel/Glossario.htm

Così nell'esempio precedente

valori	1	4	2	7	6	3
frequenze assolute	2	1	4	1	1	1
frequenze relative	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1

$$\mu = \frac{1}{10}(1\times 2+4\times 1+2\times 4+7\times 1+6\times 1+3\times 1) = 3$$

oppure servendosi delle frequenze relative

$$\mu = 1\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}+2\times\frac{4}{10}+7\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{10} = 3$$

OSSERVAZIONE 4.2. *Il calcolo della media di una statistica fatto servendosi dei valori prodotti e delle relative frequenze (assolute o relative) fornisce un esempio di media ponderata o media con pesi.*

Nella somma di valori da considerare si da infatti maggiore o minore peso a ciascun addendo in relazione alla frequenza con cui si incontra: nell'esempio precedente l'addendo 2*, che rappresenta un valore ottenuto* 4 *volte ha avuto il* $peso = 4$.

4.1. Proprietà della media.

Su una statistica si possono eseguire alcune operazioni:

- *traslazioni*, cioè alzare (o diminuire) tutti i termini di una stessa h
- *moltiplicazioni*, cioè moltiplicare (o dividere) tutti i valori per uno stesso fattore ρ, operazione che interviene, ad esempio, tutte le volte che si debba cambiare l'unità di misura.

La linearità con cui è definita la media permette di riconoscere che detta $S = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ e dette

$$S+h = \{a_1+h, a_2+h, \dots a_k+h\}, \qquad \rho S = \{\rho a_1, \rho a_2, \dots \rho a_k\}$$

si ha

$$E(S+h) = E(S)+h, \qquad E(\rho S) = \rho E(S)$$

4.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia m la media ottenuta in 10 esami, ciascuno con votazione $v \in [18, 30]$: valutare quanto modifichi la media l'aumento o la diminuzione di un punto su un singolo voto.
(2) ▶▶ Tradurre la media m ottenuta in 25 esami, ciascuno con votazione $v \in [18, 30]$ nella tradizionale scala 110 del voto di laurea.
(3) ▶▶ Traslare la statistica $S := \{2, 4, 1, 6, 3, 7, 4, 9, 1, 0\}$ in modo che la nuova statistica abbia media nulla.

5. La moda

La *moda* di una statistica è il valore che ha la frequenza maggiore.

Può accadere che ci sia un solo valore che ha la frequenza maggiore o che ce ne sia più d'uno: nel primo caso si parla di *distribuzioni unimodali* negli altri di *distribuzioni multimodali*.

ESEMPIO 5.1. *Riferendosi al primo esempio, i* 50 *esperimenti di conteggio delle teste ottenute in* 10 *lanci di una moneta, la moda è* 5.

La parola scelta, *moda*, per uno speciale valore di una statistica, corrisponde al significato della parola *moda* nel linguaggio corrente: un certo abbigliamento è di *moda* quando riconosciamo che è quello che vediamo più frequentemente indossare per strada.

5.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare la moda nella precedente statistica dei numeri $n \in [1,100]$ multipli di 2, di 3,..., di 10.
(2) ▶▶ Determinare la moda nella statistica dei cubi perfetti n^3 che appartengono agli intervalli $[1, 100], [101, 200], \ldots, [901, 1000]$.
(3) ▶▶ Determinare la moda della statistica dei resti delle divisioni di n^2 per 15 al variare di i $n \in [5,15]$.

6. La mediana

Il numero Me che divide i valori di una statistica S in due gruppi, il gruppo dei valori minori di Me e il gruppo di quelli maggiori di Me con lo stesso numero di elementi si dice *mediana* della statistica.

La determinazione della mediana di S è facile dopo che i valori di S sono disposti in ordine crescente: detto N il numero di elementi di S

- se $N = 2m+1$ è dispari allora il valore all'$(m+1)-$esimo posto, x_{m+1} è la mediana di S,
- se $N = 2m$ è pari allora si assume per convenzione

$$Me = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}).$$

ESEMPIO 6.1. *Consideriamo la statistica V dei voti riportati da 15 studenti in una certa prova scritta*

$$V = \{13.5, 14, 14.5, 15.5, 16.5, 16.5, 17, \mathbf{18.5}, 19.5, 19.5, 21, 21, 23, 26, 29\}$$

già disposti in ordine crescente.

L'ottavo voto, ***18.5*** *rappresenta la mediana: dei* 15 *studenti ce ne sono* 7 *che hanno avuto meno di* 18.5 *e* 7 *che hanno ottenuto di più.*

OSSERVAZIONE 6.2. *Le tre quantità proposte, la media, la moda e la mediana rappresentano tre valori che associamo a una statistica S e che risultano tutti e tre compresi tra il minimo e il massimo dei valori della statistica.*

Nel caso che S sia simmetrica rispetto alla media e unimodale i tre valori coincidono.

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ La media m e la mediana Me di una statistica possono risultare sia $m < Me$ che $m > Me$: fornire due esempi per i due casi.
(2) ▶▶ La statistica S risulti simmetrica rispetto alla media m: cosa si può dire della sua mediana ?
(3) ▶▶ Se la statistica S ha mediana Me quale sarà la mediana della statistica ρS con $\rho = 3/2$?

7. Varianza e deviazione standard

La media. la moda e la mediana non forniscono indicazioni sulla **dispersione** dei valori di una statistica S: ad esempio le due statistiche

$$S_1 = \{-10, 0, 0, 0, 10\} \quad e \quad S_2 = \{-1, 0, 0, 0, 1\}$$

hanno la stessa media $\mu = 0$, la stessa moda $Mo = 0$, la stessa mediana $Me = 0$.

Una informazione su quanto i valori di una statistica $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ si allontanino dalla corrispondente media μ è fornita dalla *varianza* $Var(S)$ espressa da

$$Var(S) = \frac{1}{N}\left\{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \dots (x_N-\mu)^2\right\}$$

Riferendosi agli esempi precedenti si ha

$$\begin{cases} Var(S_1) = \frac{1}{5}\left\{(-10-0)^2 + 3(0-0)^2 + (10-0)^2\right\} & = 40 \\ Var(S_2) = \frac{1}{5}\left\{(-1-0)^2 + 3(0-0)^2 + (1-0)^2\right\} & = 0.4 \end{cases}$$

I due valori trovati corrispondono a riconoscere che i valori di S_1 sono notevolmente più *dispersi*, cioè lontani dalla media, di quelli di S_2.

TEOREMA 7.1. *Svolgendo i conti si riconosce che, indicata con S^2 la statistica formata dai quadrati degli elementi di S, si ha*

$$Var(S) = E(S^2) - E(S)^2.$$

La radice quadrata della varianza

$$\sigma = \sqrt{Var(S)}$$

si chiama *deviazione standard* della statistica S.

Assegnata una statistica $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$ di media μ e deviazione standard σ, si dice statistica *statistica normale standard* ad essa associata la statistica

$$S^* = \left\{ \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, \frac{x_2 - \mu}{\sigma}, \ldots, \frac{x_N - \mu}{\sigma}, \right\}$$

Qualunque sia S la statistica normale standard associata ha

- media $\mu^* = 0$,
- deviazioned standard $\sigma^* = 1$

OSSERVAZIONE 7.2. *I più diffusi software che eseguono calcoli statistici assumono come varianza di una statistica il valore*

$$\frac{1}{N-1}\left\{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots(x_N-\mu)^2\right\}$$

leggermente superiore (divisione per $N-1$ anzichè per N) di quello teorico introdotto sopra. Non entriamo nel motivo di tale scelta ma ne prendiamo atto.

ESEMPIO 7.3.
La statistica seguente è la statistica normale standard associata alla prima statistica di questo capitolo, quella dei 50 *esperimenti di conteggio del numero di teste in 10 lanci di una moneta.*

I valori sono espressi con l'approssimazione di due decimali:

-1.87	2.11	4.11	-3.87	2.11	-3.87	0.120	4.11	2.11	2.11
-3.87	-1.87	-1.87	0.120	6.10	2.11	0.120	-5.86	2.11	-3.87
4.11	4.11	-1.87	-1.87	-3.87	-9.85	6.10	0.120	-1.8 7	-1.87
2.11	-5.86	6.10	-5.86	2.11	4.11	0.120	0.120	0.120	-1.87
8.10	0.120	-5.86	-3.87	-5.86	8.10	0.120	2.11	4.11	-1.87

Come si vede i numeri, i valori inizialmente tutti naturali tra 0 *e* 10 *sono diventati anche negativi e anche non interi: è frutto*

- *della traslazione, sottrazione della media,*
- *della divisione per la deviazione standard*

7.1. Esercizi.

(1) ►► Sia $S := \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$: determinare la varianza e determinare la nuova statistica normalizzata.
(2) ►► Detta S una statistica assegnata valutare che relazione passi tra la varianza di S e quella di $2S$.
(3) ►► Detta S la statistica dei numeri pari $S := \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ calcolare la media $E(S)$, la media $E(S^2)$ e verificare la formula

$$Var(S) = E(S^2) - E(S)^2.$$

CAPITOLO 9

Calcolo combinatorio

1. Le disposizioni

Il termine *disposizione* si riferisce al verbo *disporre*, cioè *ordinare*:

> si abbiano n oggetti diversi, per esempio n lettere diverse, il **numero di file diverse** che si possono realizzare con k di esse, naturalmente $k \leq n$, ha il nome di *disposizioni semplici di n oggetti k a k*

Quante file diverse si possono immaginare ?

Per costruire una di tali file, per esempio pensando a $k = 3$, occorre

- scegliere il primo elemento fra gli n disponibili, cosa che si può fare in n modi diversi,
- scegliere il secondo elemento fra gli $n-1$ ancora disponibili, cosa che si può fare in $n-1$ modi diversi,
- scegliere il terzo elemento fra gli $n-2$ rimasti, cosa che si può fare in $n-2$ modi diversi.

Complessivamente si possono immaginare

$$D_{n,3} = n \times (n-1) \times (n-2)$$

file differenti: il prodotto di 3 fattori, da n a scendere.

TEOREMA 1.1. *Se invece di $k = 3$ avessimo pensato a qualche altro valore il prodotto sarebbe stato ancora k fattori, ancora da n a scendere,*

$$D_{n,k} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}_{k\ fattori}$$

naturalmente per $k \leq n$.

ESEMPIO 1.2. *Quante parole*[1] *di 5 lettere, tutte diverse, si possono immaginare servendosi delle* 21 *lettere dell'alfabeto italiano ?*

$$D_{21,5} = 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 2563974$$

[1]Prescindendo naturalmente che si tratti di parole effettivamente presenti o meno nel vocabolario italiano, vocabolario che fra l'altro accoglie anche parole scritte con lettere non necessariamente tutte diverse (ci sono le doppie, ecc.)

1.1. Il fattoriale.

Il numero delle diverse file realizzabili con tutti ed n gli oggetti disponibili

$$D_{n,n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

si chiama *permutazioni di n oggetti*.

Tale numero, prodotto di n fattori da n a scendere, si indica con la notazione $n!$ che si legge *n fattoriale*.

ESEMPIO 1.3.

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6, \quad 7! = 1 \times 2 \cdots \times 7 = 5040$$

È interessante notare come $n!$ produca valori molto grandi, già in corrispondenza a valori n abbastanza piccoli

$$10! = 3628800, \quad 15! = 1307674368000, \quad 20! = 2432902008176640000$$

Per motivi di semplicità si assume, per definizione, $0! = 1$.

Vi capiterà di incontrare approssimazioni di $n!$ della forma

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

detta *approssimazione di Stirling*.

1.2. Gli anagrammi.

Gli anagrammi, una curiosità enigmistica, sono le tante diverse permutazioni delle lettere di una parola assegnata, permutazioni prese indipendentemente dalla loro effettiva presenza nel vocabolario.

Il numero degli anagrammi è il numero delle file diverse che si possono costruire con le n lettere della parola assegnata.

ESEMPIO 1.4. *La parola assegnata sia ALI: gli anagrammi possibili, le permutazioni delle tre lettere A, L, I sono* $3! = 6$

ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA

ESEMPIO 1.5. *La parola assegnata sia ALA: gli anagrammi possibili, le permutazioni delle tre lettere A, L, A non più tutte diverse, sono*

ALA, AAL, LAA,

la metà delle 6 *osservate sopra.*

ESEMPIO 1.6. *La parola assegnata sia ANNA: gli anagrammi possibili, le permutazioni delle quattro lettere A, N, N, A non più tutte diverse, sono*

ANNA, ANAN, AANN, NAAN, NANA, NNAA

un quarto delle $4! = 24$ *immaginate.*

Gli esempi considerati aiutano a capire che il numero di anagrammi di una parola assegnata dipende:

- dal numero n delle lettere
- dalle eventuali ripetizioni di alcune lettere

ALI	$n=3$	zero ripetizioni	anagrammi = $3! = 6$
ALA	$n=3$	una ripetizione 2	anagrammi = $3!/2! = 3$
ANNA	$n=4$	due ripetizioni 2	anagrammi = $4!/(2!\,.\,2!)! = 6$
TETTO	$n=5$	una ripetizione 3	anagrammi = $5!/3! = 20$

1.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Quante file diverse di tre numeri ciascuna si possono realizzare con i numeri $\{1,2,\dots,9\}$?
(2) ▶▶ In quanti modi si possono disporre 9 numeri su una scacchiera 3×3 ? ... e 42 su una scacchiera 7×6 ?
(3) ▶▶ Quanti sono gli anagrammi della parola *matematica* ?

2. Le combinazioni

Diversamente dalle disposizioni, che tengono conto dell'ordine, si possono contare i possibili sottinsiemi differenti costruibili con k degli n oggetti disponibili.

Il loro numero $C_{n,k}$ si chiama *numero delle combinazioni* di n oggetti k a k.

A fianco ad ogni fila formata con k degli n oggetti disponibili ce ne sono $k!$ che differiscono da essa solo per il diverso ordinamento degli stessi k oggetti.

Quindi se $D_{n,k}$ è il numero delle file diverse, il numero dei sottinsiemi diversi sarà

$$C_{n,k} = \frac{1}{k!} D_{n,k} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times(n-k+1)}{k!}$$

ESEMPIO 2.1. *Sia $E=\{a,b,c,d\}$: quanti sottinsiemi con $k=2$ elementi ciascuno sono contenuti in E ?*

Risposta: I sottinsiemi possibili sono

$$\{a,b\},\quad \{a,c\},\quad \{a,d\},\quad \{b,c\},\quad \{b,d\},\quad \{c,d\},$$

Il loro numero è

$$C_{4,2} = \frac{1}{2!} D_{4,2} = \frac{4\times 3}{2!} = 6$$

ESEMPIO 2.2.

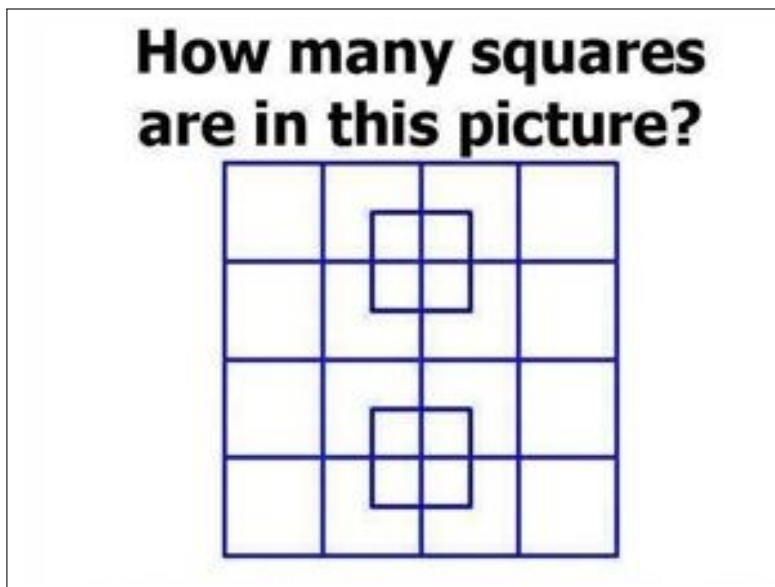



FIGURA 1. Quanti quadrati vedete ? Ponete la domanda su Google...!

3. I coefficienti binomiali

I numeri

$$C_{n,k} = \frac{1}{k!}\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[k-1])}_{k\ fattori}, \qquad n,k \in \mathbb{N}$$

che, sorprendentemente, sono sempre valori naturali, si indicano anche con la notazione $\binom{n}{k}$ che si legge *n sopra k*.

ESEMPIO 3.1.

$$\binom{3}{0} = 1, \ \binom{3}{1} = 3, \ \binom{3}{2} = 3, \ \binom{3}{3} = 1$$

Per n < k valgono zero: infatti, ad esempio

$$\binom{3}{5} = \frac{3\times 2\times 1\times 0\times(-1)}{5!} = 0$$

I coefficienti binomiali si incontrano in numerosi problemi, tra cui il più comune è quello dei coefficienti delle potenze del binomio $(a+b)^n$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

da cui appunto il nome di *coefficienti binomiali*.

Essi si trovano rappresentati in modo mnemonicamente vantaggioso nel così detto *triangolo di Tartaglia*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & & \\ & 1 & & 5 & 10 & & 10 & 5 & & 1 & \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

ESEMPIO 3.2. *Si ha infatti, ad esempio per $n = 3$*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3ab^2 + b^3 =$$

$$= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}a^{3-i}b^i$$

ESEMPIO 3.3. *Lo sviluppo del binomio $(1+1)^n$, che ovviamente vale 2^n permette di riconoscere che*

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$$

come si può verificare sommando le righe del precedente triangolo di Tartaglia.

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Quante strette di mano si sono date al primo incontro della Conferenza generale dei ministri degli esteri della UE ?

(2) ▶▶ Quante terzine diverse si possono ottenere pescando (contemporaneamente) tre numeri dal sacchetto della Tombola ?

(3) ▶▶ Tenuta presente l'espressione di $(a+b)^n$ tramite i coefficienti binomiali, calcolare $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

4. Le disposizioni e le combinazioni con ripetizione

Assegnato un insieme, ad esempio le lettere di un alfabeto, si possono cercare le *parole* di k lettere componibili con tale alfabeto: la parola *con ripetizione* significa che una stessa lettera può essere usata anche più volte in una stessa parola, può cioè essere *ripetuta*.

ESEMPIO 4.1. *Supponiamo che l'alfabeto disponibile sia quello formato dalle tre lettere* $\{a, b, c\}$*: le parole di due lettere che si possono formare sono*

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$$

ciascuna formata ponendo

- *al primo posto una delle tre lettere disponibili, tre modi diversi,*
- *al secondo posto ancora una delle tre lettere sempre disponibili, altri tre modi diversi,*

Le possibilità sono pertanto

$$3 \times 3 = 3^2$$

Come l'esempio suggerisce il numero $DR_{n,k}$ di disposizioni con ripetizione realizzabili con k degli n oggetti sono $DR_{n,k} = n^k$.

Un po' più complesso è il conto dei *sottinsiemi* diversi di k elementi presi, anche accettando ripetizioni, da un insieme assegnato di n oggetti: la differenza tra *parole* e *sottinsiemi* sta nel tener conto o meno dell'ordine.

ESEMPIO 4.2. *Supponiamo che l'insieme assegnato sia, come nell'esempio precedente,* $E = \{a,b,c\}$ *i sottinsiemi di due elementi costruiti servendosi dei tre elementi di E, anche ammettendo ripetizioni sono solo* 6*:*

$$aa, ab, ac, bb, bc, cc$$

TEOREMA 4.3. *Si può riconoscere che, in generale il numero delle combinazioni con ripetizione è*

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

ESEMPIO 4.4. *Sia* $E := \{a,b,c,d,e,f\}$*: con i suoi* 6 *elementi si possono costruire*

$$\binom{6+4-1}{4} = 126$$

sottinsiemi diversi formati con 4 *degli elementi di E, accettando anche ripetizioni, e dichiarando due sottinsiemi diversi se differiscono per almeno un elemento.*

4.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Quanti numeri si possono scrivere usando, anche ripetendole, tre delle 10 cifre $0, 1, \dots, 9$?
(2) ▶▶ Quanti colori diversi si possono comporre miscelando quattro parti uguali dei tre colori base RGB ?

(3) ►► Quante targhe automobilistiche[2] sono possibili con il sistema attuale: 2 lettere fra le 22 accolte (si sono escluse dalle 26 esistenti le lettere I,U,O,Q), 3 cifre fra le 10 possibili, altre due lettere sempre fra le 22.

[2]Il conto non è sicuro dal momento che la legge ha escluso con ragionevoli motivazioni alcune sequenze quale quella EE usata con altri scopi.

CAPITOLO 10

La probabilità

Il calcolo delle probabilità risponde a problemi molto comuni:

- un esperimento produca un insieme E di risultati *tutti ugualmente possibili*,
- scegliamo alcuni $F \subset E$ di tali risultati che diciamo *favorevoli*,

la *probabilità* $p(F)$ rappresenta la percentuale dei risultati *favorevoli*:

$$p(E) = 1, \quad p(\varnothing) = 0, \quad \forall F \subset E : \ 0 \le p(F) \le 1$$

Gli esperimenti in grado di produrre, in modo imprevedibile, conseguenze diverse si dicono *aleatori*, ricordando nella parola latina *alea*, dado, l'azione più semplice: il lancio del dado.

Gli esperimenti *aleatori* fondamentali che considereremo sono tre:

- il lancio di una moneta,
- il lancio di un dado
- l'estrazione da un'urna.

La prima azione ha due sole conseguenze possibili $E = \{TESTA, CROCE\}$[1], la seconda l'uscita di uno dei sei numeri $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la terza.... dipende da cosa contiene l'urna.

1. Il lancio di una moneta

Si tratta ovviamente di una questione di gioco: lanciando una moneta *onesta*[2] e scommettendo su TESTA, cioè $F = \{TESTA\} \subset E$ si ha

$$p(F) = \frac{1}{2}$$

La probabilità di vincere scommettendo sul lancio di una moneta è 0.5..

[1] Attualmente le monete in centesimi non sempre rispettano questa antica gloriosa struttura monetaria...!

[2] Diamo questo titolo alle monete che cadano solitamente, almeno nel caso di un numero elevato di lanci, il 50% delle volte mostrando testa e il 50% mostrando croce.

1.1. Un problema.

Un problema più raffinato che possiamo porre collegato al lancio della moneta è il seguente:

> *Lanciando 4 volte una moneta (onesta) qual'è la probabilità che esca TESTA esattamente 3 volte ?*

Se registriamo tutti i possibili esiti di quattro lanci, le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti con $k = 4$, avremo $DR_{2,4} = 2^4 = 16$ possibilità

$$T\begin{cases} TT\begin{cases} TTT\begin{cases} TTTT \\ TTTC \end{cases} \\ TTC\begin{cases} TTCT \\ TTCC \end{cases} \end{cases} \\ TC\begin{cases} TCT\begin{cases} TCTT \\ TCTC \end{cases} \\ TCC\begin{cases} TCCT \\ TCCC \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$C\begin{cases} CT\begin{cases} CTT\begin{cases} CTTT \\ CTTC \end{cases} \\ CTC\begin{cases} CTCT \\ CTCC \end{cases} \end{cases} \\ CC\begin{cases} CCT\begin{cases} CCTT \\ CCTC \end{cases} \\ CCC\begin{cases} CCCT \\ CCCC \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Lo schema riportato illustra come al primo lancio si possa avere o *TESTA* o *CROCE*: al secondo lancio si aggiunge al primo risultato ancora una *TESTA* o *CROCE* offrendo così quattro possibili sequenze

$$TT, \quad TC, \quad CT, \quad CC$$

Così proseguendo si arriva alle 16 sequenze diverse dopo 4 lanci, la quarta colonna.

Solo 4 di esse (quelle colorate in rosso) contengono 3 TESTE: la probabilità che escono tre TESTE è quindi $\frac{4}{16}$.

Il problema potrebbe anche essere proposto scommettendo che

> *su quattro lanci escano almeno tre TESTE*

La probabilià di vincere questa nuova scommessa è maggiore di quella precedente: alle quattro sequenze che, come abbiamo osservato, contengono 3 TESTE si aggiunge una quinta sequenza vincente, quella formata da 4 TESTE. La probabilià di vincere questa nuova scommessa è pertanto $\frac{5}{16}$.

1.2. Esercizi.

(1) ►► Si determini la probabilità di ottenere due TESTE lanciando 5 volte una moneta.
(2) ►► Si determini la probabilità di ottenere almeno una CROCE lanciando 3 volte una moneta.
(3) ►► Si determini la probabilità di ottenere più TESTE che CROCI lanciando 5 volte una moneta.

2. Il lancio del dado

Il lancio di un dado (regolare) produce l'uscita di uno dei sei numeri dell'insieme $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Scelto un qualsiasi sottiensieme $F \subset E$ la probabilità di F è pertanto

$$p = \frac{|F|}{6}$$

avendo indicato con $|F|$ il numero di elementi inclusi in F.

ESEMPIO 2.1. *La probabilità lanciando un dado di ottenere un dispari è*

$$p = \frac{3}{6} = 0.5$$

2.1. Un problema.

Un primo problema associato è la probabilità di ottenere una certa somma lanciando due dadi:

- il lancio di due dadi, pensiamo a un dado rosso e uno blu, produce 36 diverse cadute,
- le somme ottenibili sono solo 11: i valori da 2 a 12,

	2	(1,1)
	3	(2,1), (1,2)
	4	(3,1), (2,2), (1,3)
	5	(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)
	6	(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)
•	7	(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)
	8	(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)
	9	(6,3), (5,4), (4,5), (3,6)
	10	(6,4), (5,5), (4,6)
	11	(5,6), (6,5)
	12	(6,6)

Come la tabella mostra esiste: una sola caduta dei due dadi che produca la somma 2, due cadute che producono la somma 3, ecc.

È giusto quindi concludere che

$$p(2) = \frac{1}{36},\ p(3) = \frac{2}{36}, \ldots p(7) = \frac{6}{36}, \ldots p(12) = \frac{1}{36}$$

ESEMPIO 2.2. *Il gelataio pubblicizza un'offerta speciale*

> *lanciate due dadi e pagherete il gelato al prezzo: prima cifra, le decine, il numero più alto e seconda cifra, le unità, il più basso*

Così se esce un 2 *e un* 4 *il prezzo sara* 42 *centesimi, mentre se esce un* 1 *e un* 5 *il prezzo salirà a* 51 *centesimi.*

Qual'è la probabilità che possiate comprare, con tale offerta speciale, il gelato se disponete di soli 50 *centesimi ?*

Delle 36 *cadute possibili sono favorevoli alla vostra tasca quelle che non contengono nè* 5 *nè* 6 *che produrrebbero prezzi maggiori di* 50.

Pertanto sono favorevoli solo le 16 *cadute formate da due numeri presi tra* 1, 2, 3, 4.

La probabilità di poter acquistare il gelato, stante la limitata disponibilità di soli 50 *centesimi, è*

$$p = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

meno del 50% *!*

2.2. Esercizi.

(1) ►► Determinare la probabilità $p(\{1, 2, 3\})$ lanciando un dado.
(2) ►► Determinare la probabilità lanciando due dadi che il prodotto sia dispari.
(3) ►► Determinare la probabilità lanciando tre dadi che la somma sia maggiore di 12.

3. Le estrazioni da un'urna

L'urna (teorica) cui ci riferiamo consiste, nel caso più semplice, in

- un recipiente, l'urna
- un contenuto, un certo numero di palle bianche e un certo altro numero di palle nere,
- un meccanismo imprevedibile di estrazione (il bambino bendato).

I problemi che si possono porre sono:

- il più semplice determinare la probabilità di estrarre una palla bianca,
- più complessi estrarre, contemporaneamente, due palle bianche,
- più complessi ancora estraendo, contemporaneamente, 5 palle averne tre bianche e due nere,
- ecc.

Per quanto riguarda il primo problema, il più semplice, saputo che l'urna contenga b palle bianche e n palle nere l'azione di estrarne una produce una delle $b+n$ conseguenze.

La probabilità che si estragga una *bianca* è quindi

$$p_b = \frac{b}{b+n}$$

e analogamente la probabilità che si estragga una *nera* è

$$p_n = \frac{n}{b+n}$$

Ovviamente riesce $p_b + p_n = 1$.

Il secondo problema, estrarre due *bianche* richiede di calcolare quante coppie diverse ci siano disponendo di $b+n$ palle, e quante siano quelle formate da due *bianche*.

Il calcolo combinatorio insegna che

- con le $b+n$ palle presenti nell'urna si formano $\binom{b+n}{2}$ coppie,
- con le b palle bianche presenti nell'urna si formano $\binom{b}{2}$ coppie

Pertanto la probabilità richiesta è

$$p = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{b+n}{2}} = \frac{b(b-1)}{(b+n)(b+n-1)}$$

Il terzo problema, una generalizzazione del secondo, si gestisce allo stesso modo:

- le cinquine di palle estraibili sono $\binom{b+n}{5}$,

- le cinquine fatte da tre *bianche* e due *nere* sono pari al prodotto $\binom{b}{3} \cdot \binom{n}{2}$

La probabilità richiesta è pertanto

$$p = \frac{\binom{b}{3} \cdot \binom{n}{2}}{\binom{b+n}{5}}$$

ESEMPIO 3.1. *Supponiamo di estrarre da un'urna che contiene i* 90 *numeri da* 1 *a* 90 *tre numeri senza reimbussolamento.*

Qual'è la probabilità che risultino in ordine crescente: il primo più piccolo del secondo e il secondo più piccolo del terzo ?

I tre numeri estratti saranno evidentemente diversi: indichiamo con A il più piccolo, con B il medio e con C il più grande dei tre numeri estratti.

I tre numeri estratti possono presentarsi in una delle 6 *possibili sequenze*

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA$$

La probabilità che la sequenza con cui si presentano sia la ABC è pertanto $1/6$.

E se l'urna contenesse 900 *numeri, da* 1 *a* 900 *?*

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Quante palle nere occorre inserire in un'urna che contenga 10 palle bianche affinchè la probabilità di estrarre una nera sia $p(n) = 0.6$?

(2) ▶▶ Determinare la formazione di un'urna che consenta di estrarre palle rosse, blu e verdi rispettivamente con probabilità

$$p(r) = 0.40, \quad p(b) = 0.35, \quad p(v) = 0.25$$

(3) ▶▶ Determinare la probabilità che da un'urna contenente i 90 numeri $\{1, 2, \ldots, 90\}$ sia estratto il terno $\{1, 2, 3\}$.

4. Probabilità di unioni disgiunte

Sia E l'insieme dei risultati che un certo esperimento può produrre, e siano A e B due sottinsiemi disgiunti di E: riesce

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

ESEMPIO 4.1. *L'esperimento sia il lancio di un dado,* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*: sia* $F := \{x > 4\}$. *È evidente che* $F = A \cup B$ *con* $A = \{5\}$ *e* $B = \{6\}$ *insiemi disgiunti.*

$$p(F) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

Analogamente sia G l'insieme dei dispari: è evidente che $G = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ da cui

$$p(G) = p(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO 4.2. *Sia $E := \{2, 3, \dots, 12\}$ l'insieme delle somme ottenibili lanciando due dadi e sia $F = \{10\}$. Riferendosi alle 36 possibili coppie di risultati ottenibili lanciando due dadi si ha*

$$F = \{\{(5,5)\}, \{(4,6)\}, \{(6,4)\}\} \Rightarrow p(F) = p((5,5)) + p((6,4)) + p((4,6)) = \frac{3}{36}$$

4.1. Esercizi.

(1) ►► Detto $n \in [0,3]$ il numero di TESTE ottenuto lanciando 3 volte una moneta provare che

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

(2) ►► Se l'urna contiene 30 palle rosse, 20 blu e 25 verdi determinare la probabilità di estrarre una palla che sia o rossa o blu.

(3) ►► Qual'è la probabilità di estrarre da un mazzo di carte napoletane un re o un cavallo o un fante.

5. Probabilità composta

Consideriamo un evento composto da due (o più) eventi **indipendenti** , nel senso che l'accadere del primo non influenzi l'accadere del secondo:

> *la probabilità dell'evento composto è uguale al prodotto delle probabiltà dei due eventi che lo compongono.*

ESEMPIO 5.1. *Consideriamo l'uscita di una coppia fra le possibili*

$$(1,1), (1,2), \dots, (6,6)$$

ottenibili lanciando una coppia di dadi, uno rosso e l'altro blu:

Supponiamo che la coppia scelta sia $(3,5)$

- *la probabilità che il dado rosso dia 3 è $1/6$,*
- *la probabilità che il dado blu dia 5 è $1/6$,*

La probabilità composta di ottenere la coppia $(3,5)$ è pertanto

$$p((3,5)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ESEMPIO 5.2. *Lanciando tre volte una moneta la probabilità di ottenere*

- *TESTA al primo lancio,*
- *TESTA al secondo lancio,*

- *CROCE al terzo,*

è

$$p((TESTA, TESTA, CROCE)) = p(TESTA) \,.\, p(TESTA) \,.\, p(CROCE) = \frac{1}{8}$$

5.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Qual'è la probabilità lanciando un dado di ottenere un pari che sia anche multiplo di 3 ?
(2) ▶▶ Qual'è la probabilità lanciando 4 volte una moneta di ottenere sempre CROCE ?
(3) ▶▶ Qual'è la probabilità lanciando una moneta e un dado di ottenere TESTA e *pari* ?

6. La distribuzione binomiale

Consideriamo un esperimento che generalizza il lancio di una moneta: un esperimento che

- possa produrre due soli risultati, che possiamo chiamare SI e NO, donde l'aggettivo *binomiale*,
- che produca il primo, il SI, con probabilità p e il secondo, il NO, con $q = 1 - p$.

Eseguendo N volte l'esperimento il numero di SI ottenuti può essere

$$0, 1, 2, \ldots, N$$

Aver ottenuto k SI attivando N volte l'esperimento vuol dire avere ottenuto una sequenza di SI e NO che contenga

$$k \quad SI \quad e \quad N-k \quad NO.$$

Ogni sequenza di k SI ed $N - k$ NO ha probailità composta

$$p^k \, (1-p)^{N-k}$$

Esistono molte sequenze, diverse per l'ordine, che presentano k SI e $N - k$ NO:

- potrebbero aver dato SI i primi k lanci, e sempre NO tutti gli altri $N - k$,
- potrebbe aver dato SI il primo, NO il secondo, poi altri $k - 1$ SI e infine $N - k - 1$ NO,
- ecc.

Le diverse sequenze corrispondono ai diversi modi di sceglier k numeri fra $\{1, 2, \ldots, N\}$: ogni scelta fornisce una possibile sequenza che include k SI.

Come il calcolo combinatorio insegna i diversi modi di sceglier k numeri fra $\{1, 2, \ldots, N\}$ sono le $\binom{N}{k}$ combinazioni di k oggetti fra N: in altri termini essitono $\binom{N}{k}$ sequenze di k SI ed $N-k$ NO diverse solo per l'ordine.

La probabilità pertanto di ottenere attivando N volte l'esperimento k volte SI (e di conseguenza $N-k$ volte NO), prescindendo dall'ordine secondo il quale i risultati si presentano, è

$$p(k) = \binom{N}{k}\, p^k\,(1-p)^{N-k}$$

ESEMPIO 6.1. *Riferendosi ai* 10 *lanci di una stessa moneta (onesta), quindi con probabilità* $p = \frac{1}{2}$ *di ottenere TESTA e* $q = \frac{1}{2}$ *di ottenere CROCE, la probabilità di ottenere* 3 *volte TESTA e, naturalmente,* 7 *volte CROCE è*

$$p(3) = \binom{10}{3} p^3 q^7 = 120\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0,12 = 12\%$$

6.1. Valore atteso, varianza. Fissato N e fissato l'esperimento che produce SI con probabilità p (e NO con probabilità $1-p$) sia $X := \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ la variabile del numero di SI ottenuti sulle N prove.

Il valore atteso è , per definizione,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k}\, p^k\,(1-p)^{N-k} = N\,p$$

La varianza è , per definizione,

$$V(X) = \sum_{k=0}^{N} (k-E(X))^2 \binom{N}{k}\, p^k\,(1-p)^{N-k} = N\,p\,(1-p)$$

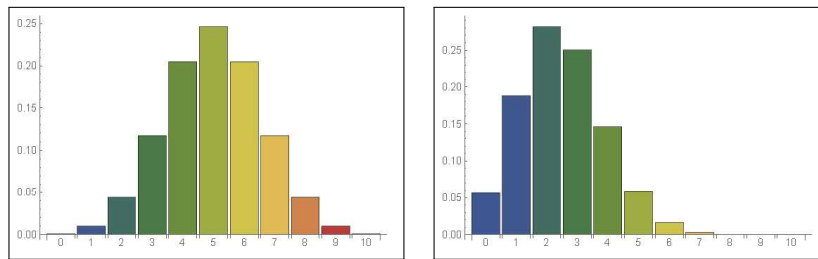



FIGURA 1. Istogramma delle probabilità $N = 10, \quad p = 0.5$ e $p = 0.25$

Si noti come:

- per $p = 0.5$ il valore atteso $E(X) = 5$ abbia la probabilità maggiore, e l'istogramma sia simmetrico rispetto a $E(X) = 5$,
- per $p = 0.2$ il valore atteso $E(X) = 2$ abbia la probabilità maggiore, e l'istogramma non sia più simmetrico rispetto a $E(X) = 2$,

6.2. I problemi con *almeno*. Sempre riferendosi all'attivare N volte l'esperimento che produca SI o NO con probabilità p e $1-p$ si può cercare la probabilità che su N prove si abbiano

almeno k SI.

Si ha naturalmente

$$p(SI \geq k) = p(SI = k) + p(SI = (k+1)) + \ldots + p(SI = N)$$

da cui

$$p(SI \geq k) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

Tenuto conto che

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = 1 \quad \to \quad p(SI \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

ESEMPIO 6.2. *La probabilità di ottenere almeno una TESTA lanciando* 10 *volte una moneta è*

$$p = \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

ovvero

$$p = 1 - \sum_{i=0}^{0} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = 1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 99.9\%$$

6.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Tabulare i valori $p(k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}, \quad p = \frac{1}{2}$ per $k \in [0,5]$.
(2) ▶▶ Tabulare i valori $p(k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}, \quad p = \frac{1}{4}$ per $k \in [0,5]$.
(3) ▶▶ Calcolare valore atteso e varianza in relazione a $N = 8$ e $p = 1/4$.

7. La legge dei grandi numeri

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il caso di $X := \{0,1,2,\dots,N\}$ numero di SI ottenuti attivando N volte un esperimento che produca SI o NO con probabilità rispettivamente p e $1-p$.

Siano in generale $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ i numeri che un certo esperimento X produce, imprevedibilmente: le probabilità

$$p(x_1), \quad p(x_2), \quad \dots, p(x_N)$$

costituiscono la *distribizione di probabilità* collegata a X.

La *legge dei grandi numeri* prevede che, se l'esperimento X è attivato un numero grande di volte,

- le frequenze relative dei diversi valori $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ si stabilizzino sui corrispondenti $p(x_1), \quad p(x_2, \quad \dots, p(x_N)$,
- la media dei diversi valori $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ si stabilizzi sul valore atteso
$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, p(x_i)$$
- assegnata una funzione $f(x)$ la media dei diversi valori $\{f(x_1), \dots, f(x_N)\}$ si stabilizzi su
$$E(f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, p(x_i)$$
- la varianza dei diversi valori $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ si stabilizzi su
$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - E(X))^2\, p(x_i)$$

7.1. Gli abusi.

La *legge dei grandi numeri* è oggetto di molti abusi.

Il fatto che le frequenze con cui si presentano i vari valori $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ si stabilizzino sui corrispondenti valori delle rispettive probabilità non autorizza a prevedere che se dopo un certo numero di prove la frequenza relativa f_1 con cui si è presentato il valore x_1 è inferiore a $p(x_1)$ la probabilità che x_1 si presenti nelle prove successive, ciascuna ovviamente indipendente dalle precedenti, aumenti.

L'abuso si trova nella credenza popolare che se, ad esempio, dopo 500 estrazioni dall'urna dei 90 numeri del gioco del Lotto il 17 non è mai uscito allora alla $501-$esima estrazione l'uscita del 17 sia assai più probabile del solito.

Cosa che può certo accadere, ma solo a seguito di poco commendevoli artifizi truffaldini...!

CAPITOLO 11

I limiti

1. Introduzione

Assegnata una successione $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ abbiamo avuto occasione di parlare del suo limite ℓ come del valore sul quale i termini della successione si stabilizzavano al crescere di n.

Ad esempio se la successione è $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ i valori si *stabilizzano* su zero, cioè diventano al crescere di n sempre più vicini a zero, fenomeno che abbiamo riassunto con la notazione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Un problema analogo si può porre in relazione a una funzione $f(x)$ in almeno un paio di casi

- chiedersi cosa possa dirsi dei valori $f(x)$ quando *x sia sempre più grande positivamente*, o più grande negativamente (naturalmente nel caso in cui la f sia definita su tali numeri grandi),
- chiedersi cosa possa dirsi dei valori $f(x)$ quando *x sia sempre più vicino* a un numero x_0 (su cui la funzione potrebbe anche non essere neanche definita), anche distinguendo, eventualmente su avvicinarsi a x_0 da sinistra o da destra.

Nel primo caso si parla di limiti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, nel secondo di limite per $x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$.

ESEMPIO 1.1. *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

è evidente che quando ad x si danno valori grandi, sia positivi che negativi, il denominatore diventa sempre più grande e quindi il quoziente $f(x)$ sempre più piccolo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ESEMPIO 1.2. *Sia*

$$f(x) = \frac{5+6x}{7+3x}$$

Tenuto presente che

$$\frac{5+6x}{7+3x} = \frac{5/x+6}{7/x+3}$$

e che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7}{x} = 0$$

riesce

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5+6x}{7+3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5/x+6}{7/x+3} = \frac{6}{3} = 2$$

ESEMPIO 1.3. *Sia*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

ceertamente non definita nel punto $x_0 = 1$ nel quale il denominatore vale zero.

Tenuto conto tuttavia che

$$\frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} = (x+1)\,\frac{x-1}{|x-1|}$$

e che

$$x<1 \quad \to \quad \frac{x-1}{|x-1|} = -1, \qquad x>1 \quad \to \quad \frac{x-1}{|x-1|} = 1$$

si riconosce che

$$x<1 \quad \to \quad f(x) = -(x+1), \quad x>1 \quad \to \quad f(x) = (x+1)$$

e quindi

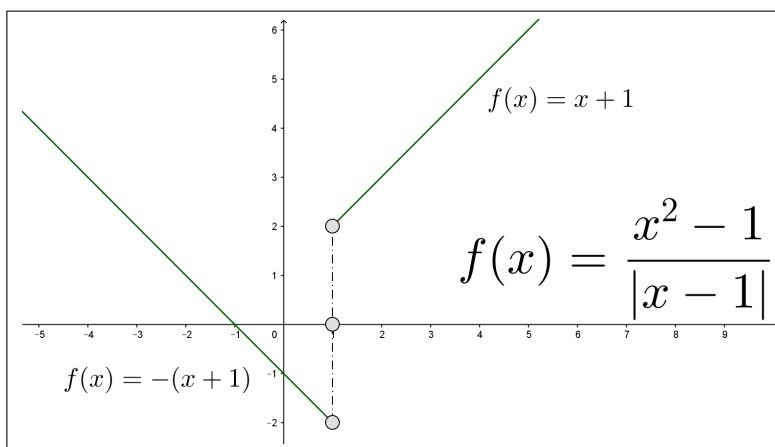



FIGURA 1. $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

- *se x si avvicina a $x_0 = 1$ da sinistra $f(x)$ si stabilizza su -2,*
- *se x si avvicina a $x_0 = 1$ da destra $f(x)$ si stabilizza su 2*

che è come dire che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

avendo adottato la notazione $x \to 1^-$ per indicare che x si avvicina a 1 da sinistra, e la notazione $x \to 1^+$ per indicare l'avvicinamento da destra.

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il limite per $x \to \infty$ della funzione $\dfrac{5+7x^2}{1+x^2}$.

(2) ▶▶ Determinare il limite per $x \to \infty$ della funzione $\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$.

(3) ▶▶ Determinare il limite per $x \to 0$ della funzione $1 + \dfrac{x}{1+x}$.

2. Limiti di funzioni razionali

Sia $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ una funzione razionale, quoziente dei polinomi $N(x)$ e $D(x)$.

Si possono presentare entrambe le domande precedenti:

- cosa pensare dei valori $f(x)$ quando x è grande, positivamente o negativamente,
- cosa pensare dei valori $f(x)$ quando x è vicino a uno degli eventuali punti x_0 nei quali il denominatore si annulla e sui quali quindi $f(x)$ non è definita.

Prima domanda: x grande

La risposta dipende dai gradi di $N(x)$ e $D(x)$:

- grado(N) $>$ grado(D): allora il quoziente diventa positivo o negativo sempre più grande,
- grado(N) $<$ grado(D): allora il quoziente diventa sempre più vicino a zero,
- grado(N) $=$ grado(D): allora il quoziente diventa sempre più vicino al quoziente dei due monomi di grado maggiore.

ESEMPIO 2.1. *Consideriamo i tre casi*

$$\frac{x^2+1}{x+1}, \quad \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \frac{x+1}{2x+3}$$

le trascrizioni delle tre funzioni seguenti chiariscono il fenomeno

$$\frac{1+1/x^2}{1/x+1/x^2}, \quad \frac{1/x+1/x^2}{1+1/x^2}, \quad \frac{1+1/x}{2+3/x}$$

- *nel primo caso all'aumentare positivamente di x il numeratore si avvicina a 1 mentre il denominatore, sempre positivo, si avvicina a zero, quindi il quoziente diventa sempre più grande,*
- *nel secondo caso all'aumentare positivamente di x il numeratore si avvicina a 0 mentre il denominatore si avvicina a 1, quindi il quoziente diventa sempre più piccolo,*
- *nel terzo caso all'aumentare (positivamente o negativamente) di x il numeratore si avvicina a 1 e il denominatore a 2, quindi il quoziente si avvicina a $1/2$.*

Quanto osservato si indica con le notazioni seguenti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+1/x}{2+3/x} = \frac{1}{2}$$

2.1. Due casi importanti. I casi di

$$\text{grado}(N) = \text{grado}(D), \quad e \quad \text{grado}(N) = \text{grado}(D)+1$$

hanno un interesse particolare: il grafico della funzione razionale somiglia, per x grande, a quello di una retta che ha il nome classico di *asintoto*

- nel caso grado(N) = grado(D), $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \ell$, la retta orizzontale $y=\ell$, retta che ha il nome di asintoto orizzontale,
- nel caso grado(N) = grado(D) + 1 per cui si ha necessariamente

$$\frac{N(x)}{D(x)} = mx+q+\frac{r(x)}{D(x)}$$

con grado(r) < grado(D), la retta $y = mx+q$ che ha il nome di asintoto obliquo.

ESEMPIO 2.2. *Consideriamo le due funzioni razionali*

$$R_1(x) = \frac{2x+3}{x-1}, \qquad R_2(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Per la prima, $R_1(x)$ si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$ e la retta orizzontale $y=2$ rappresenta l'asintoto orizzontale.

Per la seconda, $R_2(x)$ si ha, servendosi della divisione fra polinomi,

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$$

quindi $R_2(x)$ differisce dal polinomio di primo grado $x+1$ per la quantità, infinitesima al crescere di x, $\frac{2}{x-1}$.

Il grafico di $R_2(x)$ somiglia quanto più grande è x al grafico di $x+1$, una retta che rappresenta il suo asintoto obliquo.

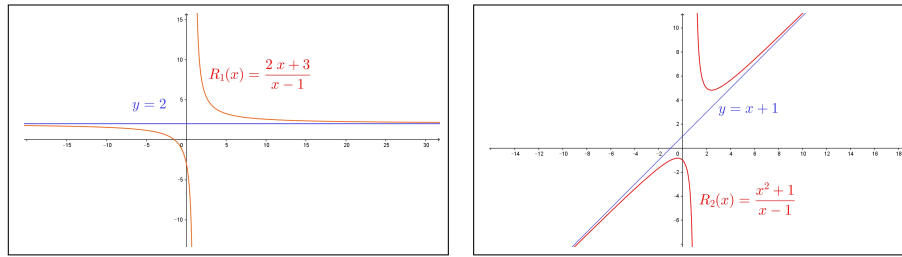



FIGURA 2. $R_1(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}, \qquad R_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Seconda domanda: $x \approx x_0,\ D(x_0) = 0$

Ci sono due possibilità:

- riesca $N(x_0) \neq 0$: allora la funzione quoziente produce per $x \approx x_0$ valori in modulo sempre più grandi,
- riesca $N(x_0) = 0$: allora

$$N(x) = (x - x_0)\,N_1(x), \quad D(x) = (x - x_0)\,D_1(x)$$

e quindi

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N_1(x)}{D_1(x)}$$

spostando l'indagine dai valori di $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ a quelli della $\dfrac{N_1(x)}{D_1(x)}$.

ESEMPIO 2.3. *Sia ancora $R_2(x) = \dfrac{1+x^2}{x-1}$ e sia $x_0 = 1$ punto in cui il numeratore vale $N(x_0) = 1 + x_0^2 = 2 \neq 0$ mentre il denominatore vale $D(x_0) = 0$.*

I valori $f(x)$ più x si avvicina a 1 più diventano grandi in modulo:

- *se $x \to 1^-$, cioè se x si avvicina a 1 da sinistra i valori della frazione sono negativi, sempre più grandi,*

$$\begin{cases} f(0.50) = -2.50 \\ f(0.60) = -3.40 \\ f(0.70) = -4.97 \\ f(0.80) = -8.20 \\ f(0.90) = -18.10 \\ f(0.99) = -198.01 \\ f(0.999) = -1998.00 \\ \dots = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} f(1.5) = 6.50 \\ f(1.4) = 7.40 \\ f(1.3) = 8.97 \\ f(1.2) = 12.20 \\ f(1.1) = 22.10 \\ f(1.01) = 202.01 \\ f(1.001) = 2002.00 \\ \dots = \dots \end{cases}$$

- *mentre se $x \to 1^+$, cioè se x si avvicina a 1 da destra i valori della frazione sono positivi, sempre più grandi,*

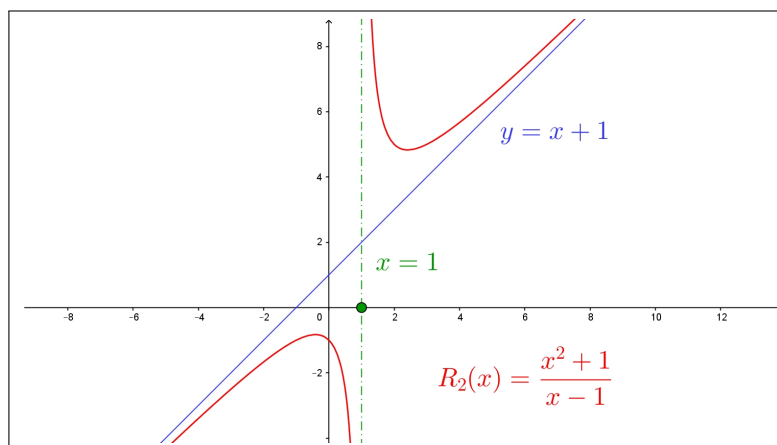



FIGURA 3. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x-1}$

Riassumendo si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^2}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x^2}{x-1} = +\infty$$

Anche la retta verticale $x = 1$ *corrispondente al punti* $x_0 = 1$ *nel quale* $R_2(x)$ *ha limiti infiniti, ha un ruolo speciale relativamente al grafico di* $R_2(x)$*, essa prende il nome di asintoto verrticale.*

ESEMPIO 2.4. *Sia* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 15x + 18}{3-x}$ *cerchiamo il limite per* $x \to 3$.

Si tratta di una frazione in cui denominatore e numeratore si annullano entrambi.

Tenuto conto che $3x^2 - 15x + 18 = 3(x-2)(x-3)$ *si riconosce che*

$$\frac{3x^2 - 15x + 18}{3-x} = \frac{3(x-2)(x-3)}{3-x} = -3(x-2)$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 15x + 18}{3-x} = \lim_{x\to 3} \{-3(x-2)\} = -3$$

2.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il limite per $x \to +\infty$ della funzione razionale $f(x) = \dfrac{3x + x^3}{1 + x + x^2 + 2x^3}$.

(2) ▶▶ Determinare il limite per $x \to 2$ della funzione razionale $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$.

(3) ▶▶ Determinare il limite per $x \to 2$ della funzione razionale $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.

3. Alcuni limiti difficili

Una delle difficoltà maggiori che si incontrano nella determinazione di un limite si incontra relativamente a espressioni:

- differenze di due addendi entrambi con limite $+\infty$ o entrambi $-\infty$,
- prodotto di due fattori uno divergente a $\pm\infty$ e l'altro con limite 0,
- quoziente di due espressioni entrambe divergenti a $\pm\infty$ o entrambe con limite 0

A tali espressioni viene spesso dato, in luogo del ragionevole nome di *forme difficili* quello di *forme indeterminate*, con l'usuale accezione in cui l'aggettivo *indeterminato* si riferisce al fatto che il limite dei due termini che intervengono nell'operazione non *determina* il limite del risultato dell'operazione.

Solo l'esperienza aiuta a orientarsi in una casistica enorme: ricordiamo in questo paragrafo solo due o tre esempi fondamentali.

- Differenza di due addendi divergenti

  $f(x) = x^m - x^n, \quad m > n$: tenuto conto che

  $$x^m - x^n = x^m\left(1 - \frac{x^n}{x^m}\right)$$

  si riconosce che

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty} (x^m - x^n) = +\infty$$

  Quanto osservato permette di riconoscere che tutti i polinomi hanno limite $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$.

- Quoziente di due fattori divergenti

  Con e^x indichiamo la funzione esponenziale, quella indicata con EXP su ogni calcolatrice, qualunque sia l'esponente m che figura a numeratore riesce

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$$

- Prodotto di un fattore infinitesimo per uno divergente

  Qualunque sia l'esponente $\alpha > 0$ dato ad x riesce

  $$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$$

ESEMPIO 3.1. *Calcolare il limite per $x \to +\infty$ del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$.*
La tecnica usata nel primo esempio può essere utile ancora

$$P(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

da cui naturalmente

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^3 & = & +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) & = & 1 \end{cases} \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

ESEMPIO 3.2. *Calcolare il limite per $x \to +\infty$ di $f(x) = x^3 e^{-x^2}$*
Tenuto conto che

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{x^2}} = \frac{t^{3/2}}{e^t}$$

avendo indicato con t la potenza x^2, e tenuto conto che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{3/2}}{e^t} = 0$$

si riconosce che

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^2} = 0$$

ESEMPIO 3.3. *Calcolare il limite per $x \to 0^+$ di $f(x) = \sqrt[3]{x}\log(\sqrt{x})$.*
Tenuto conto che

$$\sqrt[3]{x}\log(\sqrt{x}) = x^{1/3}\ \log(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\, x^{1/3}\ \log(x)$$

si riconosce che

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}\ \log(\sqrt{x}) = 0$$

3.1. Esercizi.

(1) ►► $\lim_{x\to\infty} (x^4 - 3x^3 + 1)$.
(2) ►► $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^x$.
(3) ►► $\lim_{x\to1^+} \sqrt{x-1}\log(x-1)$.

4. I simboli di Landau

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$:

- se $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ si riconosce che $f(x)$ *tende a zero più rapidamente di* $g(x)$ e si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$,
- se $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$ si riconosce che $f(x)$ *e* $g(x)$ *tendono a zero con rapidità equivalenti* e si dice che $f(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $g(x)$,
- se $\lim \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$ si riconosce che $f(x)$ *tende a zero meno rapidamente di* $g(x)$ e si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$, ovvero che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $f(x)$.

La situazione del primo caso $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si indica spesso con la notazione detta di Landau[1]

$$f(x) = o(g(x))$$

che si legge $f(x)$ è un *o piccolo* di $g(x)$ e che ricorda semplicemente quello che il limite esprime

La situazione del secondo caso $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$ si indica ancora con la notazione di Landau

$$f(x) = O(g(x))$$

che si legge $f(x)$ è un *O grande* di $g(x)$ e che ricorda semplicemente quello che il limite esprime, ordini equivalenti,

La situazione del terzo caso $\lim \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$ si riduce a quello del primo invertendo i ruoli e si indica con

$$g(x) = o(f(x)$$

I simboli di Landau vengono spesso utilizzati riferendosi alle potenze x^n: così è giusto dire che per $x \approx 0$

$$\begin{cases} x^3 & = o(x^2) \\ \sin(x) & = O(x) \\ 1 - \cos(x) & = o(x) \\ 1 - \cos(x) & = O(x^2) \\ \sin(x) - x & = o(x^2) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

[1]Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), matematico tedesco.

CAPITOLO 12

Continuità

1. Primi esempi

Consideriamo la funzione $f : x \mapsto f(x) = x^2$: nel punto $x_0 = 2$ vale $f(2) = 4$ e ... nei punti vicini ?

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x + x_0|\,|x - x_0|$$

Pertanto, sempre per $x_0 = 2$ pensando di prendere $x \in [-1, 3]$ si ha

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| = |x+2|\,|x-2| \leq 5|x-2|$$

avendo tenuto conto che se $x \in [-1, 3]$ il primo fattore $|x+2|$ non può superare 5.

Quindi se, ad esempio $|x-2| < 0.1$ allora $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| \leq 0.5$.

Se $|x-2| < 0.01$ allora $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| \leq 0.05$, ecc.

Il fenomeno osservato si chiama *continuità*:

$$x \approx x_0 \quad \to \quad f(x) \approx f(x_0)$$

Può apparire come naturale e obbligatorio, ma non è così, anche se effettivamente la maggior parte delle funzioni che usiamo soddisfano tale proprietà. Basta pensare alla funzione

$$g(x) \;=\; [x]$$

parte intera, quella che calcola per ogni numero x l'intero $[x]$ minore più vicino, per accorgersi che la *continuità* non è poi così obbligata.

Infatti $g(2) = [2] = 2$, ma

$$g(1.9) = [1.9] = 1, \quad g(1.99) = [1.99] = 1, \quad g(1.999) = [1.999] = 1, \dots$$

cioè pur calcolando la funzione *parte intera* sui numeri $1.9, 1.99, 1.999, \dots$ innegabilmente sempre più vicini a 2 i valori della funzione restano tutti 1, cioè non si avvicinano affatto al valore 2 che la funzione produce in $x_0 = 2$.

In parole semplici la funzione *quadrato* osservata sopra è continua non solo in $x_0 = 2$ ma ovviamente in ogni x_0 , mentre invece la funzione *parte intera* non è continua in $x_0 = 2$ e non lo è in nessun x_0 intero.

DEFINIZIONE 1.1. *$f(x)$ sia definita nell'intervallo I (limitato o non limitato), f si dice continua nel punto $x_0 \in I$ se*

$$\{x \in I,\, x \approx x_0\} \quad \to \quad f(x) \approx f(x_0)$$

ovvero, con il linguaggio dei limiti (che diamo per posseduto) :

DEFINIZIONE 1.2. *$f(x)$ sia definita nell'intervallo I (limitato o non limitato), $x_0 \in I$, f si dice continua nel punto x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1.1. Il linguaggio marziano degli ε e dei δ_ε.

L'idea del tutto naturale del

$$x \approx x_0 \quad \to \quad f(x) \approx f(x_0)$$

è spesso resa nella forma tecnica

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Così, ad esempio riferendosi alla funzione $f(x) = x^2$ e al punto $x_0 = 2$ la forma tecnica precedente corrisponde a poter sempre rispondere alle domande:

> *Scelto $\varepsilon = 10$ quanto ci si può allontanare con x da 2 con la sicurezza che tuttavia riesca $|f(x) - f(2)| \leq 10$?*
>
> *e se avessi scelto $\varepsilon = 0.5$ si potrebbe ancora decidere quanto sia possibile allontanarsi da 2 con la sicurezza che tuttavia riesca $|f(x) - f(2)| \leq 0.5$?*
>
> *e se avessi scelto $\varepsilon = 0.00001\ldots$?*

OSSERVAZIONE 1.3. *Si osservi la $\forall \varepsilon > 0$ e la richiesta $\exists\ \delta_\varepsilon > 0 :$ somiglia a un gioco di scommesse intorno alla funzione f e al punto x_0:*

- *il primo giocatore propone (a suo insindacabile parere) la distanza ε,*
- *il secondo giocatore, per vincere, deve essere in grado di indicare una distanza di sicurezza $\delta_\varepsilon > 0$ sufficiente.*

La continuità di f in x_0 corrisponde alla situazione nella quale il secondo giocatore è sempre in grado di vincere.

Domande analoghe rivolte al caso della funzione $[x]$ parte intera e sempre al punto $x_0 = 2$ non avrebbero avuto tutte risposta positiva:

- la prima, quanto ci si può allontanare con x da 2 con la sicurezza che tuttavia riesca $|[x] - [2]| \leq 10$ avrebbe avuto sicuramente risposte semplicissime, per esempio se ci si allontana di una quantità minore di $\delta = 5$ si ha certamente $|[x] - [2]| \leq 10$,
- la seconda invece, quanto allontanarsi da 2 garantendo che riesca tuttavia $|[x] - [2]| \leq 0.5$, non avrebbe avuto risposta: abbiamo infatti osservato che sui punti 1.9, $1,99$, $1,999, \ldots$, punti vicinissimi a 2 la funzione produce valori $[1.9] = 1$, $[1,99] = 1$, $[1,999] = 1, \ldots$ che distano 1 dal valore $[2]$.

Ovvero non si è in grado di indicare una distanza δ che garantisca che $|x-2| \leq \delta \quad \to \quad |[x]-[2]| \leq 0.5$.

La continuità corrisponde quindi alla possibilità di rispondere positivamente alle domande precedenti qualunque sia la quantità positiva ε proposta.

OSSERVAZIONE 1.4. *Differenze della continuità con la sola definizione di limite:*

- *f continua in x_0 richiede che f sia definita in x_0,*
- *f continua in x_0 richiede che esista* ***finito*** *$\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$,*
- *f continua in x_0 richiede che $\ell = f(x_0)$.*

ESEMPIO 1.5. *La funzione $f(x)$ non è continua in $x_0 = +\infty$: è ovvio $+\infty$ non è un punto, su di esso nessuna f è definita.*

ESEMPIO 1.6. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & se\, x<0 \\ 5 & se\, x=0 \\ x+1 & se\, x>0 \end{cases} \quad \to \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

non è continua nel punto $x_0 = 0$ perchè

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 5$$

1.2. Le funzioni continue.

Quando si dichiara che $f(x)$ è continua senza precisare il punto x_0 si sottintende che $f(x)$ è continua in tutto il dominio in cui è definita.

- Le funzioni costanti sono continue.
- La funzione $f(x) = x$ è continua.
- Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora sono continue anche $f(x)+g(x), \quad k\,f(x), \quad f(x)\cdot g(x)$.
- Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche $f(x)/g(x)$ è continua in x_0.

TEOREMA 1.7. *I polinomi sono funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$.*
Le funzioni razionali sono continue in $\mathbb{R}$ privato degli eventuali punti in cui si annulla il denominatore.

PROPOSIZIONE 1.8. *Possono essere discontinue in un punto x_0 tutte quelle funzioni $f(x)$ assegnate con procedimenti differenti a sinistra e a destra di x_0: il motivo risiede nel fatto che i due limiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ possono risultare differenti.*

ESEMPIO 1.9. *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & se \quad x \leq 1 \\ 2+x & se \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2-x) = 1 \\ \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2+x) = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

discontinuità in $x_0 = 1$.

Il grafico di una funzione definita in un intervallo mostra con molta evidenza la presenza o meno di punti dell'intervallo in cui la funzione sia discontinua: si tratta di quei punti in corrispondenza dei quali la curva grafico si interrompe:

- salti (funzioni $[x]$, $\text{sign}(x)$, ...)
- asintoti verticali ($1/x$, ...)
- limiti inesistenti in un punto ($\sin(1/x)$, ...)

OSSERVAZIONE 1.10. *La funzione* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *è continua, naturalmente in tutto l'insieme in cui è definita, insieme che non contiene lo zero.*

Dichiarare che non è continua in zero è sbagliato: la dichiarazione semmai giusta è « non è definita in zero».

1.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare quanto ci si possa allontanare con x da 1 con la certezza che riesca $|x^3 - 1| \leq 0.1$.
(2) ▶▶ Determinare in quali punti la funzione $f(x) = [3x+1]$ è discontinua.
(3) ▶▶ Disegnare il grafico di $f(x) = |x-1| - |x|$ e valutare se sia o meno continua in ogni punto.

2. La permanenza del segno

Una funzione f continua che produca in un punto x_0 un valore $f(x_0) > 0$ produce sicuramente valori $f(x)$ ancora positivi nei punti x sufficientemente vicini a x_0, in quanto $f(x) \approx f(x_0)$.

Analogamente se $f(x_0) < 0$ saranno anche negativi i valori $f(x)$ nei punti x sufficientemente vicini a x_0.

Questo, evidente, fenomeno si chiama *permanenza del segno*.

ESEMPIO 2.1. *La funzione* $f(x) = x(1-x)$ *nel punto* $x_0 = 1/2$ *ha il valore* $f(x_0) = 1/4 > 0$*: in tutti i punti dell'intervallo* $(0,1)$ *i valori* $f(x)$ *continuano a essere positivi.*

ESEMPIO 2.2. *La funzione (non continua) $f(x) = [x]$, parte intera, vale 1 nel punto $x_0 = 1$ ma non è vero che si mantenga positiva nei punti sufficientemente vicini. Sui punti $0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ certamente vicini a $x_0 = 1$ la parte intera vale zero, che non è un numero positivo.*

OSSERVAZIONE 2.3. *Come esiste un Teorema della permanenza del segno non esiste un (fantasioso) Teorema della permanenza dello zero.*

Una funzione continua può valere zero in un punto x_0 ma non c'è alcun motivo che... permanga zero nei punti vicini.

Il sapere del resto che $f(x_0) = 0$ non consente di pronunciarsi neanche sul segno dei valori $f(x)$ nei punti vicini:

- *potrebbero essere valori positivi, come accade per la x^2 vicino a $x_0 = 0$,*
- *potrebbero essere valori negativi, come accade per la $-x^2$ vicino a $x_0 = 0$,*
- *potrebbero essere sia positivi che negativi come accade per la x vicino a $x_0 = 0$.*

Si può solo dire che se $f(x_0) = 0$ allora

$$x \approx x_0 \quad \to \quad f(x) \approx 0$$

2.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $f(x) = 10 - x^3$: tenuto conto che $f(0) = 10 > 0$ determinare quanto x si possa allontanare dallo zero conservando tuttavia che $f(x) > 0$.
(2) ▶▶ Sia $f(x) = 1 + \text{sign}(x)$: tenuto conto che $f(0) = 1 > 0$ esaminare quanto ci si possa allontanare con x dallo zero garantendo tuttavia che $f(x) > 0$.
(3) ▶▶ Siano $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$: tenuto conto che $f(1) < g(1)$ esaminare quanto ci si possa allontanare con x da 1 garantendo tuttavia che $f(x) < g(x)$.

3. La favola del cardiopatico

C'era una volta ...

...un anziano signore cardiopatico: a lui il dottore aveva prescritto, insieme a molte altre cure, una grande attenzione alle variazioni di altitudine.

Il signore, che teneva molto al potersi muovere, aveva chiesto al dottore quanta strada poter fare comunque nelle sue camminate quotidiane: il dottore, dopo lunga riflessione aveva concesso al suo paziente passeggiate di non più di due kilometri, passeggiate che non lo avrebbero esposto a rischi.

Effettivamente l'anziano signore passeggiò per la sua città in pianura Padana tutto l'inverno senza difficoltà; l'estate poi pensò a una buona villeggiatura a Cortina d'Ampezzo.

Fu una vera fortuna che nella bella cittadina delle Dolomiti ci fosse un ottimo ospedale: l'anziano signore infatti già a metà della passegiata che il dottore gli aveva concesso si era esposto a un grande aumento di altitudine che aveva messo in seria difficoltà il suo cuore già malandato.

Morale della favola: sia, ad esempio $f(x) = x^2$ spostandosi di 1 da $x_0 = 2$ a $x = 3$ i valori $f(x)$ passano da $f(2) = 4$ e $f(3) = 9$, cioè aumentano di 5.

Un analogo spostamente di 1 ma fatto da $x_0 = 10$ a $x = 11$ fa passare da $f(10) = 100$ a $f(11) = 121$, con un aumento di 21, più di quattro volte il precedente.

Si capisce quindi che a parità di spostamento le variazioni della funzione $f(x) = x^2$ saranno via via maggiori partendo da punti x_0 via via maggiori.

Ci sono funzioni continue particolarmente regolari per le quali per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una distanza adatta δ_ε tale che

$$|x_1 - x_2| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

qualunque siano i due punti x_1 e x_2 purchè distanti tra loro meno di δ_ε: queste funzioni particolarmente regolari si chiamano *uniformemente continue.*

ESEMPIO 3.1. *Le funzioni $f(x) = mx + q$ sono uniformente continue: infatti $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$ e quindi*

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{\varepsilon}{m} \quad \to \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon$$

ESEMPIO 3.2. *La funzione $f(x) = x^2$ non è, come abbiamo immaginato sopra, uniformemente continua.*

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare quanto si possano prendere lontani due punti x_1, x_2 garantendo tuttavia che riesca $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq 0.5$.

(2) ▶▶ Sia $f(x) = 1 + x^2$: calcolare le variazioni

$$f(n+1) - f(n)$$

al variare di $n \in [0, 10]$.

(3) ▶▶ Sia $f(x) = e^{-x^2}$: disegnare il grafico e valutare, osservando le sue pendenze, se si tratti di una funzione *uniformemente continua.*

4. I valori intermedi

Per passare dalla quota 800 *m s.l.m.* alla quota 1500 *m s.l.m.* un escursionista passa, necessariamente, anche per ogni quota intermedia, e può anche passare (eventuali valichi o valli da traversare) anche per qualche quota superiore e qualcuna inferiore, senza tuttavia che questi ultimi passaggi debbano necessariamente accadere.

TEOREMA 4.1. *Sia $f(x)$ continua nell'intervallo I (limitato o non limitato) e siano $a,b \in I$: al variare di $x \in [a,b]$ $f(x)$ produce almeno tutti i valori η intermedi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

OSSERVAZIONE 4.2. *Questo significa che $\forall \eta \in [f(a), f(b)]$ l'equazione*

$$f(x) = \eta,$$

ammette soluzioni $c \in [a,b]$, cioè esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ in cui riesca $f(c) = \eta$.

DIMOSTRAZIONE. Il risultato, che rinunciamo a dimostrare nei dettagli, si basa sull'impossibilità per una funzione continua di fare salti. □

COROLLARIO 4.3. *Il teorema d'esistenza degli zeri: se f è continua in $[a,b]$ e se ci sono in $[a,b]$ due punti in cui la funzione produca valori di segno opposto allora tra i due c'è almeno un punto in cui la funzione vale zero.*

4.1. Vantaggi del teorema dei valori intermedi.

Supponiamo di volerci convincere dell'esistenza della radice

$$\sqrt[17]{123}$$

numero assolutamente poco noto e poco immaginabile.

Consideriamo la funzione continua in $\mathbb{R}$: $f(x) = x^{17}$.

Scelti $a = 0$ e $b = 10$ si ha

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 100.000.000.000.000.000$$

Il numero $\eta = 123$ certamente è intermedio tra $f(a)$ e $f(b)$ pertanto, per il teorema dei valori intermedi, esiste sicuramente qualche numero $c \in (0,10)$ in cui riesca $f(c) = 123$ ovvero

$$c^{17} = 123, \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt[17]{123}$$

Che tale numero[1] sia poi unico lo si ricava dall'osservare che $f(x) = x^{17}$ è strettamente crescente e quindi non può produrre lo stesso valore 123 in due punti diversi.

[1] Attenzione: essere sicuri che tale numero esista non significa che ne conosciamo con sicurezza le cifre...!

4.2. Un'equazione difficile. $\boxed{x^{17}+5x^5-\pi=0}$

Ha radici la terribile equazione proposta ?

Sì certamente: considerata la funzione

$$f(x) = x^{17} + 5x^5 - \pi, \qquad x \in \mathbb{R}$$

è facile riconoscere che

$$f(-10) < 0 \qquad f(10) > 0$$

quindi, teorema d'esistenza degli zeri esiste qualche $c \in [-10, 10]$ in cui riesce

$$f(c) = 0$$

Il requisito fondamentale nell'esempio proposto è stato il grado dispari del polinomio $x^{17} + 5x^5 - \pi$ che ci ha facilmente consentito di trovare un punto $a = -10$ in cui $f(a) < 0$ e un punto $b = 10$ in cui $f(b) > 0$.

OSSERVAZIONE 4.4. *I due precedenti risultati - il teorema dei valori intermedi e il teorema d'esistenza degli zeri - di pagina 167, riguardano funzioni continue in* ***intervalli*** .

Si noti infatti, ad esempio il caso della funzione continua $f(x) = \dfrac{1}{x}$*:*

$$f(-1) = -1 < 0, \qquad f(1) = 1 > 0$$

tuttavia non esiste alcun punto $x_0 \in [-1, 1]$ *in cui* $f(x_0) = 0$.

Perchè non vale il teorema d'esistenza degli zeri ?

Perchè la funzione non è continua nell'intervallo $[-1, 1]$, *semplicemente perchè non è definita in tutto* $[-1, 1]$, *non è infatti definita in* 0 *!*

Il famoso discorso sul grafico delle funzioni continue che si traccia senza alzare la matita dal foglio vale quindi solo per le funzioni continue definite in un intervallo.

L'insieme di definizione di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *non è un intervallo: non è scandaloso che il suo grafico non si tracci interamente senza alzare la matita dal foglio.*

ESEMPIO 4.5. *Sia* $f(x)$ *continua in* $[0, 2]$ *e riesca* $f(0) = f(2)$*: allora esiste certamente almeno un punto* $c \in (0, 2)$ *tale che* $f(c) = f(c+1)$.

Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - f(x+1)$*: si ha*

$$\begin{cases} g(0) = f(0) - f(1) = & A \\ g(1) = f(1) - f(2) = & f(1) - f(0) = -A \end{cases}$$

Se $A = 0$ *allora il punto* 0 *corrisponde al c cercato.*

Se invece $A \neq 0$ *allora la* $g(x)$ *prende valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo* $[0, 1]$, *quindi, Corollario 4.3,* $\exists \xi \in (0, 1)$ *in cui* $g(\xi) = 0$. *Il punto* ξ *corrisponde al c cercato.*

4.3. La media e il teorema dei valori intermedi. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo I, limitato o meno, chiuso o meno: presi n punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ in I consideriamo il valore

$$media = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

esiste almeno un punto $\xi \in I$ in cui riesce $f(\xi) = media$.

Infatti siano x_m e x_M i due punti tra gli n assegnati in cui la f prenda il minimo e rispettivamente il massimo tra i valori $f(x_1), \dots, f(x_n)$

$$\forall i \in [1,n]: \quad f(x_m) \leq f(x_i) \leq f(x_M) \quad \to \quad f(x_m) \leq media \leq f(x_M)$$

Riconosciuto che $media \in [f(x_m), f(x_M)]$ il teorema dei valori intemedi assicura che c'è $\xi \in I$ tale che $media = f(\xi)$.

4.4. Esercizi.

(1) ►► Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{16+x^2}}{1+x^2}$: tenuto conto che $f(0) = 4$ e $f(3) = 0.5$ indicare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha sicuramente soluzioni.

(2) ►► Tenuto presente che

$$\lim_{x \to -\pi/2} \tan(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\pi/2} \tan(x) = +\infty$$

indicare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha sicuramente soluzioni.

(3) ►► Trovare esempi di funzioni $f(x)$ tali che per $x \in [0,1]$ producano valori $f(x)$ non tutti contenuti in $[f(0), f(1)]$ (aiutarsi con grafici).

5. Il metodo di bisezione

Supponiamo di dover risolvere l'equazione

$$f(x) = 0$$

essendo f una funzione continua in $[a,b]$ della quale sappiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Il teorema d'esistenza degli zeri assicura che ci sono punti tra a e b in cui la funzione vale zero: in altri termini assicura che l'equazione proposta ha radici $x_0 \in [a,b]$.

Il problema numericamente importante che, comunque, resta da risolvere è fornire utili approssimazioni di tali radici.

Una prima approssimazione automatica e banale è la seguente:

- sia $h = \frac{1}{2}(b-a)$ la semilunghezza dell'intervallo,
- sia $c_0 = \frac{1}{2}(a+b)$ il punto medio

Ne segue per il punto $x_0 \in [a,b]$ in cui $f(x_0) = 0$

$$|x_0 - c_0| \le h$$

cioè il punto medio c_0 non differisce dalla ignota radice x_0 per più di h.

Se $f(c_0) \neq 0$ e l'approssimazione di x_0 con c_0 non fosse soddisfacente si può

- se $f(c_0) > 0$ riconoscere che ci sono radici dell'equazione $x_0 \in [a, c_0]$
- se $f(c_0) < 0$ riconoscere che ci sono radici dell'equazione $x_0 \in [c_0, b]$

ripetere il ragionamento precedente riferendosi al semintervallo in cui ci sono radici.

Il punto medio c_1 del semintervallo scelto costituisce una approssimazione di x_0 migliore infatti:

$$|x_0 - c_1| \le \frac{1}{2}\, h$$

Il ricorrere a intervalli dimezzati giustifica il nome di *metodo di bisezione*.

Il procedimento avviato può naturalmente iterarsi ottenendo approssimazioni via via migliori.

ESEMPIO 5.1. *Consideriamola funzione $f(x) = x^2 - 7$: l'equazione $f(x) = 0$ ha certamente radici $x_0 \in [1,4]$ in quanto $f(1) < 0$ e $f(4) > 0$.*

La prima approssimazione di x_0 è il punto medio dell'intervallo $c_0 = 2.5$: sicuramente riesce

$$|x_0 - 2.5| \le 1.5$$

Tenuto conto che $f(2.5) < 0$ siamo sicuri che l'equazione $f(x) = 0$ ha radici $x_0 \in [2.5, 4]$. Detto $c_1 = 3.25$ il punto medio di questo primo semintervallo si ha la stima

$$|x_0 - 3.25| \le 0.75$$

Tenuto conto che $f(3.25) > 0$ siamo sicuri che l'equazione $f(x) = 0$ ha radici $x_0 \in [2.5, 3.25]$. Detto $c_2 = 2.875$ il punto medio di questo semintervallo si ha la stima

$$|x_0 - 2.875| \le 0.375$$

Il procedimento si può naturalmente iterare o meglio implementare su un computer in modo da poterlo facilmente e rapidamente iterare.

5.1. Esercizi.

(1) ►► Approssimare la radice $x_0 \in [0,1]$ dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ con un errore minore di $1/16$ usando il metodo di bisezione.

(2) ►► Approssimare la radice $x_0 \in [-1, 0]$ dell'equazione $e^x + x = 0$ con un errore minore di $1/16$ usando il metodo di bisezione.

(3) ►► Approssimare $\sqrt{2}$ con un errore minore di 0.1 usando il metodo di bisezione.

6. Il prolungamento per continuità

Il caso esemplare è la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

in cui la funzione $\sin(x)$ sia riferita ai *radianti*.

Si tratta di una funzione continua definita in $\mathbb{R} - \{0\}$. Tenuto conto che esiste[2]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

allora la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

si chiama *prolungamento per continuità* di $f(x)$ sullo zero.

ESEMPIO 6.1. *Quali delle seguenti funzioni*

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x+1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

si possono prolungare per continuità sullo zero ?

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *no,*
- $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *sì,*
- $(x+1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *no,*
- $x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *sì.*

Nelle due risposte positive il motivo sta nel fattore x e x^2 a moltiplicare che essendo infinitesimo abbatte le folli oscillazioni di $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il prolungamento per continuità di $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ sullo zero.

(2) ▶▶ Determinare su quale dei punti $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ è prolungabile per continuità la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$.

(3) ▶▶ Determinare il prolungamento per continuità di $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ sullo zero.

[2]Provate a calcolare tale quoziente con una calcolatrice pensando a $x = 0.1, \quad 0.01, \ldots$

7. Il teorema di Weierstrass

Le funzioni f continue in un intervallo limitato $I = [a,b]$ chiuso (cioè includente gli estremi) hanno tutte minimo e massimo.

Esistono cioè punti $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] : \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

I punti x_m e x_M si dicono punti di minimo e punti di Massimo: il plurale si riferisce al fatto che possono essercene più d'uno.

I due numeri $f(x_m)$ e $f(x_M)$ sono il minimo e il Massimo dei valori che la funzione produce per $x \in [a,b]$.

TEOREMA 7.1 (Weierstrass). *Le funzioni f continue in tutti i punti di un intervallo limitato $I = [a,b]$ chiuso hanno minimo e hanno massimo.*

ESEMPIO 7.2. *Sia $f(x) = x(1-x)$ considerata nell'intervallo $I = [0,1]$: esistono due punti di minimo 0 e 1 e un punto di massimo $1/2$. Il minimo è $f(0) = f(1) = 0$ mentre il massimo è $f(1/2) = 1/4$*

$$\forall x \in [0,1] : \; 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Si noti che le tre condizioni poste

- limitatezza dell'intervallo $[a,b]$
- funzione definita anche sugli estremi dell'intervallo,
- continuità in tutti i punti.

sono tutte importanti, nel senso che lasciandone cadere una o piu d'una si può perdere l'esistenza del minimo o del massimo.

Così, ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ definita su tutto $\mathbb{R}$ (intervallo non limitato) non ha massimo.

La funzione $f(x) = 1/x$ definita sull'intervallo $(0.1]$, ma non sull'estremo 0 non ha massimo.

La funzione $f(x) = x - [x]$ definita in $[0,1]$ non ha massimo, non è infatti continua in 1.

7.1. Il caso dell'intera retta reale.

Numerose funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$, intervallo non limitato: per esse quindi non si dispone del teorema di Weierstrass che si riferisce al caso di intervalli chiusi e limitati.

Funzioni regolarissime, definite sull'intero $\mathbb{R}$ possono, come ad esempio $f(x) = x^3$ essere illimitate: tuttavia se $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ possiede finiti i due limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

allora la funzione è limitata, cioè i suoi valori $f(x)$ sono contenuti in un intervallo limitato.

Infatti l'esistenza dei due limiti garantisce che esistono a e b tali che

$$x \leq a \quad \rightarrow \quad \ell - 1 \leq f(x) \qquad b \leq x \quad \rightarrow \quad f(x) \leq L + 1$$

e la continuità in $[a,b]$ garantisce (teorema di Weierstrass) l'esistenza di $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] : \ f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$ si ha pertanto

$$\min(\ell - 1, f(x_m)) \leq f(x) \leq \max(L + 1, f(x_M))$$

ESEMPIO 7.3. *La funzione* $f(x) = \arctan(x)$ *è continua in tutto* $\mathbb{R}$*, ed ha limiti finiti*

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

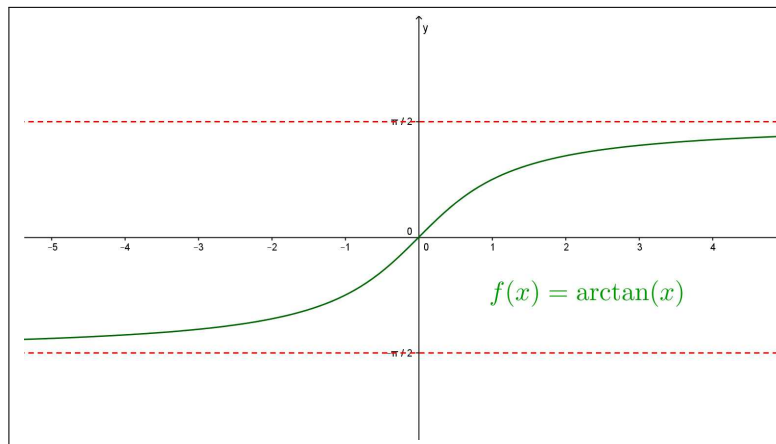



FIGURA 1. $f(x) = \arctan(x)$

$\arctan(x)$ *è limitata:* $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$*. Si osservi che, tuttavia la* $\arctan(x)$ *non ha nè minimo nè massimo.*

La funzione $g(x) = e^{-x^2}$ *è continua in tutto* $\mathbb{R}$*, ed ha limiti finiti*

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$

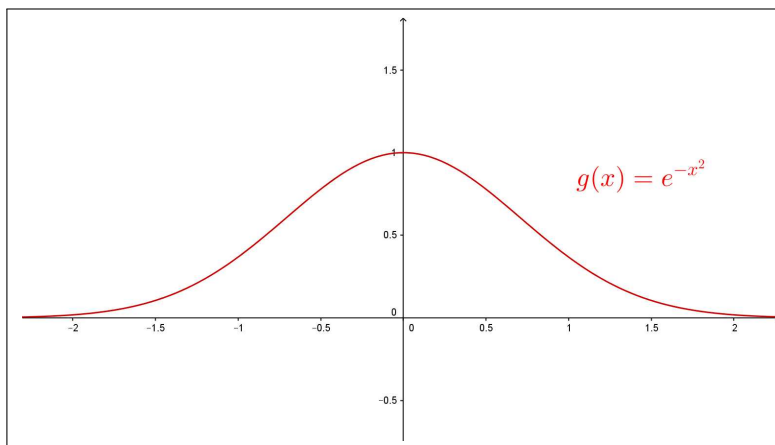



FIGURA 2. $g(x) = e^{-x^2}$

e^{-x^2} *è limitata:* $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$.
$g(x) = e^{-x^2}$ *ha massimo,* $g(0) = 1$*, ma non ha minimo.*

La funzione $s(x) = 1 + \frac{x}{1+x^2}$ *è continua in tutto* $\mathbb{R}$*, ed ha limiti finiti*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right) = 1$$

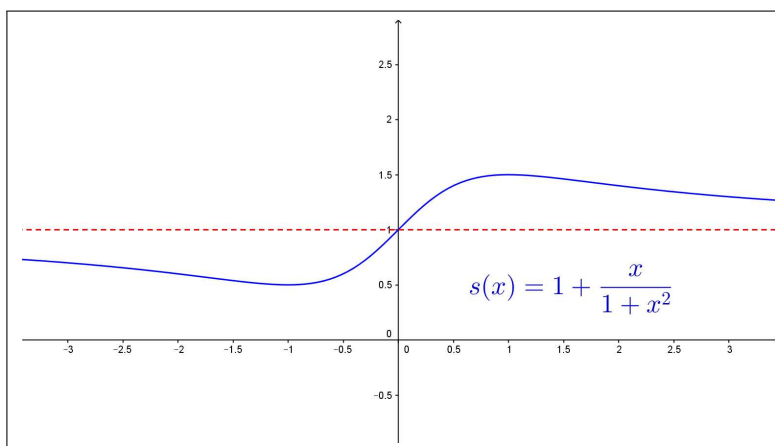



FIGURA 3. $g(x) = 1 + \frac{x}{1+x^2}$

$1 + \dfrac{x}{1+x^2}$ *è limitata:* $\dfrac{1}{2} \leq 1 + \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{3}{2}$.

OSSERVAZIONE 7.4. *Se la funzione* $f(x)$ *continua in* $\mathbb{R}$ *possiede i due limiti*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

finiti e uguali allora non solo $f(x)$ è limitata ma possiede almeno uno fra minimo e massimo.

Il secondo e il terzo dei tre casi riportati nell'esempio precedente lo confermano.

7.2. Esercizi.

(1) ►► Provare che $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ ammette minimo e massimo in $\mathbb{R}$.

(2) ►► Assegnate le due funzioni $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = 1 - e^{1-x^2}$ determinare quale è dotata di minimo e quale di massimo in $\mathbb{R}$.

(3) ►► Esaminare se la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ prolungata per continuità sullo zero, abbia minimo e massimo in $\mathbb{R}$.

CAPITOLO 13

Le derivate

1. Velocità media, velocità instantanea

Supponiamo che un automobilista abbia percorso 600 km in 6 ore: la sua velocità media è stata di 100 km orari.

Un'indagine più precisa ha condotto a riconoscere che:

- nelle prime 2 ore ha percorsi appena 100 km,
- nelle due ore successive ha percorsi addirittura 300 km, forse un lungo tratto autostradale,
- nelle ultime due ore di viaggio ha percorsi 200 km.

La velocità media di 100 km/h, tenendo conto delle maggiori informazioni raccolte come pure dei presumibili rallentamenti non sembra corrispondere all'effettivo svolgimento del viaggio.

In conclusione, la media di 100 km ora non fornisce indicazioni delle reali velocità con cui si è viaggiato durante le 6 ore.

Già più interessanti appaiono le medie *parziali*

- nelle prime due ore la velocità media è stata circa 50 km/h,
- nelle successive due ore la velocità media è stata di 150 km/h[1],
- nelle ultime due ore la velocità media è stata di 100 km/h.

Un insieme di informazioni più dettagliato avrebbe potuto, ad esempio, mostrare che le prime due ore in cui ha percorsi solo 100 km sono suddivise in:

- 1 ora in cui si sono traversati due centri urbani per complessivi 20 km, alla media di 20 km/h,
- 1 ora in cui sono stati percorsi 80 km su una strada nazionale viaggiando a una media di 80 km/h.

Analoghe informazioni aggiuntive avrebbero permesso di descrivere meglio anche il tipo di viaggio nelle ore successive.

[1] Gravemente sanzionabile in Italia.

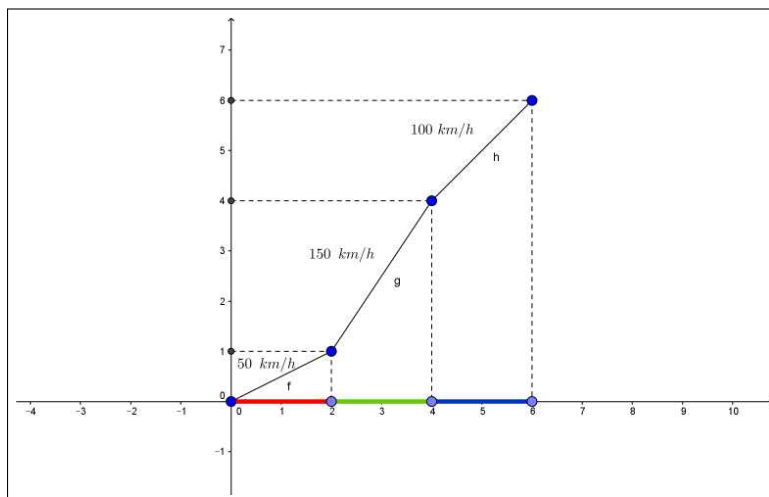



FIGURA 1. Diagramma del viaggio

Concludendo si riconosce che la velocità media nell'intervallo di tempo $[t_A, t_B]$ durante il quale si è percorsdo il tratto $[s_A, s_B]$

$$v = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A}$$

è tanto più significativa quanto più riferita a intervalli di tempo brevi.

In luogo di dichiarare che quell'automobilista ha viaggiato le prime due ore alla velocità media di 50 km/h avrebbe molto più interesse poter dire in ciascuno dei 120 minuti di quelle due ore quale sia stata la velocità effettiva:

- i minuti t_0 in cui stava addirittura fermo in coda, $v(t_0) = 0$,
- i minuti t_1 in cui viaggiava addirittura a 90 km/h, $v(t_1) = 90$,
- i minuti t_2 in cui, rispettoso dei centri abitati, viaggiava a 45 km/h, $v(t_2) = 45$,
- ecc. ecc.

DEFINIZIONE 1.1. *Detta $s(t)$ la funzione che associa ad ogni tempo il kilometraggio percorso, si possono considerare*

- *in ogni intervallo* $[t_0, t_0 + \Delta]$ *la* velocità media
$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta) - s(t_0)}{\Delta}$$
- *assegnato un tempo* t_0 *la* velocità istantanea al tempo t_0
$$v(t_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta) - s(t_0)}{\Delta}$$

La velocità *valutata* al tempo t_0, ovvero transitando al kilometro $s(t_0)$, che misurano gli apparecchi *autovelox* della polizia, si deduce dal tempo Δt trascorso per

passare avanti a due controlli posti a distanza Δs abbastanza piccola tra loro: il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ esprime la velocità *valutata* al tempo t_0.

Questo rapporto ha maggiore interesse della velocità media su un tratto più o meno lungo che, come visto sopra, può fornire dati assai poco aderenti alla realtà.

Il valore *valutato* dagli *autovelox* è una ragionevole stima della velocità istantanea $v(t_0)$.

La *velocità istantanea* è frutto di un procedimento applicato al *rapporto incrementale della funzione s*

$$\frac{s(t_0+\Delta)-s(t_0)}{\Delta}.$$

Il limite di tale rapporto, cioè il valore verso il quale il rapporto si approssima mano mano che Δ è più piccolo, ha il nome classico di *derivata della funzione s in t_0*, si indica tradizionalmente con $s'(t_0)$ e rappresenta la *velocità istantanea*.

2. I rapporti incrementali

Si incontrano *rapporti incrementali* in moltissime occasioni: tutte le volte che ha interesse calcolare quanto varino i valori $f(x)$ di una funzione f al variare della x.

Indagini di questo tipo riguardano in prima istanza il decidere se all'*aumentare x aumenti $f(x)$* o viceversa $f(x)$ *cali.*

Le indagini che coinvolgono i rapporti incrementali sono anche più fini: servono a valutare

> *quale incremento, cioè quale variazione, $f(x+\Delta)-f(x)$ sui valori della funzione sia prodotto da un incremento, una variazione, Δ della variabile da x a $x+\Delta$* [2]

ESEMPIO 2.1. *Sia $f(x)=x^2$ passando da $x_0=1$ a x_0+2 si ha*

$$\frac{f(1+2)-f(1)}{2}=\frac{f(3)-f(1)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Uno stesso incremento $\Delta=2$ partendo da $x_0=5$ avrebbe portato a

$$\frac{f(5+2)-f(5)}{2}=\frac{f(7)-f(5)}{2}=\frac{24}{2}=12$$

Riferendoci invece a x e Δ generici avremmo

$$\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}=\frac{(x+\Delta)^2-x^2}{\Delta}=\frac{x^2+2x\Delta+\Delta^2-x^2}{\Delta}=2x+\Delta$$

da cui, pensando al limite per $\Delta\to 0$ avremo

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}(2x+\Delta)=2x$$

[2] Naturalmente Δ può anche essere negativo.

L'espressione trovata $2x$ dipende da x, cioè è una funzione di x che si chiama *derivata di* x^2 e si indica con uno dei simboli

$$(x^2)' = 2x, \qquad \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

2.1. Il differenziale.
Si noti l'evidente approssimazione

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} = f'(x_0) \quad \to \quad f(x_0+\Delta) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta$$

spesso utilizzata nelle applicazioni.

Il valore $f'(x_0)\,\Delta$ si chiama *differenziale* della funzione

- nel punto x_0
- relativo all'incremento Δ

e si indica tradizionalmente con la breve notazione df.

L'approssimazione indicata consiste, con la notazione introdotta, a

$$f(x_0+\Delta) - f(x_0) \approx df$$

2.2. Derivazione dei polinomi.
Il calcolo del limite

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{P(x+\Delta) - P(x)}{\Delta}$$

è ben noto per i polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$:

Consideriamo i casi

- $n = 0: \quad P(x+\Delta) - P(x) \equiv 0 \quad \to \quad P'(x) \equiv 0,$
- $n = 1: \quad \dfrac{P(x+\Delta) - P(x)}{\Delta} \equiv a_1 \quad \to \quad P'(x) \equiv a_1$
- $n = 2: \quad \dfrac{P(x+\Delta) - P(x)}{\Delta} \equiv 2a_2 x + a_2\Delta + a_1 \quad \to$

$$P'(x) \equiv 2a_2 x + a_1$$

- $n = 3:$

$$\frac{P(x+\Delta) - P(x)}{\Delta} \equiv 3a_3 x^2 + 3a_3 x\Delta + a_3\Delta^2 + 2a_2 x + a_2\Delta + a_1 \quad \to$$

$$P'(x) \equiv 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

Da cui, in generale,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \to \quad P'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$$

2.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $f(x) = \frac{1}{1+x}$: determinare il rapporto incrementale relativo a $x_0 = 1$ e $\Delta = 0.5$
(2) ▶▶ Sia $f(x) = 1 + x^3$: scelti $x_0 = 1$ e $\Delta = 0.5$ calcolare $f(x_0+\Delta) - f(x_0)$ e df sempre relativo a $x_0 = 1$ e $\Delta = 0.5$.
(3) ▶▶ Calcolare la deerivata di $f(x) = 17x^{13} - 13x^{17}$ nel punto $x_0 = 1$.

3. Il significato geometrico

Assegnata una funzione f e scelti due punti x_0 e $x_0 + \Delta$ del suo dominio possiamo considerare la retta determinata dai due punti

$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \quad P = (x_0+\Delta, f(x_0+\Delta))$$

L'equazione di questa retta è

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta}(x - x_0)$$

In termini di grafico la retta per i due punti P_0 e P del grafico sarà una secante del grafico di f e, per $\Delta \approx 0$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta}(x - x_0) \quad \approx \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

la retta assume la posizione intuitivamente detta di *tangente al grafico in* P_0

ESEMPIO 3.1. *Sia* $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ *la retta tangente al grafico nel punto* $P_0 = (1, -1)$ *ha equazione*

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = -1 + (x-1) \quad \to \quad y = x - 2$$

È interessante notare che se $f'(x_0) = 0$ allora la retta tangente è orizzontale.

3.1. Le tangenti alla parabola: un curioso fenomeno. Consideriamo la parabola grafico della funzione $f(x) = x^2$ e determiniamo le equazioni delle tangenti nei punti di ascissa intera:

$$\begin{array}{lclcl}
x_0 = -1 & \to & y = 1 - 2(x+1) & \to & y = -2x - 1 \\
x_0 = 0 & \to & y = 0 - 0(x+1) & \to & y = 0 \\
x_0 = 1 & \to & y = 1 + 2(x-1) & \to & y = 2x - 1 \\
x_0 = 2 & \to & y = 4 + 4(x-2) & \to & y = 4x - 4 \\
x_0 = 3 & \to & y = 9 + 6(x-3) & \to & y = 6x - 9 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

È evidente l'espressione delle tangenti leggibile servendosi della funzione $\text{Round}(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, vedi pagina 65:

$$y = 2\,\text{Round}(x_0)\,x - \text{Round}^2(x_0)$$

Non solo ma la funzione

$$f(x) = 2\,\text{Round}(x)\,x - \text{Round}^2(x)$$

composta delle funzioni non continue $\text{Round}(x)$ è continua e il suo grafico è la spezzata formata dalle diverse tangenti della parabola $y = x^2$.

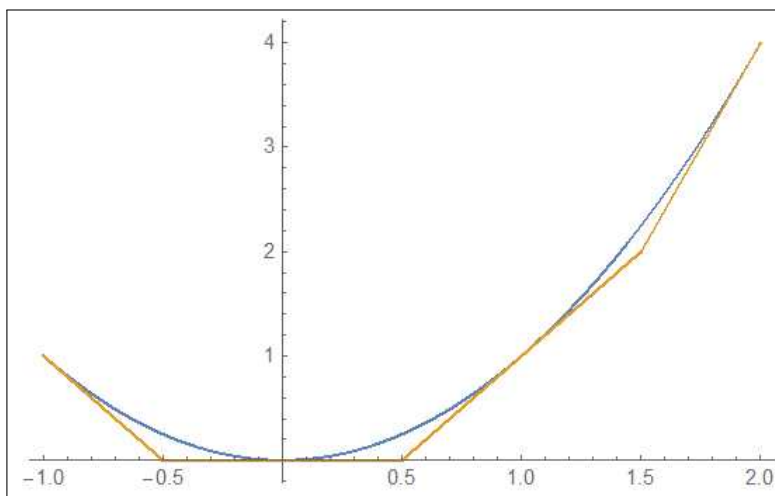



FIGURA 2. $f(x) = 2\,\text{Round}(x)\,x - \text{Round}^2(x)$

3.2. Le normali.

Riconosciuto che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

si può determinare anche l'equazione della perpendicolare al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$: si tratta della retta per tale punto, perpendicolare alla tangente, quindi, se $f'(x_0) \neq 0$,

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

Tale retta perpendicolare si chiama anche *normale* al grafico.

Se $f'(x_0) = 0$, cioè se la retta tangente è $y = f(x_0)$, orizzontale, la normale è, ovviamente la retta $x = x_0$, verticale.

ESEMPIO 3.2. *Sia $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e sia $x_0 = 1$: le rette*

$$y = f(1) + f'(1)\,(x - 1), \quad y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}(x - 1)$$

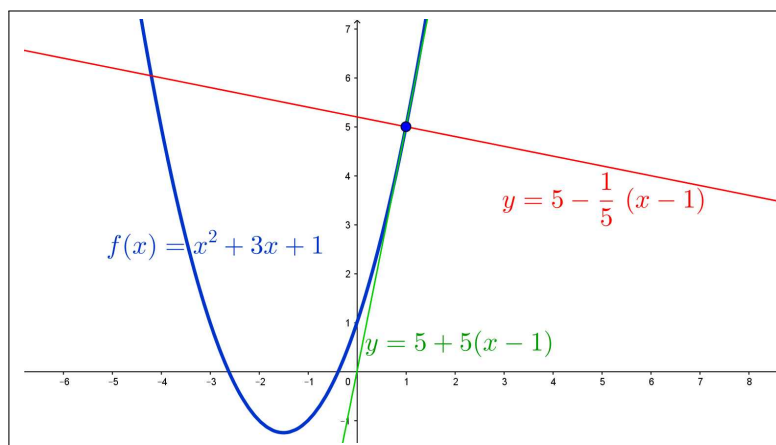



FIGURA 3. Tangente e normale a $f(x) = x^2 + 3x + 1$

cioè

$$y = 5 + 5(x - 1), \quad y = 5 - \frac{1}{5}(x - 1)$$

sono rispettivamente la tangente e la normale al grafico di f nel punto $(1, 5)$.

3.3. Esercizi.

(1) ►► Determinare l'equazione della tangente al grafico di $f(x) = x(1 - x^2)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.
(2) ►► Determinare le ascisse dei punti in cui la tangente al grafico di $f(x) = x(1 - x^2)$ è orizzontale.
(3) ►► Determinare le ascisse dei punti in cui la tangente al grafico di $f(x) = x(1 - x^2)$ è parallela alla retta $y = x$.

4. Una funzione non derivabile

Si consideri la funzione $f(x) = |x|$: il rapporto incrementale nell'origine è

$$\frac{|0 + h| - |0|}{h} = \begin{cases} \dfrac{-h}{h} & \text{se} \quad h < 0 \\ \\ \dfrac{h}{h} & \text{se} \quad h > 0 \end{cases}$$

Vale quindi sempre -1 per $h < 0$ e sempre 1 per $h > 0$, quindi il limite da sinistra è -1 e il limite da destra è 1: differenti.

Il rapporto incrementale della $f(x) = |x|$ nell'origine non ha quindi limite.

La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nell'origine.

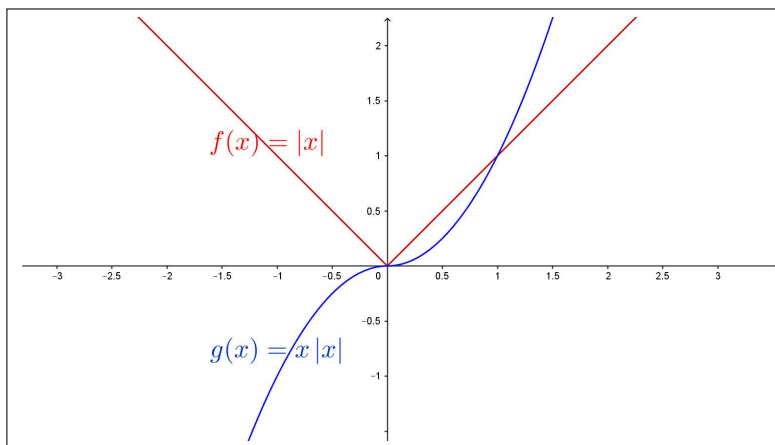



FIGURA 4. $|x|$ e $x|x|$

ESEMPIO 4.1. *La funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile nell'origine: infatti*

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = |h| \quad \to \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0$$

4.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $f(x) = \sqrt{|x|}$: scrivere il rapporto incrementale di f nell'origine e esaminare se f sia o meno derivbile in tale punto.
(2) ▶▶ Sia $f(x) = \sqrt{|\sin(x)|}$: scrivere il rapporto incrementale di f nei punti $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ e esaminare se f sia o meno derivbile in tali punti.
(3) ▶▶ Sia

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se \quad x \leq 0 \\ x^2 + ax & se \quad x > 0 \end{cases}$$

scrivere il rapporto incrementale di f nell'origine e esaminare per quali a f sia o meno derivabile in tale punto.

5. Regole di derivazione

Siano f e g due funzioni derivabili: semplici manipolazioni algebriche dei rapporti incrementali conducono alle seguenti regole di derivazione:

$$\begin{cases} (f(x) \pm g(x))' & = f'(x) \pm g'(x) \\ \\ (f(x) \cdot g(x))' & = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \\ \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' & = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{cases}$$

Verifichiamo tali regole su un esempio: pensiamo $f(x) = 3x^2 + 5x$ e $g(x) = 2x$ per le quali si ha $f'(x) = 6x+5$ e $g'(x) = 2$

$$\begin{array}{llll} f(x)+g(x) & = 3x^2+7x & \to & (f(x)+g(x))' = 6x+7 & = f'(x)+g'(x) \\ f(x).g(x) & = 10x^2+6x^3 & \to & (f(x).g(x))' = 20x+18x^2 & = f'(x).g(x)+f(x).g'(x) \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} & = \dfrac{3x+5}{2} & \to & \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{3}{2} & = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{array}$$

5.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare le derivate di $f(x) = \dfrac{1+x}{1+2x}$ nei punti $x_n = 1, 2, 3$.
(2) ▶▶ Calcolare la derivata di $f(x) = (1+2x)^3\,(3-2x)^2$ in $x_0 = 0$.
(3) ▶▶ Calcolare la derivata di $f(x) = (1+x^2)\,\dfrac{1+x}{1+x^4}$ in $x_0 = -1$.

6. Funzioni trigonometriche e esponenziali

Aggiungendo alle formule di derivazione dei polinomi quelle delle funzioni trigonometriche

$$(\sin(x))' = \cos(x), \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

e quella dell'esponenziale (naturalmente quella di base e)

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad \to \quad (e^x)' \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots \quad \to \quad (e^x)' = e^x$$

si ottengono, servendosi anche delle Regole di derivazione elencate sopra, le espressioni delle derivate delle più comuni funzioni.

ESEMPIO 6.1. *Verifichiamo l'espressione fornita per la derivata di* $\sin(x)$*: tenuto conto che*

$$\sin(x+h)-\sin(x) = \sin(x)\,\cos(h)+\sin(h)\,\cos(x)-\sin(x) = \sin(x)\{\cos(h)-1\}+\sin(h)\,\cos(x)$$

si ha

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\,\frac{sin(h)}{h}$$

Osservando che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$$

come si riconosce anche servendosi di una semplice calcolatrice, si ha che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)$$

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare la derivata di $f(x) = \sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$.
(2) ▶▶ Calcolare la derivata di $f(x) = \cos(x)\tan(x)$.
(3) ▶▶ Calcolare la derivata di $f(x) = e^x + e^{-x}$.

7. Le funzioni composte

Consideriamo la funzione composta $F(x) = f[g(x)]$ ottenuta componendo funzioni derivabili, e consideriamo il suo incremento passando da x a $x + \Delta$:

$$F(x+\Delta) - F(x) = f[g(x+\Delta)] - f[g(x)]$$

Servendosi dell'approssimazione

$$g(x+\Delta) \approx g(x) + g'(x)\,\Delta$$

si ha, sostituendo a $g(x+\Delta)$ l'approssimazione precedente,

$$F(x+\Delta) - F(x) \approx f[g(x) + g'(x)\,\Delta] - f[g(x)]$$

Servendosi della stessa tecnica sulla f si ha

$$F(x+\Delta) - F(x) \approx f[g(x) + g'(x)\,\Delta] - f[g(x)] \approx f'[g(x)]\,g'(x)\,\Delta$$

Le approssimazioni osservate permettono di riconoscere che

$$\Delta \approx 0 \quad \to \quad \frac{f[g(x+\Delta)] - f[g(x)]}{\Delta} \approx \frac{f[g(x) + (g'(x)\,\Delta)] - f[g(x)]}{\Delta} \approx f'[g(x)]\,g'(x)$$

ovvero

$$f[g(x)]' = f'[g(x)]\,g'(x)$$

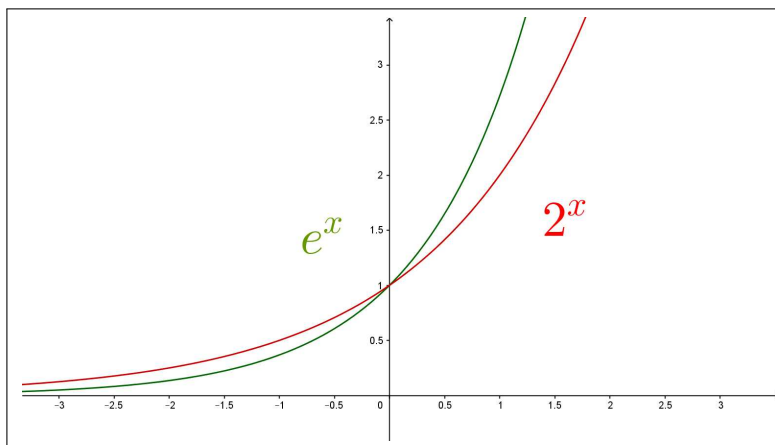



FIGURA 5. e^x, 2^x

ESEMPIO 7.1. *Consideriamo la funzione composta* $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 1)$ *si ha* $f'(x) = \cos(x^2 + 2x + 1)\,(2x + 2)$.

ESEMPIO 7.2. *Sia* $f(x) = 2^x$*: tenuto presente che*

$$2 = e^{\ln(2)} \quad \rightarrow \quad 2^x = e^{x\ln(2)} \quad \rightarrow \quad (2^x)' = e^{x\ln(2)}\ln(2)$$

Da cui

$$(2^x)' = 2^x \ln(2)$$

In Figura 5 *si vedono i due grafici: la derivata di* e^x *nell'origine vale* 1 *ed è più grande della derivata di* 2^x*, sempre nell'origine, che vale* $\ln(2) \approx 0,69314 < 1$.

7.1. Cambiamenti di variabile. Una lettura alternativa di quanto sopra - *derivazione di funzioni composte* - si incontra pensando ai **cambiamenti di variabile.**

Assegnata $f(x)$ se si sceglie di rappresentare x con un'espressione $x(t)$ si sta eseguendo un *cambiamento di variabile*.

I valori $f(x)$ diventano valori $f[x(t)]$ che dipendono da t e si può chiedere come varino al variare di t.

La regola di derivazione delle funzioni composte produce la risposta

$$\frac{d}{dt} f[x(t)] = f'[x(t)]\,x'(t)$$

dalla quale risulta che la variazione della funzione composta si esprime come prodotto di due variazioni

- la variazione di x al variare di t, $x'(t)$,
- la variazione di f al variare di x, $f'[x(t)]$

ESEMPIO 7.3. *Sia* $f(x) = x^2$*, scelto* $x(t) = t^3$ *consideriamo la funzione composta* $f[x(t)] = t^6$

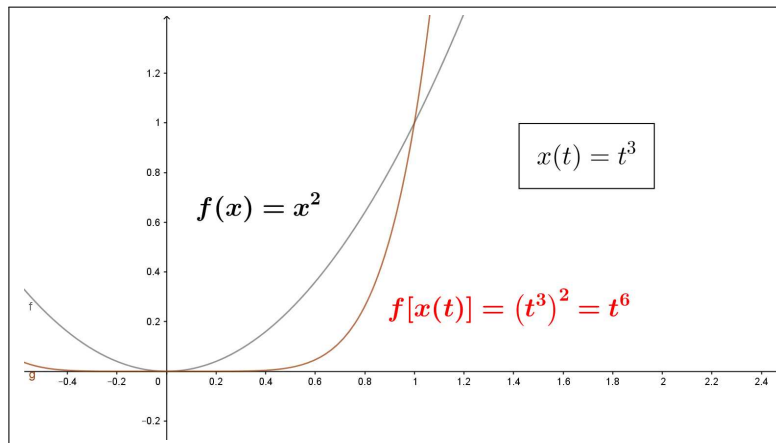



FIGURA 6. $f(x) = x^2,\ x(t) = t^3,\ F(t) = f[x(t)] = t^6$

In figura sono rappresentati i due grafici, quello di $f(x)$, e quello di $f[x(t)]$.

Osserviamo che $t \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [0,1]$ e quindi il codominio di $f(x)$ per $x \in [0,1]$ e quello di $f[x(t)]$ per $t \in [0,1]$ sono lo stesso.

ESEMPIO 7.4. *Sia $f(x) = x^2 + x + 1$, scelto di rappresentare x con l'espressione $x(t) = e^t$ avremo*

$$F(t) = f[x(t)] = e^{2t} + e^t + 1$$

- *spostare t da 0 a 1 equivale a spostare x da 1 a e,*
- $F(1) - F(0) = f[x(1)] - f[x(0)]$
- $f[x(1)] - f[x(0)] = f'(\xi)\ [x(1) - x(0)]$
- $x(1) - x(0) = x'(\tau)(1-0)$
- $F(1) - F(0) = f'(\xi)x'(\tau)(1-0)$

Da cui

$$F'(0) \approx \frac{F(1) - F(0)}{1-0} = f'[\xi]x'(\tau) \approx f'[x(0)]\,x'(0) = 3 \quad \to \quad F'(0) = 3$$

7.2. Cambi di scala. I cambi di scala sono i più frequenti cambiamenti di variabile.

Le unità di misura del tempo t possono essere le ore h o i minuti m: tenuto conto che un'ora corrisponde a 60 minuti, avremo $h = \frac{1}{60}m$

Siano $x(h)$ i kilometri percorsi in h ore da un veicolo: la velocità in *km/ora* è espressa dalla derivata $v_{k/h} = \dfrac{d}{dh}x(h)$

Possiamo, componendo $x(h)$ con $h = \frac{1}{60}m$ considerare i kilometri percorsi in m minuti dallo stesso veicolo. La velocità in *km/minuto* è espressa dalla derivata $v_{k/m} = \dfrac{d}{dm}x\left([\dfrac{1}{60}m]\right)$ La regola di derivazione delle funzioni composte produce

$$v_{k/m} = \frac{d}{dm}x\left([\frac{1}{60}m]\right) = \frac{dx}{dh}\cdot\frac{dh}{dm} = v_{k/h}\frac{1}{60}$$

ovvero

$$v_{k/m} = v_{k/h}\frac{1}{60}$$

Se la velocità in *km/ora* era, ad esempio $v_{k/h} = 90$, la velocità in *km/minuto* sarà, come ovvio, $v_{k/m} = 1.5$.

7.3. Chain rule.

L'espressione inglese « *chain rule* » è largamente usata per ricordare la regola di derivazione delle funzioni composte.

$$\begin{array}{lll} G(x) = (g \circ h)(x): & G(x) = g[h(x)] & \to G'(x) = (g' \circ h)(x)\, h'(x) \\ F(x) = (f \circ g \circ h)(x): & F(x) = f[g(h[x])] & \to F'(x) = (f' \circ g \circ h)(x)\, (g' \circ h)(x)\, h'(x) \\ ecc. & & \end{array}$$

La formula di derivazione si esprime con una ... catena di prodotti !

Una lettura altrettanto utile si ricava servendosi della notazione di Leibnitz per la derivata

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Poniamo

$$v = h(x), \quad u = g(v), \quad y = f(u), \quad F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$$

Allora

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

in cui il ruolo formale del prodotto di frazioni riproduce fedelmente la regola di derivazione delle funzioni composte.

Forse la notazione di Leibnitz è superiore, in termini di espressività al celebrato *chain rule* ...

7.4. Il caso di $\sin(x)$ **e** $\cos(x)$**.** La derivata di $\sin(x)$ è (notissima) $\cos(x)$:

- la derivata di $\sin(kx)$ è $k\cos(kx)$,
- la derivata di $\frac{1}{k}\sin(kx)$ è $\cos(kx)$
- i grafici di $\sin(kx)$ e di $\frac{1}{k}\sin(kx)$ sono i seguenti

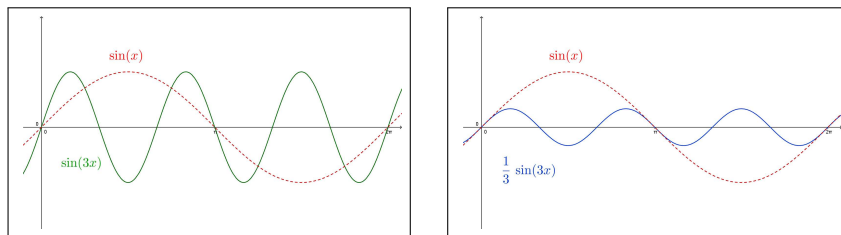



FIGURA 7. $\sin(3x)$ e $\frac{1}{3}\sin(3x)$

- entrambe le funzioni completano k oscillazioni (in figura $k = 3$) nell'intervallo $[0, 2\pi]$ in cui la $\sin(x)$ ne faceva una sola,
- la $\sin(3x)$ continua, come $\sin(x)$ a oscillare tra -1 e 1, con pendenze tuttavia assai più ripide,
- la $\frac{1}{3}\sin(3x)$ oscilla solo tra $-1/3$ e $1/3$, le sue pendenze sono le stesse di $\sin(x)$, mai superiori a 45^0.

Potrebbe essere interessante esplorare i grafici di funzioni quali $A\ \sin(kx+h)$:

- il coefficiente A cambia i valori dall'intervallo $[-1,1]$ a $[-A,A]$
- il fattore k influisce sulla *frequenza*, cioè sul numero di oscillazioni complete tra $[0,2\pi]$,
- l'addendo h produce una traslazione del grafico di $A\ \sin(kx)$ pari a $-h/k$

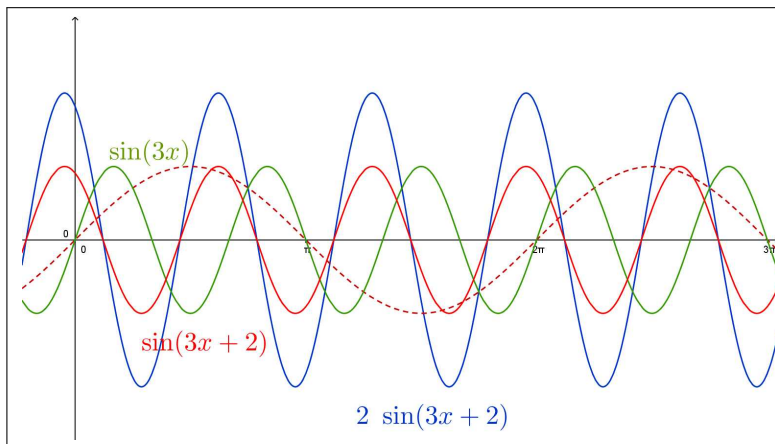



FIGURA 8. $2\sin(3x+2)$

Provate a chiedere a https://www.wolframalpha.com/ maggiori informazioni.

7.5. Derivare rispetto a un'espressione.

Il significato fondamentale della *derivata* $f'(x)$ di una funzione è quello di coefficiente di proporzionalità tra variazione della funzione f e variazione della x

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x) \qquad f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x$$

Può in qualche caso interessare il rapporto tra la variazione di f e quella di un'altra funzione g in relazione a uno stesso spostamento Δx della variabile da cui dipendono

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x+\Delta x)-g(x)} = \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La stima ottenuta per il rapporto considerato, il quoziente delle derivate, si indica anche con la notazione

$$\frac{df}{dg}$$

interpretata come derivata di f rispetto a g.

ESEMPIO 7.5. *Consideriamo la derivata di* $\sin(x)$ *rispetto a* $\cos(x)$

$$\frac{d\,\sin(x)}{d\,\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\tan(x)}$$

Relazione che esprime

$$\sin(x+\Delta x) - \sin(x) \approx \frac{-1}{\tan(x)}\Big(\cos(x+\Delta x) - \cos(x)\Big)$$

La tabella seguente si riferisce alle variazioni del coseno e del seno relative a incrementi $\Delta x = 0.01$*: l'ultima colonna riporta la stima della variazione del seno ottenuta serverndosi di quella del coseno moltiplicata per il fattore* $\dfrac{-1}{\tan(x)}$

x	$\cos(x+\Delta x) - \cos(x)$	$\sin(x+\Delta x) - \sin(x)$	$\frac{-1}{\tan(x)}\Big(\cos(x+\Delta x) - \cos(x)\Big)$
0.6	−0.0056876	0.00822499	0.00831354
0.625	−0.00589142	0.00808024	0.0081657
0.65	−0.00609157	0.00793045	0.00801306
0.675	−0.0062879	0.00777569	0.00785571
0.7	−0.00648031	0.00761608	0.0076937
0.725	−0.00666867	0.00745171	0.00752711
0.75	−0.00685286	0.00728269	0.00735604
0.775	−0.00703276	0.00710911	0.00718056
0.8	−0.00720828	0.00693108	0.00700078

La somiglianza delle due ultime colonne conferma la fiducia sull'approssimazione

$$\sin(x+\Delta x) - \sin(x) \approx \frac{-1}{\tan(x)}\Big(\cos(x+\Delta x) - \cos(x)\Big)$$

ESERCIZIO 7.6. *Se la funzione quadrato* x^2 *varia tra due valori* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 1+h$ *di* 2 *di quanto tra i due stessi valori varierà, presumibilmente, la funzione esponenziale* e^x *?*

$$\frac{e^{1+h} - e^1}{2} \approx \frac{e^1}{2} \approx 1,359$$

Ovvero dette Δ_{x^2} *e* Δ_{e^x} *le variazioni delle due funzioni si ha*

$$\Delta_{e^x} \approx 1,359\,\Delta_{x^2} : \quad \Delta_{x^2} = 2 \quad \to \quad \Delta_{e^x} \approx 2.718$$

8. Derivata dell'inversa

Siano f e g due funzioni, una inversa dell'altra

$$\begin{cases} y = g(x) \\ f(y) = x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f[g(x)] = x, \\ g[f(x)] = x \end{cases}$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte e dalle relazioni

$$f[g(x)] = x, \quad g[f(x)] = x$$

si ha

$$\begin{cases} (f[g(x)])' & = f'[g(x)]\, g'(x) \\ (g[f(x)])' & = g'[f(x)]\, f'(x) \\ f[g(x)] & = x \quad \to \quad (f[g(x)])' = (x)' \quad \to \quad (f[g(x)])' = 1 \\ g[f(x)] & = x \quad \to \quad (g[f(x)])' = (x)' \quad \to \quad (g[f(x)])' = 1 \end{cases}$$

Relazioni che conducono a riconoscere, righe prima e terza e seconda e quarta, che

$$f'[g(x)]\, g'(x) = 1, \quad g'[f(x)]\, f'(x) = 1$$

da cui, dividendo se possibile,

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}, \qquad f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]}$$

ESERCIZIO 8.1. *Siano* $f(y) = \tan(y)$ *e* $g(x) = \arctan(x)$*: si tratta di due funzioni una inversa dell'altra.*

La regola di derivazione dell'inversa produce quindi

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2[g(x)]}} = \cos^2[\arctan(x)] = \frac{\cos^2[\arctan(x)]}{\cos^2[\arctan(x)] + \sin^2[\arctan(x)]} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2[\arctan(x)]}{\cos^2[\arctan(x)]}} = \frac{1}{1 + \tan^2[\arctan(x)]} = \frac{1}{1+x^2}$$

ESERCIZIO 8.2. *Siano* $f(y) = e^y$ *e* $g(x) = \log(x)$*: si tratta di due funzioni una inversa dell'altra.*

La regola di derivazione dell'inversa produce quindi:

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}$$

ATTENZIONE: Le relazioni precedenti sembrano suggerire che la derivata della funzione inversa sia il reciproco della derivata della funzione diretta: **non è così**

$$g'(x) \neq \frac{1}{f'(x)} \quad \text{ma} \quad g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

Il valore della derivata di una funzione inversa in un punto x è uguale sì al reciproco della derivata della funzione diretta ma calcolata non in x ma in $g(x)$.

8.1. Derivate delle funzioni più comuni.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x\ln(a)$

ESEMPIO 8.3. *Siano $f(x)=x^3$ e $g(x)=\sqrt[3]{x}$ due funzioni una inversa dell'altra:*

$$f'(x)=3x^2, \qquad g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

espressioni del tutto diverse !

Cosa afferma quindi la regola precedente ?

$$g'(x)=\frac{1}{f'[g(x)]}=\frac{1}{3\,g^2(x)}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

relazione quest'ultima corretta e naturalmente coincidente con quanto calcolato prima per via diretta.

ESEMPIO 8.4. *La regola di derivazione dell'inversa a volte è utile !*

Consideriamo $f(x)=x^5+x^3+x+1$, funzione strettamente crescente, quindi dotata di inversa g, funzione quest'ultima tutt'altro che esplicita.

Considerato che

$$f(1)=4 \quad \Leftrightarrow \quad g(4)=1$$

È facile conoscere la derivata dell'inversa nel punto 4:

$$g'(4)=\frac{1}{f'[g(4)]}=\frac{1}{f'[1]}=\frac{1}{9}$$

Il risultato ottenuto aiuta a prevedere qualcosa circa la radice $g(4.12)$ dell'equazione

$$x^5+x^3+x+1=4.12$$

$$g(4.12)\approx g(4)+g'(4)(4.12-4)=1+\frac{0.12}{9}\approx 1,0133$$

Il celebrato https://www.wolframalpha.com/ *stima $g(4.12)=1.01308$, cioè stima 1.01308 la radice dell'equazione $x^5+x^3+x+1=4.12$: il valore trovato sopra non è molto diverso, ed è stato ottenuto certamente in modo rapidissimo.*

8.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare le derivate nell'origine per le tre funzioni $\sin(x), \quad \sin(2x), \quad \sin(3x)$ e disegnare le rette tangenti ai tre grafici nell'origine.
(2) ▶▶ Determinare i punti in cui la derivata di $f(x) = x e^{-x^2}$ vale zero.
(3) ▶▶ Sia $f(x) = \dfrac{3+x}{2x+1}$ determinare la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto 3.

9. Le derivate successive

La derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ derivabile in ogni punto è , a sua volta, una funzione della quale si può considerare la derivabilità o meno: nel caso positivo tale derivata prende il nome di *derivata seconda* e si indica con $f''(x)$.

ESEMPIO 9.1. *Sia* $f(x) = x^2$*: si ha* $f'(x) = 2x$ *e* $f''(x) = 2$.
Sia invece $g(x) = \sin(x)$*: si ha* $g'(x) = \cos(x)$ *e* $g''(x) = -\sin(x)$

Naturalmente lo stesso discorso può essere riproposto relativamente alla $f''(x)$, funzione della quale si può considerare la derivabilità o meno e, nel caso positivo, ecc.ecc.

9.1. Le derivate successive di prodotti. La derivata prima di un prodotto $f(x) = a(x)\,b(x)$ produce due addendi

$$f'(x) = a'(x)\,b(x) + a(x)\,b'(x)$$

La derivata seconda fa pensare a quattro addendi, la terza a 8 e così via a crescere...

È interessante osservare come qualche ripetizione riduca di fatto il numero degli addendi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a'(x)\,b(x) + a(x)\,b'(x) \\
f''(x) &= a''(x)\,b(x) + 2\,a'(x)\,b'(x) + a(x)\,b''(x) \\
f'''(x) &= a'''(x)b(x) + 3a''(x)b'(x) + 3a'(x)\,b''(x) + a(x)\,b'''(x)
\end{aligned}$$

È ragionevole accogliere la formula generale

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{[n-k]}(x)\,b^{[k]}(x), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

nella quale si sottintende che $a^{[0]}(x) \equiv a(x)$, $a^{[1]}(x) \equiv a'(x), \ldots$.

La formula offerta ricorda quella incontrata a pagina 134 col nome di *binomio di Newton* per le potenze $(a+b)^n$.

9.2. Derivate successive e rapporti incrementali.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x+h) \approx \frac{f(x+h+h)-f(x+h)}{h} = \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \approx \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

Discorso analogo per la derivata terza

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$f''(x+h) \approx \frac{f(x+3h)-2f(x+2h)+f(x+h)}{h^2}$$

$$f'''(x) \approx \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} \approx \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}$$

La tabella seguente riporta le derivate prime, seconde e terze della funzione $f(x) = x^3$ sia calcolate con le espressioni esatte, $3x^2, 6x, 6$ sia calcolate con le approssimazioni precedenti riferite a $h = 0.1$

x	$f'(x)$	$\approx f'(x)$	$f''(x)$	$\approx f''(x)$	$f'''(x)$	$\approx f'''(x)$
1.	3.	3.31	6.	6.6	6.	6.
2.	12.	12.61	12.	12.6	6.	6.
3.	27.	27.91	18.	18.6	6.	6.
4.	48.	49.21	24.	24.6	6.	6.
5.	75.	76.51	30.	30.6	6.	6.
6.	108.	109.81	36.	36.6	6.	6.
7.	147.	149.11	42.	42.6	6.	6.

CAPITOLO 14

Minimi e/o massimi locali interni

1. Il significato delle parole

Le parole *punto di minimo* ***locale*** e *punto di Massimo* ***locale*** differiscono da quelle di minimo e di Massimo precedentemente introdotte, vedi il Teorema di Weierstrass a pagina 172, per via di quel ***locale*** .

Un punto x_0 si dice *punto di minimo* ***locale*** o *punto di minimo* ***relativo*** se riesce

$$f(x_0) \leq f(x)$$

per tutti gli x dell'intervallo $[a,b]$ in cui la funzione è assegnata che siano anche abbastanza vicini a x_0.

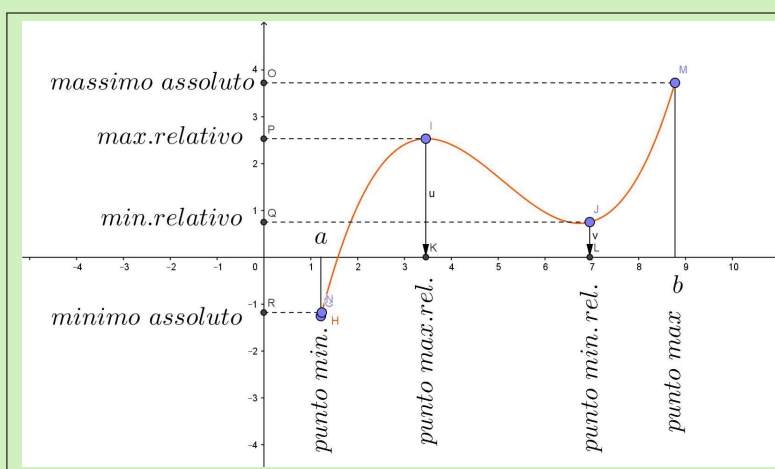



FIGURA 1. Punti di massimo locale, di minimo locale, ...

Analogamente un punto x_0 si dice *punto di Massimo* ***locale*** o *punto di Massimo* ***relativo*** se riesce

$$f(x) \leq f(x_0)$$

per tutti gli x dell'intervallo $[a,b]$ in cui la funzione è assegnata abbastanza vicini a x_0.

Ovviamente i punti di minimo o di massimo sono, naturalmente anche punti di minimo o di massimo locali, mentre non è vero il viceversa.

In Figura 1 i quattro punti evidenziati sono tutti e quattro punti di minimo o di massimo locali, in più quello relativo all'estremo sinistro è anche punto di minimo, mentre quello all'estremo destro è anche punto di massimo.

Le proprietà sono evidenti in figura:

- nei punti abbastanza vicini al punto x_1 *punto di mass. loc.* i valori della funzione sono più bassi del valore, il *massimo relativo o locale*, prodotto in tale punto,
- nei punti abbastanza vicini al punto x_2, *punto di min. loc.* i valori della funzione sono più alti del valore, il *minimo relativo o locale*, prodotto in tale punto,
- basta allontanarsi tuttavia un po' per trovare punti in cui il valore prodotto sia maggiore di quello prodotto in x_1 , come pure trovare punti in cui il valore sia minore di quello prodotto in x_2,
- se un punto x_0 di *minimo o di massimo locale* cade all'interno di $[a,b]$ e se esiste la tangente tale la retta è **orizzontale**.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia f continua e derivabile: nei punti c di minimo o di massimo locale che cadano all'interno del dominio riesce $f'(c) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che il punto c di minimo locale è interno significa che esiste tutto un intervallo $(c-\delta, c+\delta)$ conteuto nel dominio di f, tale che

$$\forall \xi \in (c-\delta,\, c+\delta): \quad f(c) \leq f(\xi)$$

I rapporti incrementali, definiti per ogni $\forall \xi \in (c-\delta,\, c+\delta)$,

$$\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c}$$

hanno quindi il numeratore $f(\xi) - f(c)$ positivo.

Quindi sono

- positivi se $\xi > c$,
- negativi se $\xi < c$.

Essendo f derivabile in c si ha

$$f'(c) = \lim_{\xi \to c^+} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c} \geq 0 \qquad f'(c) = \lim_{\xi \to c^-} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c} \leq 0,$$

da cui segue

$$\begin{cases} f'(c) \geq 0 \\ f'(c) \leq 0 \end{cases} \quad \to \quad f'(c) = 0$$

Il caso di c punto di massimo locale interno è del tutto analogo; si invertono solo i segni dei rapporti incrementali, positivo quello da sinistra e negativo quello da destra.

□

ESEMPIO 1.2. *Sia $f(x) = x^2$, considerata in tutto $\mathbb{R}$.*

Il punto $x_0 = 0$ è un punto di minimo,

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(0) \leq f(x)$$

e, infatti $f'(0) = 0$.

OSSERVAZIONE 1.3. *Gli estremi dell'intervallo $[a,b]$ in cui la funzione è assegnata non sono mai nè punti di minimo locale interno nè punti da massimo locale interno: per la semplice ragione che non sono interni ad $[a,b]$.*

Sono invece, spesso, punti di minimo o di massimo locale o anche assoluto, ... ma non interno !

Se uno degli estremi a o b dell'intervallo risulta punto di minimo o di massimo per f non risulta di conseguenza necessariamente nulla la derivata in tale punto.

Si pensi infatti alla funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $[1,2]$: il punto $x_0 = 1$ è punto di minimo, eppure $f'(1) = 1 \neq 0$.

Analogo discorso per il punto $x_1 = 2$, punto di massimo in cui, tuttavia continua a riuscire $f'(2) = 1 \neq 0$.

OSSERVAZIONE 1.4. *Proviamo a riflettere sul caso in cui $f(x)$, definita in $[a,b]$ abbia, ad esempio, massimo negli estremi a e b:*

- *se a destra di a riesce $f(a) \geq f(x)$ vuol dire che f esce da a **in discesa**, e quindi $f'(a) \leq 0$,*
- *se a sinistra di b riesce $f(x) \leq f(b)$ vuol dire che f arriva in b **in salita**, e quindi $f'(b) \geq 0$,*

Discorsi analoghi si possono osservare nei caso in cui f abbia agli estremi punti di minimo o, rispettivamente, un punto di minimo e uno di massimo.

ESEMPIO 1.5. *Sempre riferendosi a $f(x) = x^2$, consideriamola questa volta nell'intervallo $[1,4]$: il punto $x_0 = 1$ è un punto di minimo ma cade in un estremo dell'intervallo.*

Non deve stupire che in questo caso $f'(x_0) = 2 \neq 0$.

ESEMPIO 1.6. *Sia $f(x) = x(3 - x^2)$: i due punti $x_1 = -1, \quad x_2 = 1$, gli unici in cui $f'(x) = 3 - 3x^2$ si annulla, sono punti rispettivamente di minimo e di massimo locali. Si ha infatti $f(-1) = -2,\ f(1) = 2$ e lo si riconosce osservando che*

$$x \in (-\sqrt{3}, 0) \quad \rightarrow \quad f(x) \leq 0, \qquad x \in (0, \sqrt{3}) \quad \rightarrow \quad 0 \leq f(x)$$

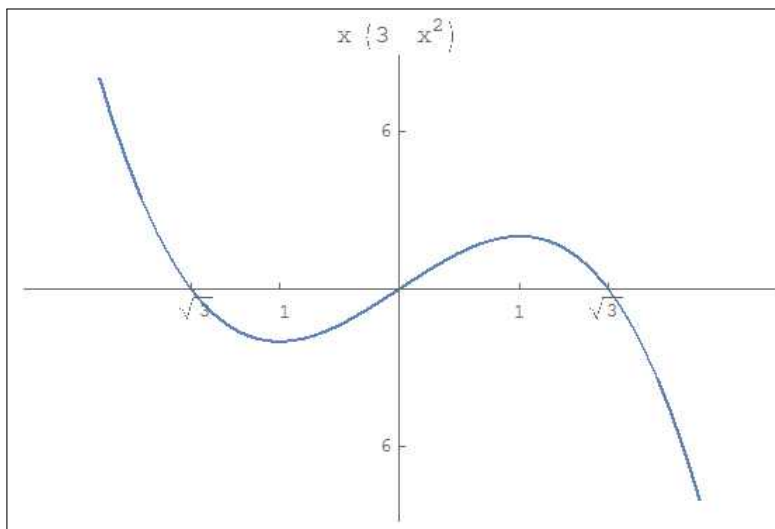



FIGURA 2. $f(x) = x(3 - x^2)$: massimo locale, minimo locale, ...

1.1. I punti stazionari. I punti x_0 in cui riesce $f'(x_0) = 0$ si dicono *punti stazionari* di f.

Tenuto conto del significato geometrico della derivata si riconosce che la retta tangente al grafico di f in un punto x_0 stazionario

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y = f(x_0)$$

è orizzontale.

E viceversa se la tangente in un punto del grafico di ascissa x_0 è orizzontale riesce $f'(x_0) = 0$.

Si noti che $f'(x_0) = 0$ implica solo che la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale e non implica che, necessariamente, f abbia in quel punto un minimo o un massimo locale.

ESEMPIO 1.7. *Sia $f(x) = x^3$ si ha $f'(x) = 3x^2$ e, nell'origine si ha $f'(0) = 0$: tuttavia nell'origine la f non ha nè minimi nè massimi locali.*

2. Qualche problema di massimo e/o minimo

ESEMPIO 2.1. *Determinare il rettangolo di area maggiore tra quelli inscritti in una circonferenza di raggio $r = 4$.*

Tenuto conto che i vertici $(x,y), (-x,y), (x,-y), (-x,-y)$ dei rettangoli inscritti dovranno soddisfare l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{16 - x^2} \quad \rightarrow \quad A = 4x\sqrt{16 - x^2}$$

La dimensione x ottimale è pertanto quella per la quale la derivata è nulla (i valori agli estremi $x = 0$ o $x = 4$ sono ovviamente esclusi: darebbero area nulla) :

$$4\left\{\sqrt{16-x^2}+x\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right\}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$$

Il rettangolo ottimale è quindi il quadrato di lato $\ell = 4\sqrt{2}$ e quindi area $A = 32$.

ESEMPIO 2.2. *Determinare i punti della parabola $y = x^2 + 1$ più vicini al punto $A = (0,2)$.*

I punti P appartenenti alla parabola hanno coordinate $P = (x, x^2 + 1)$: la loro distanza da A è $d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + ((x^2+1)-2)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$. L'annullamento della derivata conduce a

$$\frac{4\left(x^2-1\right)x+2x}{2\sqrt{x^2+\left(x^2-1\right)^2}}=0 \quad\rightarrow\quad 4\left(x^2-1\right)x+2x=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2=0 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

I valori della distanza relativamente ai tre punti stazionari trovati sono;

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}},\quad d(0)=1,\quad d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}$$

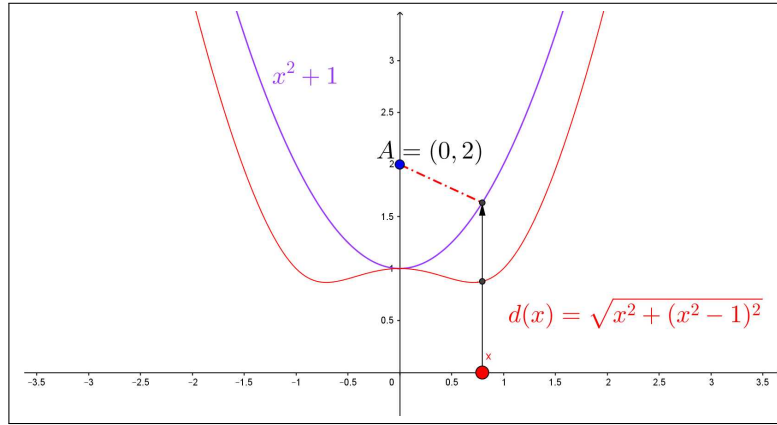



FIGURA 3. $d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + ((x^2+1)-2)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$

Tenuto conto che $\sqrt{\frac{3}{4}} < 1$ si riconosce che i punti della parabola più vicini ad A sono quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\right),\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\right)$$

La distanza minima è $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

ESEMPIO 2.3. *Un filo di 2 metri è tagliato in due parti: una parte delimita un quadrato, l'altra un triangolo equilatero. Dove tagliare il filo in modo che l'area totale dei due poligoni sia minima o massima?*

Siano x e y le due parti: $x+y=2 \quad \to \quad y=2-x$. Il quadrato avrà lato $\ell = x/4$ e quindi area $Q = x^2/16$, il triangolo avrà lato $y/3 = (2-x)/3$ e quindi area $T = (2-x)^2\sqrt{3}/36$.

$$Q+T = x^2/16 + (2-x)^2\sqrt{3}/36 \quad \to \quad (Q+T)' = 0 \quad \to \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 0.87$$

2.1. Esercizi.

(1) ►► Sia $f(x) = 1-x^2$
- riconoscere che l'origine è punto di massimo,
- riconoscere che l'origine è punto stazionario,
- disegnare il grafico di $f(x)$ e della tangente nel punto di ascissa 0.

(2) ►► Sia $f(x) = 1-x^3$
- riconoscere che l'origine non è punto di massimo,
- riconoscere che l'origine è punto stazionario,
- disegnare il grafico di $f(x)$ e della tangente nel punto di ascissa 0.

(3) ►► Sia $f(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$
- riconoscere che l'origine è punto di minimo,
- riconoscere che l'origine non è punto stazionario,
- disegnare il grafico di $f(x)$.

2.2. Un problema in due variabili.

Assegnati n punti del piano

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_2),\ P_3 = (x_3, y_3),\ \dots P_n = (x_n, y_n),$$

determinare il punto $P = (x, y)$ in cui la somma dei quadrati delle distanze $\overline{PP_i}^2$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right\}$$

è minima.

Tenuto conto che

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x-x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y-y_i)^2$$

la somma sarà minima quando sono minimi separatamente le due sommatorie che la compongono:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x-x_i)^2 = & \quad nx^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} (y-y_i)^2 = & \quad ny^2 - 2y \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

Derivando rispettivamente la prima sommatoria rispetto a x e la seconda rispetto a y si riconosce che la somma $d(x,y)$ è minima in corrispondenza al *punto medio*

$$P = (\bar{x}, \bar{y}) : \qquad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Il punto *medio* di cui sopra si chiama anche *baricentro* degli n punti assegnati.

2.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare i punti di massimo locale della funzione $x e^{-x}$.
(2) ▶▶ Determinare i punti di minimo locale della funzione $|x| + |x+1|$.
(3) ▶▶ Determinare i punti di minimo locale della funzione $e^{|1-x^2|}$.

3. Massimo e minimo di una funzione continua

Sia f una funzione continua definita in I: per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$ ha senso cercare

- $\boxed{m}$ il minimo di f, il più piccolo dei valori che f produce al variare di $x \in [a,b]$,
- i punti x_m di $[a,b]$ nei quali f produce il valore m, tali x_m si chiamano punti di minimo,
- $\boxed{M}$ il Massimo di f, il più grande dei valori che f produce al variare di $x \in [a,b]$,
- i punti x_M di $[a,b]$ nei quali f produce il valore M, tali x_m si chiamano punti di Massimo.

$$\begin{aligned} m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad \exists\, x_m \in [a,b] : \; f(x_m) = m, \\ M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad \exists\, x_M \in [a,b] : \; f(x_M) = M \end{aligned}$$

Se f è una funzione derivabile i punti x_m e x_M si trovano tra

- i punti interni ad (a,b) nei quali riesce $f'(x) = 0$, detti *punti stazionari*,
- i due estremi a e b

Se f non è derivabile in qualche punto $\xi \in [a,b]$ allora il minimo e/o il massimo *possono* essere valori di f in tali punti ξ.

ESEMPIO 3.1. *Determinare il minimo e il massimo di* $f(x) = 1 + |x^2 - 1|$ *nell'intervallo* $I = [-2, 3]$*:*

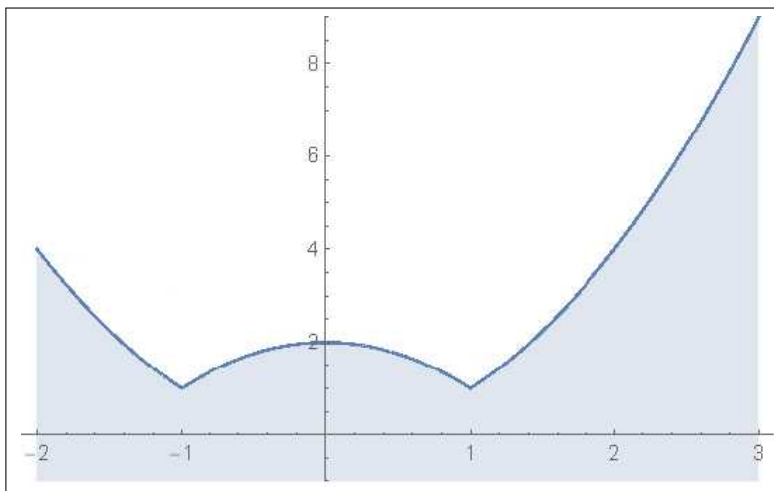



FIGURA 4. $f(x) = 1 + |x^2 - 1|, \quad I = [-2, 3]$

Il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza sia del minimo che del massimo.

- *valori agli estremi* $f(-2) = 4,\ f(3) = 9$*,*
- *punti di non derivabilità:* $\xi = \pm 1, \quad f(\pm 1) = 1$*,*
- *punti stazionari interni* $f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0, \quad f(0) = 2$

Confrontando i quattro valori esaminati:

$$f(-2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(\pm 1) = 1,\ f(0) = 2$$

si riconosce che

$$m = f(\pm 1) = 1,\ M = f(3) = 9$$

I punti ± 1 *sono punti di minimo, il punto* 3 *è il punto di massimo.*

ESEMPIO 3.2. *Cercare il minimo e il massimo di* $f(x) = x\,e^{-x^2}$ *in tutto* $\mathbb{R}$*:*

L'intervallo assegnato, $\mathbb{R}$*, non è limitato, pertanto non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass e quindi minimo e/o massimo potrebbero mancare.*

- *limiti agli estremi* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x\,e^{-x^2} = 0$*,*
- *punti stazionari interni:*

$$f'(x) = (1 - 2x^2)\,e^{-x^2}, \quad f'(x) = 0 \quad \to \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\to \quad f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

,

- *non ci sono punti di non derivabilità.*

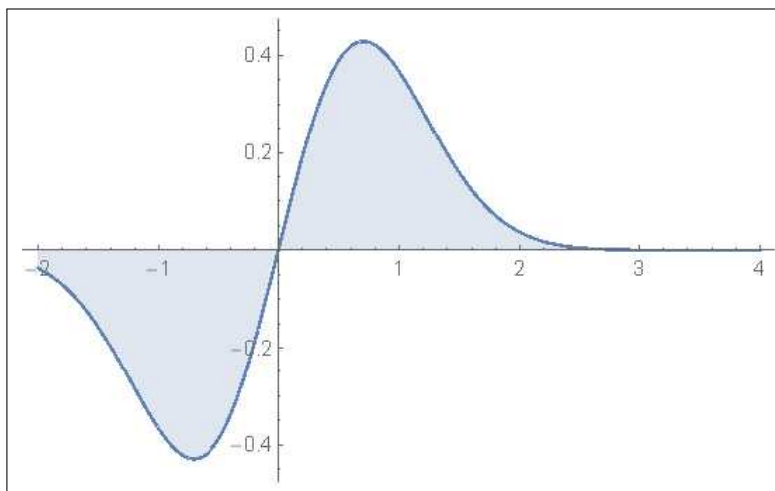



FIGURA 5. $f(x) = x e^{-x^2}, \quad I = \mathbb{R}$

Osservando i valori ottenuti nei due punti stazionari e tenendo conto dei limiti agli estremi si riconosce che

$$m = -\frac{1}{\sqrt{2e}}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

Il punto $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *è il punto di minimo e* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *è il punto di massimo.*

ESEMPIO 3.3. *Determinare il cerchio più grande che sia interamente contenuto nell'insieme dei punti* (x, y) *delimitato dai grafici di* $-e^{-x^2}$ *e di* e^{-x^2}*-*

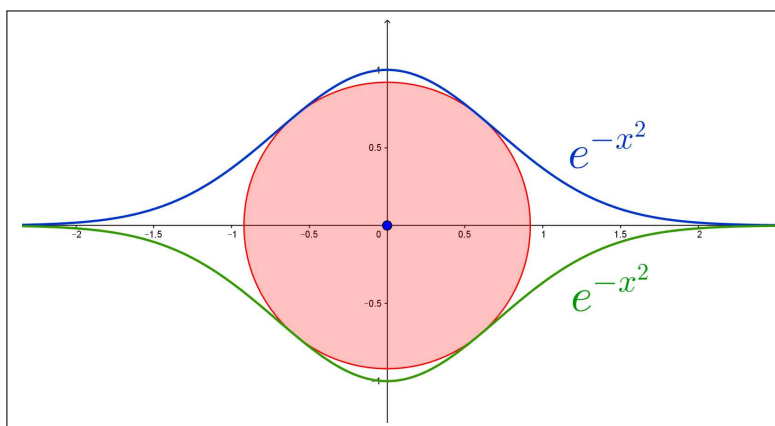



FIGURA 6. il cerchio più grande che sia...

È evidente che il cerchio cercato avrà centro nell'origine: si tratta di decidere quale sia il suo raggio.

Considerato che il quadrato delle distanze dei punti dei due grafici di $\pm e^{-x^2}$ *dall'origine è*

$$d(x) = x^2 + e^{-2x^2}$$

il quadrato del raggio cercato sarà il minimo di tale espressione.

$$d'(x) = 2x(1 - 2e^{-2x^2}) \quad d'(x) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ e^{-2x_2^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d(x_1) = 1, \quad d(x_2) = \frac{\log(2) + 1}{2}$$

Considerato che $d(x_1) < d(x_2)$ *il cerchio cercato è*

$$x^2 + y^2 = \frac{\log(2) + 1}{2}$$

CAPITOLO 15

I teoremi del calcolo

1. Il teorema di Rolle

TEOREMA 1.1. *Sia $f(x)$ continua e derivabile in $[a,b]$ e riesca $f(a) = f(b)$, allora $\exists c \in (a,b): \ f'(c) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Pensiamo al grafico di f: si tratta di una curva (...*un ponte più o meno ondulato*) che congiunge $A = (a, f(a))$ con $B = (b, f(b))$.

Tenuto conto che $f(a) = f(b)$, i due estremi A e B hanno la stessa quota e quindi la curva grafico potrà essere di due tipi:

- il segmento orizzontale da A a B, f costante, e allora f è costante e quindi $f'(x) \equiv 0$,
- una curva che se sale sopra la quota di A e B dovrà poi ridiscendere e se scende sotto tale quota dovrà poi risalire.

In ogni caso si riconoscono punti $c \in (a,b)$ (punti di massimo e/o punti di minimo) in cui la tangente al grafico dovrà essere orizzontale: quindi punti in cui la derivata $f'(c)$ sarà nulla. □

OSSERVAZIONE 1.2. *Il caso di $|x|$*

Il caso di $|x|$, per $x \in [-1,1]$ illumina come, rinunciando alla derivabilità si possono incontrare funzioni che producono lo stesso valore agli estremi di un intervallo ma la cui derivata non si annulla in alcun punto...

Ma c'è uno spigolo ...!

1.1. Il caso di intervalli aperti o non limitati.

Pensiamo all'esempio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, definita su tutto $\mathbb{R}$, infinitesima sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$: è evidente che f ha massimo, $1 = f(0)$, e, quindi, c'è un punto, l'origine, in cui $f'(0) = 0$.

Il seguente Corollario prova che il fenomeno illustrato è del tutto generale.

COROLLARIO 1.3. *Sia $f(x)$ continua e derivabile in un intervallo I anche illimitato, se i due limiti agli estremi*

$$\lim_{x \to \inf(I)} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to \sup(I)} f(x) \ = \ \ell$$

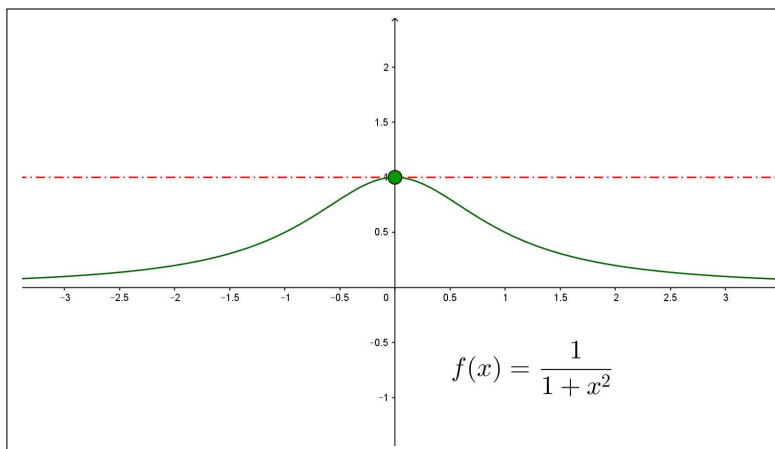



FIGURA 1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

sono uguali allora esiste $c \in I: \; f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se f è costante in I allora la sua derivata è nulla in ogni punto.

Se f non è costante allora esiste almeno un punto x_0 in cui $f(x_0) \neq \ell$, supponiamo $f(x_0) = \ell + \delta$, con $\delta > 0$.

Consideriamo un intervallo $[a,b] \subset I$ tale che

$$x \notin [a,b] \quad \to \quad f(x) \leq \ell + \delta/2$$

Tenuto conto che

- agli estremi di $[a,b]$ f vale è $\leq \ell + \delta/2$
- in $x_0 \in [a,b]$ f vale $\ell + \delta$,

il massimo della f in $[a,b]$ sarà raggiunto in un punto c interno ad $[a,b]$ e in tale punto si ha quindi $f'(c) = 0$.

□

OSSERVAZIONE 1.4. *Il precedente Corollario non richiede che I sia limitato o che ℓ sia finito.*

ESEMPIO 1.5. *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

definita in $\mathbb{R}$.

Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*: esistono quindi punti c in cui* $f'(c) = 0$.

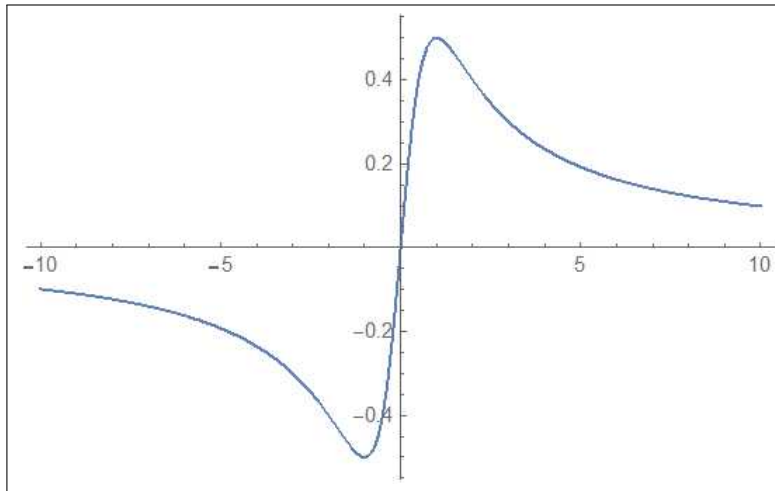



FIGURA 2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Fuori dell'intervallo $[-10, 10]$ *si ha*

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{10}$$

e nel punto $x_0 = 1 \in (-10, 10)$ *si ha* $f(x_0) = 1/2$.

Quindi il massimo di f *nell'intervallo* $[-10, 10]$ *non cade agli estremi: cade necessariamente in un punto* $c \in (-10, 10)$*: in tale punto quindi* $f'(c) = 0$.

I punti in cui $f'(c) = 0$ *si trovano ricordando che*

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f'(c) = 0 \quad \to \quad c = \pm 1$$

ESEMPIO 1.6. *Sia* $f(x) = x^2, \quad I = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 2x$ *si annulla per* $x = 0$.

L'esempio dedlla funzione $\arctan(x)$ prova del resto che la sola esistenza dei due limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ non garantisce l'esistenza di alcun punto stazionario.

PROPOSIZIONE 1.7. *Sia* $f(x)$ *continua e derivabile in* $[a, b]$*, allora se* f *si annulla in* n *punti distinti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *allora la derivata* f' *si annulla in almeno* $n-1$ *punti distinti.*

Se esistono le derivate successive allora: la derivata seconda si annulla in almeno $n-2$ *punti distinti, la derivata terza si annulla in almeno* $n-3$ *punti distinti, ecc. ecc.*

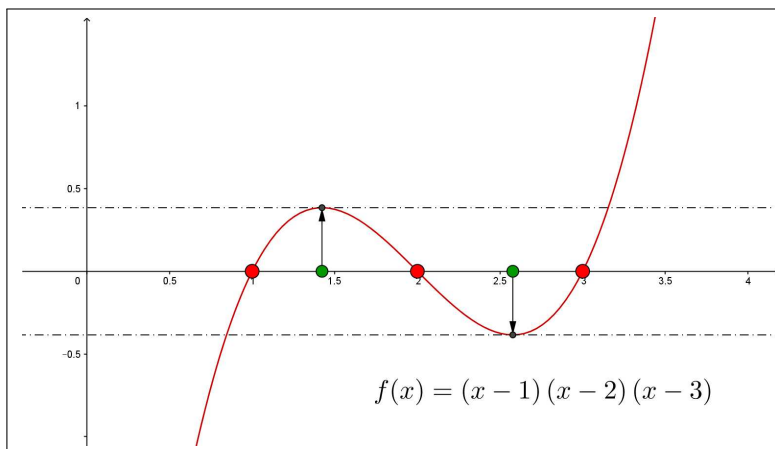



FIGURA 3. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

ESEMPIO 1.8. *Sia $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ polinomio che si annulla nei tre punti $1, 2, 3$. Allora sicuramente ci saranno due punti $\exists c_1 \in (1,2) : f'(c_1) = 0$ e $\exists c_2 \in (2,3) : f'(c_2) = 0$.*

Applicando il teorema di Rolle alla f' nell'intervallo $[c_1, c_2]$ si deduce l'esistenza di un punto $\xi \in (c_1, c_2$ in cui $f''(\xi) = 0$. Tenuto conto che

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = \begin{cases} 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,42 \in [1,2] \\ \\ 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,58 \in [2,3] \end{cases}$$

Applicando il teorema di Rolle alla f' nell'intervallo $[c_1, c_2]$ si deduce l'esistenza di un punto $\xi \in (c_1, c_2)$ in cui $f''(\xi) = 0$.

Infatti $f''(x) = 6x - 12 \quad \to \quad \xi = 2 \in \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3},\, 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

1.2. Controesempi al Teorema di Rolle. Esistono funzioni la cui derivata non si annulla in alcun punto:

- rinunciando alla $f(a) = f(b)$ si pensi a $f(x) = x$. Si ha
$$f'(x) \equiv 1 \neq 0$$
- rinunciando alla derivabilità si pensi alla $f(x) = |x|$ e all'intervallo $[-1, 1]$. Pur avendo $f(-1) = f(1)$ non c'è alcun punto in cui $f'(x) = 0$ (in altri termini non c'è alcun punto del grafico in cui la tangente sia orizzontale: la colpa è di quell'angolo...)

1.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Detta $f(x) = x^2\,|x|$ riconoscere che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, che $f(-1) = f(1)$ e che quindi la derivata f' si annulla in (almeno) un punto.

(2) ▶▶ Detta $f(x) = x\,(x-1)\,(e^{x^2} + e^{-x^2})$ riconoscere che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette almeno una radice $x_0 \in [0,1]$.

(3) ▶▶ Detta

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x) & se \quad x \leq 0 \\ \sin(x) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

riconoscere che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette almeno una radice $x_0 \in [-1, \pi]$.

2. Il teorema di Lagrange

TEOREMA 2.1. *Sia f continua e derivabile nell'intervallo I*[1]*: per ogni $a, b \in I$ esiste $c \in (a,b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Il teorema afferma che esiste almeno un punto $(c, f(c))$ del grafico in cui la retta tangente è parallela alla retta determinata dai due punti estremi $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

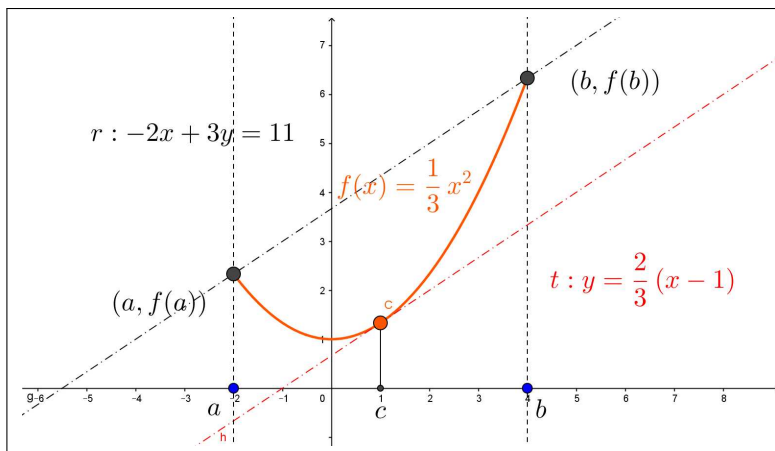



FIGURA 4. Il teorema di Lagrange

DIMOSTRAZIONE. Si pensi al grafico di f: una linea, probabilmente curva, che congiunge il punto $A = (a, f(a))$ con $B = (b, f(b))$.

Come nel caso *Rolle* si possono avere due casi:

[1] limitato o meno, chiuso o meno

- il grafico di f in (a,b) può essere il segmento AB,
- oppure può essere una curva diversa.

Nel primo caso

$$\forall x \in (a,b): \quad f(x) \equiv f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

e quindi $f'(x) \equiv \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tutti i punti di (a,b) corrispondono alla tesi del Teorema.

Nel secondo caso se ci sono tratti in cui il grafico cresce con una pendenza superiore a quella del segmento

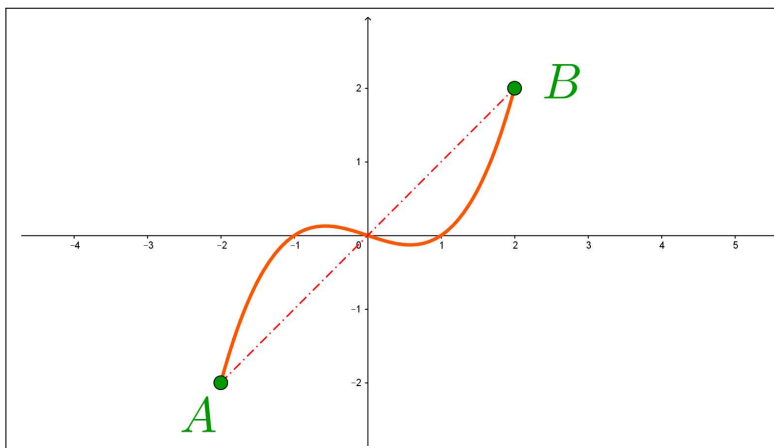



FIGURA 5. se ci sono tratti in cui il grafico cresce con una pendenza superiore ...

$$f'(c_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dovrà poi discendere; viceversa se ci sono tratti in cui la pendenza è inferiore a quella del segmento

$$f'(c_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dovrà poi risalire.

Il teorema dei valori intermedi, applicato alla funzione f', che supponiamo in aggiunta essere anch'essa continua, assicura pertanto che ci saranno comunque punti c in cui riesce

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

□

Una dimostrazione più generale, che trovate su molti testi, è la seguente:

$$\phi(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right\}$$

differenza tra $f(x)$ e l'espressione della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Si ha $\phi(a) = 0, \quad \phi(b) = 0$ quindi per il Teorema di Rolle applicato alla ϕ esiste $c \in (a,b)$ in cui $\phi'(c) = 0$ ovvero tenuto conto che

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \to \quad f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \to \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

ESEMPIO 2.2. *Siano* $0 < a < b$ *qualunque sia* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Infatti, pensando a $f(x) = x^n$ *si ha, per il teorema di Lagrange,*

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = nc^{n-1}$$

per un opportuno $a < c < b$. *Tenuto conto che* $na^{n-1} < nc^{n-1} < nb^{n-1}$ *si ha*

$$n\,a^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b-a} < n\,b^{n-1}$$

ovvero l'asserto moltiplicando membro a membro per $b-a$.

ESEMPIO 2.3. *La funzione* $f(x)$ *sia continua e derivabile nell'intervallo I: se la derivata* $f'(x)$ *non prende mai il valore* 1 *allora non ci possono essere due punti* $a, b \in I$ *in cui riesca* $f(a) = a$ *e* $f(b) = b$.

Infatti, se ci fossero allora esisterebbe, per il teorema di Lagrange $c \in I$ *tale che*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \to \quad 1 = f'(c)$$

2.1. Esercizi.

(1) ►► Sia $f(x) = x^2$ determinare ξ_n tale che $f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$
(2) ►► Sia $f(x) = x(1-x^2)$ determinare i punti $(c, f(c))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta per $(-2, f(-2))$, $(1, f(1))$.
(3) ►► La funzione $f(x)$ sia continua e derivabile in $[0, 10]$: se $f(0) = 1$ e $\forall c \in [0, 10] : f'(c) < 2$ quanto può valere al massimo $f(10)$?

3. Monotonia di $f(x)$ e segno di $f'(x)$

Il segno del rapporto incrementale di una funzione ci dice se essa è crescente o decrescente.

Infatti

- dire che f è **crescente** vuol dire che all'aumentare di x aumentano i valori $f(x)$, ovvero al diminuire di x diminuisce $f(x)$, ovvero ancora
$$f(x_2)-f(x_1) \quad e \quad x_2-x_1$$
hanno lo stesso segno:
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$
- dire che f è **decrescente** vuol dire invece che all'aumentare di x diminuiscono i valori $f(x)$, ovvero al diminuire di x cresce $f(x)$, ovvero ancora
$$f(x_2)-f(x_1) \quad e \quad x_2-x_1$$
hanno segno opposto:
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$$

Il teorema di Lagrange dice del resto che i rapporti incrementali corrispondono a valori della derivata:

- derivata sempre positiva $\rightarrow$ rapporti incrementali sempre positivi,
- derivata sempre negativa $\rightarrow$ rapporti incrementali sempre negativi.

Vale pertanto il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia f continua e derivabile nell'intervallo I e sia*
$$\forall x \in I: \; f'(x) > 0$$
allora f è crescente in I.

Si può decomporre l'intervallo I su cui f è definita nei tratti in cui $f'(x) > 0$ e quelli in cui $f'(x) > 0$: allora gli intervalli in cui $f'(x) > 0$ sono intervalli in cui f è crescente, $\nearrow$ e gli intervalli in cui $f'(x) < 0$ sono intervalli in cui è decrescente $\searrow$.

ESEMPIO 3.2. *Consideriamo la funzione* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ *Tenuto conto che* $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$
$$\begin{cases} x < -1 & \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \nearrow \\ -1 < x \leq 2 & \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \searrow \\ 2 < x & \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \nearrow \end{cases}$$

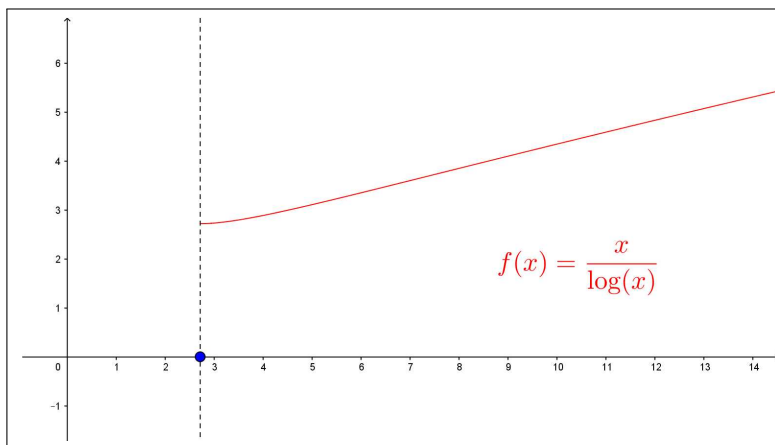



FIGURA 6. $f(x) = \frac{x}{\log(x)},\ x > e$

ESEMPIO 3.3. *Sia* $f(x) = \dfrac{x}{\log(x)}$, *definita per* $x > e$*: si ha*

$$f'(x) = \frac{\log(x) - 1}{\log^2(x)}, \quad \to \quad f'(x) > 0 \quad \to \quad f(x) \nearrow$$

cioè $\quad e < a < b \quad \to \quad \dfrac{a}{\log(a)} < \dfrac{b}{\log(b)}.$

La disuguaglianza precedente implica $\quad a\log(b) < b\log(a) \quad$ *e quindi*

$$e < a < b \quad \to \quad b^a < a^b$$

Pensando di prendere a e b numeri naturali si ha un'interessante disuguaglianza:

$$2 < n < m \quad \to \quad m^n < n^m$$

3.1. Una derivata interessante.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \to \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Il segno della derivata è quello di $ad - bc$, cioè il segno del determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Se $D > 0$ la f è crescente in ogni intervallo in cui è definita, se $D < 0$ è decrescente ancora in ogni intervallo in cui è definita.

Se $D = 0$ f è costante...!

3.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Provare che la funzione $f(x) = x - e^{-x}$ è monotona in $\mathbb{R}$.
(2) ▶▶ Determinare in quali intervalli la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ è crescente.
(3) ▶▶ Esaminare se la successione

$$a_n = \frac{3n}{1+n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

è monotona.

3.3. Da punti stazionari a punti di minimo....

Perchè un punto x_0 sia un punto di minimo locale per la funzione f basta che il grafico di f sia ...

... in discesa prima di x_0 e prosegua in salita dopo x_0 !

L'opposto è sufficiente per riconoscere i punti x_0 di massimo locale: salita prima di x_0, discesa dopo.

Tenuto conto che salite e discese corrispondono a *derivata positiva* o *derivata negativa* si riconosce che:

- un punto x_0 è sicuramente un punto di minimo locale per la funzione f se la derivata $f'(x)$ è negativa prima di x_0 e positiva dopo, cioè se f' è **crescente**,
- un punto x_0 è sicuramente un punto di massimo locale per la funzione f se la derivata $f'(x)$ è positiva prima di x_0 e negativa dopo, cioè se f' è **decrescente**.

Tenuto conto che il segno della derivata seconda ci dice, servendosi del teorema di Lagrange, se la derivata prima è crescente o decrescente si hanno le seguenti due condizioni sufficienti:

- un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ è di minimo locale,
- un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ è di massimo locale.

OSSERVAZIONE 3.4. *I punti del grafico di f nei quali la tangente è orizzontale ma che non siano nè di minimo nè di massimo si dicono punti di flesso.*

Si pensi, ad esempio, al grafico altimetrico di una strada in salita: non è affatto escluso che si incontrino dei tratti, più o meno brevi, in cui la strada sia perfettamente orizzontale: si saliva, faticosamente prima, si respira un attimo e poi si ricomincia a salire...

È il flesso (quello della x^3 nell'origine) !

OSSERVAZIONE 3.5. *L'idea che a sinistra di un punto di minimo locale la funzione debba essere decrescente e a destra debba essere crescente è naif: l'esempio della funzione* $f(x) = x^2\,(2 - \sin(1/x))$ *nell'origine mostra, vedi Figura 7, cosa può accadere, anche se occorre molta esperienza e attenzione per comprenderlo !*

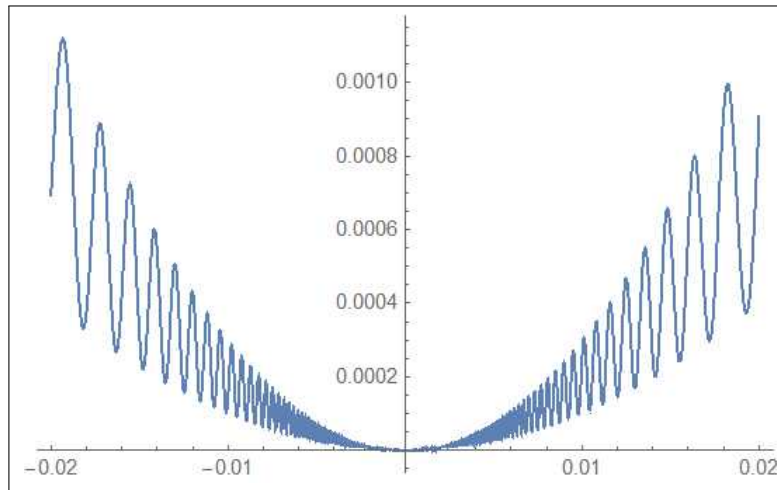



FIGURA 7. $f(x) = x^2\,(2 - \sin(1/x))\,,\ -0.02 < x < 0.02$

Pensate a una pallina che, scendendo verso l'origine, rimbalzi tra i due vincoli costituiti dalle due parabole $y = x^2$ *e* $y = 3x^2 \ldots$

4. Variazioni percentuali e derivate logaritmiche

La variazione percentuale

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)}$$

tra i valori di una funzione in due tempi t_1 e t_2 diversi, fornisce spesso un'importante valutazione della variazione stessa $f(t_2) - f(t_1)$.

Un classico esempio è lo sconto ottenuto su un prezzo di un bene, in cui i due valori sono il prezzo iniziale, cioè al tempo t_1 e quello *scontato*, cioè al successivo t_2.

ESEMPIO 4.1. *Il tale computer era in vendita a* 575 €*, ora è in offerta a* 499*: qual'è lo sconto percentuale praticato ?*

$$\frac{499 - 575}{575} \approx -13\%$$

ESEMPIO 4.2. *Il tale abito è esposto a* 259 €*: se il negozio dichiara di applicare su tutta la merce esposta il* 30% *di sconto l'abito sarà venduto a* 181,3 €.

Il teorema di Lagrange fornisce una stima delle variazioni percentuali

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{f(x_1)}(x_2-x_1) \approx \frac{f'(x_1)}{f(x_1)}(x_2-x_1)$$

variazioni certamente proporzionali a x_2-x_1 con fattore di proporzionalità approssimabile con il quoziente $f'(x_1)/f(x_1)$.

Il quoziente $f'(x)/f(x)$ ha il nome classico di

derivata logaritmica

per l'evidente motivo che, naturalmente per $f(x)>0$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\log[f(x)]$$

4.1. La derivata logaritmica. È interessante notare come calcolare la derivata logaritmica:

- di un prodotto
$$\frac{(u(x)v(x))'}{u(x)v(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}$$
le variazioni percentuali si *sommano*.
- di un quoziente
$$\frac{(u(x)/v(x))'}{u(x)/v(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}$$
le variazioni percentuali si *sottraggono*.
- di una potenza
$$\frac{(f^n(x))'}{f^n(x)} = n\,\frac{f'(x)}{f(x)}$$
le variazioni percentuali si *raddoppiano, si triplicano, ...*

4.2. Derivate di prodotti e derivata logaritmica. Sia $f(x)=a(x)\,b(x)\,c(x)$ abbiamo riconosciuto che

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a'(x)}{a(x)}+\frac{b'(x)}{b(x)}+\frac{c'(x)}{c(x)}$$

pertanto

$$f'(x)=f(x)\left\{\frac{a'(x)}{a(x)}+\frac{b'(x)}{b(x)}+\frac{c'(x)}{c(x)}\right\}$$

espressione che riproduce quanto già conosciuto:

- la derivata di un prodotto di n fattori è espressa con una somma di n addendi,
- ciascun addendo è prodotto della funzione stessa per la derivata logaritmica di uno dedi fattori.

4.3. Esercizi.

(1) ►► Calcolare la derivata logaritmica di $f(x) = x(x-1)(x-2)$

(2) ►► Calcolare la derivata logaritmica di $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(3) ►► Sia $f(x) = x^2$ calcolare la massima variazione percentuale

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{f(n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

CAPITOLO 16

Le funzioni convesse

1. il significato intuitivo

La funzione convessa per antonomasia è x^2: la forma della regione del piano cartesiano inferiormente delimitata dal grafico di x^2 è quella di un insieme convesso, un insieme cioè che se contiene due punti A e B contiene sempre anche tutto il segmento AB.

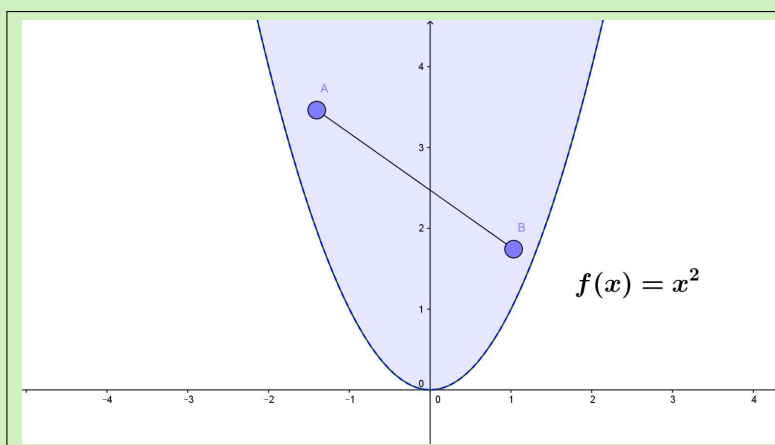



FIGURA 1. Una funzione convessa

DEFINIZIONE 1.1. *In generale si danno definizioni diverse, sostanzialmente equivalenti, delle funzioni convesse:*

- *se f è derivabile almeno due volte $f''(x) \geq 0$,*
- *la porzione di grafico tra qualsiasi coppia di punti $(x_0, f(x_0))$ e $(y_0, f(y_0))$ sta sotto la retta per i due punti,*

$$\forall t \in [0,1]: \ f((1-t)x_0 + t\,y_0) \leq (1-t)\,f(x_0) + t\,f(y_0)$$

- *il grafico di f sta sopra le sue tangenti,*

$$f(x) \geq f(y_0) + f'(y_0)\,(x - y_0)$$

- *se f è derivabile la derivata prima f' è crecente,*

$$x \leq y \quad \rightarrow \quad f'(x) \leq f'(y).$$

ESEMPIO 1.2. *Sono convesse, ad esempio:*

$$x^2, \quad x^4, \quad 3x^2+4x^4, \quad e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{x^2}, \quad x^2 e^{x^2}$$

(Verificate calcolando la derivata seconda)

DEFINIZIONE 1.3. *Se f è convessa la sua opposta $-f$ si dice concava.*

ESEMPIO 1.4. *Sono concave, ad esempio:*

$$-x^2, \ -x^4, \ -e^x, \ \ln(x)$$

La convessità di f in $[a,b]$ implica

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

come pure, più in generale scelti due coefficienti positivi α e β tali che $\alpha+\beta=1$ si ha

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: \ f(\alpha x_1+\beta x_2) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia f convessa nell'intervallo I e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ allora*

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $n=3$: $\quad \alpha+\beta+\gamma=1 \quad \to \quad \alpha+\beta=1-\gamma$

$$\xi = \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3 \quad \to \quad \xi = (1-\gamma)\left\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right\}+\gamma x_3$$

Ne segue

$$f(\xi) \leq (1-\gamma)\, f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right)+\gamma f(x_3) \tag{16}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1 \to f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}f(x_1)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}f(x_2)$$

moltiplicando per $1-\gamma$ e tenendo conto della precedente (16) si ha

$$f(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)+\gamma f(x_3)$$

Con procedimento analogo si prova, per induzione, il risultato per qualunque $n \in \mathbb{N}$.

□

COROLLARIO 1.6. *Se f è concava allora*

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

ESEMPIO 1.7. *La funzione* $\log_a$*, il logaritmo di base* $a > 1$*, è concava quindi*

$$\log_a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_a(x_k)$$

ovvero

$$\log_a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \log_a\left(\sqrt[n]{x_1\,x_2,\dots x_n}\right)$$

ovvero di conseguenza

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{x_1\,x_2,\dots x_n}$$

Risultato che prova che la media geometrica *è in generale minore della* media aritmetica*.*[1]

2. Il metodo di Newton

Il titolo si riferisce a un procedimento iterativo per approssimare una radice $\xi \in [a_0, b_0]$ dell'equazione $f(x) = 0$ sapendo che:

- $f(a_0)\,f(b_0) < 0$, cioè segni opposti agli estremi,
- f è continua e derivabile almeno due volte,
- f è convessa in $[a_0, b_0]$,

Supponiamo, ad esempio $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$ e consideriamo la retta tangente al grafico nel punto $(a_0, f(a_0))$

$$y = f(a_0) + f'(a_0)\,(x - a_0)$$

Sia a_1 l'ascissa dell'intersezione di tale retta con l'asse x

$$0 = f(a_0) + f'(a_0)\,(a_1 - a_0) \quad \to \quad a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

La convessità di f implica, vedi Figura 2 , che

$$a_1 \leq \xi, \quad f(a_1) > 0$$

A questo punto il procedimento che ha fatto passare da a_0 ad a_1 può essere iterato

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}, \quad \dots \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

offrendo approssimazioni $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq \xi$ via via migliori della radice ξ.

Nel caso opposto $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$ il procedimento parte dalla tangente nell'estremo opposto b_0 e con l'analogo procedimento

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}, \quad \dots \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

[1] Una scuola più severa potrebbe adottare come media dei voti per ciascun studente la *media geometrica* in luogo della tradizionale *media aritmetica*.

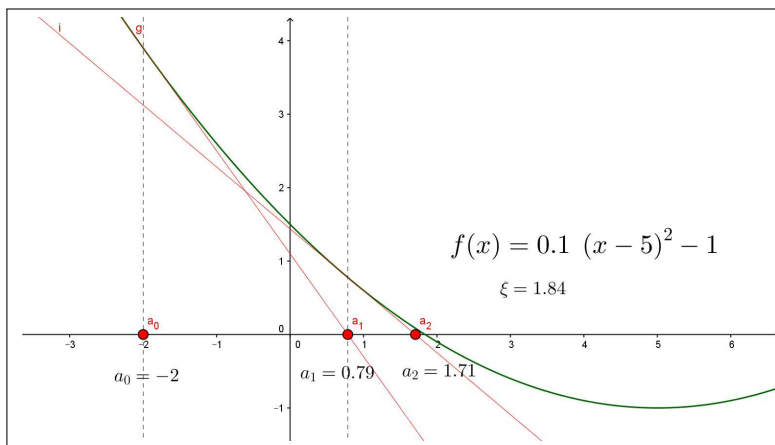



FIGURA 2. $f(x) = 0.1\,(x-5)^2 - 1$

produce una successione di approssimazioni $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq \xi$ via via migliori della radice ξ.

ESEMPIO 2.1. *Sia $f(x) = x^2 - 5$, funzione convessa. Agli estremi dell'intervallo $[-3, 0]$ prende valori di segno opposto, quindi esiste una radice, ovviamente $-\sqrt{5}$, nell'intervallo.*

Costruiamo a partire da $a_0 = -3$ le approssimazioni di Newton (vedi pagina 52) :

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0} = a_0 - \frac{a_0^2 - 5}{2a_0} = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{5}{a_0}\right)$$

e, in generale,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$$

I valori seguenti rappresentano le prime 3 iterazioni eseguite a partire da -3

$$-2.33333, \quad -2.2381, \quad -2.23607$$

Si noti che $-\sqrt{5} \approx -2,23607$.

La rapidità di approssimazione è generalmente notevole !

2.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $f(x) = e^{0.1x}$: tenuto conto che f è convessa riconoscere che

$$2f(n) \leq f(n-1) + f(n+1).$$

(2) ▶▶ Tenuto conto che $f(x) = x^2$ è convessa riconoscere che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(3) ▶▶ Tenuto conto che $f(x) = \sqrt{x}$ è concava riconoscere che

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1/2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

CAPITOLO 17

Il teorema di Cauchy e la regola di Höpital

1. Il teorema di Cauchy

Si tratta di una importante rilettura del Teorema di Rolle: siano f e g due funzioni continue e derivabili in $[a,b]$ consideriamo le loro combinazioni lineari

$$F(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$$

scegliendo opportunamente i due coefficienti α e β si può ottenere una F che produca valori uguali agli estremi di $[a,b]$

$$\alpha\, f(a) + \beta\, g(a) = \alpha\, f(b) + \beta\, g(b) \quad \to \quad \beta\left(g(a) - g(b)\right) = \alpha\left(f(b) - f(a)\right)$$

Basta infatti prendere $\alpha = g(b) - g(a), \quad \beta = -\big(f(b) - f(a)\big)$ per costruire una funzione $F(x)$ che, prendendo valori uguali agli estremi avrà, per il teorema di Rolle, la derivata

$$F'(x) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(x) - \big(f(b) - f(a)\big)\, g'(x)$$

nulla in almeno un punto $c \in [a,b]$.

Quanto osservato si riassume nel seguente

TEOREMA 1.1. *Siano f e g due funzioni continue e derivabili in $[a,b]$ allora esiste $c \in [a,b]$ in cui*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$$

COROLLARIO 1.2. *Se $\forall x \in [a,b]: \ g'(x) \neq 0$ allora*

$$\exists c \in [a,b]: \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\forall x \in [a,b] : g'(x) \neq 0 \quad \to \quad g(b) - g(a) \neq 0$$[1]

pertanto l'asserto del corollario è lo stesso del teorema di Cauchy dividendo membro a membro per $g'(c)$ e per $g(b) - g(a)$. □

[1] Se fosse $g(b) = g(a)$ allora ci sarebbe qualche punto c in cui $g'(c) = 0$.

1.1. Un'interpretazione cinematica. Siano A e B due atleti che competono sui 5000 metri piani: siano $a(t)$ e $b(t)$ i metri percorsi al tempo t. con strategie di gara diverse, dai due concorrenti.

Supponiamo che, pur essendosi più volte nel corso della gara superatisi reciprocamente, cioè correndo a velocità $a'(t)$ e $b'(t)$ spesso differenti, entrambi raggiungano il traguardo nello stesso (ottimo) tempo di 13 minuti esatti.

Si può provare che c'è stato almeno un tempo τ in cui i due atleti correvano alla stessa velocità.

Infatti, tenuto conto che $a(0) = b(0)$ e $a(13) = b(13)$, dal teorema di Cauchy si ha

$$1 = \frac{a(13) - a(0)}{b(13) - b(0)} = \frac{a'(\tau)}{b'(\tau)} \quad \to \quad a'(\tau) = b'(\tau)$$

da cui al tempo τ, quello previsto dal teorema di Cauchy, i due correvano alla stessa velocità.

1.2. Un'interpretazione geometrica. Consideriamo la curva $\mathscr{C}$ del piano formata dai punti

$$P = (f(x), g(x)), \qquad x \in [a, b]$$

Sia $A = (f(a), g(a))$ il primo punto e $B = (f(b), g(b))$ l'ultimo e sia r_{AB} la retta per A e B.

Il teorema di Cauchy afferma che esistono punti $c \in [a, b]$ tali che la retta tangente alla curva $\mathscr{C}$ in $P = (f(c), g(c))$ è parallela alla r_{AB}.

ESEMPIO 1.3. *Siano* $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$*: al variare di* $t \in [0, 2\pi]$ *i punti di coordinate* $(f(t), g(t))$*, cioè* $(\cos(t), \sin(t))$ *formano la circonferenza di centro l'origine e raggio* $r = 1$.

Scegliamo, ad esempio, $a = 0$ *e* $b = \pi/2$*: riesce*

$$A = (1, 0), \qquad B = (0, 1), \qquad r_{AB} : \ x + y = 1$$

È evidente che la tangente alla circonferenza nel punto $C = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$ *è parallela alla* r_{AB}.

Per quanto riguarda l'espressione analitica del teorema di Cauchy si ha infatti

$$\frac{\cos(\pi/2) - \cos(0)}{\sin(\pi/2) - \sin(0)} = \frac{-1}{1} = \frac{-\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}$$

1.3. Esercizi.

(1) ►► Scrivere l'espressione di Cauchy per il quoziente $\dfrac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)}$ essendo $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2$.

(2) ▶▶ Scrivere l'espressione di Cauchy per il quoziente $\dfrac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}$ essendo $f(x)=x^3$, $g(x)=\arctan(x)$.

(3) ▶▶ Scrivere l'espressione di Cauchy per il quoziente $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2/2}$ e dedurre da essa che $1-\cos(x)\leq\dfrac{1}{2}x^2$.

2. La regola di de l'Hôpital

La regola di de l'Hôpital fornisce un procedimento di calcolo del limite di un quoziente nel caso (... *difficile*) in cui sia il numeratore che il denominatore abbiano limite zero (o entrami divergano).

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=0,\qquad \to\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ ?$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} f(x_0)=0\\ g(x_0)=0\end{cases}\qquad \to\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Nel caso di funzioni f e g continue e derivabili si può gestire il quoziente con il precedente Corollario del teorema di Cauchy ($g'(x)\neq 0$), vedi pagina 227,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in[x_0,x]$$

Pertanto se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

allora

$$x\approx x_0\quad\to\quad \xi\approx x_0\quad\to\quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\approx\ell\quad\to\quad \frac{f(x)}{g(x)}\approx\ell$$

ovvero

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\quad\to\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

TEOREMA 2.1 (de l'Hôpital). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili e riesca $f(x_0)=g(x_0)=0$ allora*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\quad\to\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

sia nel caso ℓ finito che nel caso $\ell=\pm\infty$

ESEMPIO 2.2. *Si debba cercare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Riesce ovviamente

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x = 0$$

Pertanto il limite della frazione assegnata non è ovvio.

La regola di de l'Hôpital ordina i seguenti passaggi:

- *determinare la frazione delle due rispettive derivate*

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (x)' = 1 \quad \to \quad \frac{e^x}{1}$$

- *cercarne il limite, sempre per $x \to 0$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

,

- *dedurre allora che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ESEMPIO 2.3. *Si debba determinare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

Il numeratotre e il denominatore hanno limite zero.

La sequenza relativa alla regola di de l'Hôpital è la seguente

$$\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'} = \frac{\sin(x)}{2x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = ?$$

Ancora una frazione con numeratore e denominatore con limite zero: si riapplica la regola di de l'Hôpital

$$\frac{(\sin(x))'}{(2x)'} = \frac{\cos(x)}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Risalendo si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

OSSERVAZIONE 2.4. *Al di fuori del caso di numeratore e denomionatore infinitesimi il limite della frazione $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ delle derivate può non avere alcun collegamento con il limite della frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Si pensi ad esempio al caso

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+4}{x+2} = \frac{4}{2} = 2$$

Il quoziente delle derivate avrebbe prodotto

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+4)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$$

PROPOSIZIONE 2.5. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili e riesca*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$$

anche nel caso $x_0 = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \to \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

sia nel caso ℓ finito che nel caso $\ell = \pm\infty$,

DIMOSTRAZIONE. Scelto un fissato punto $m \approx x_0$ scriviamo il rapporto da studiare nella forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x)-f(m)} \times \frac{f(x)-f(m)}{g(x)-g(m)} \times \frac{g(x)-g(m}{g(x)}$$

Dei tre fattori a secondo membro, tenuto conto che $f(x)$ e $g(x)$ divergono , sappiamo che:

- $\dfrac{f(x)}{f(x)-f(m)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{f(m)}{f(x)}} \approx 1,$
- $\dfrac{f(x)-f(m)}{g(x)-g(m)} = \dfrac{f'\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (m,x)$
- $\dfrac{g(x)-g(m)}{g(x)} = 1 - \dfrac{g(m)}{g(x)} \approx 1$

Da cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'\xi)}{g'(\xi)}$$

e quindi ancora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \to \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

□

ESEMPIO 2.6. *Sia $n \in \mathbb{N}$: consideriamo il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

Numeratore e denominatore divergono per $x \to +\infty$.

La regola di de l'Hôpital ordina pertanto la seguente sequenza

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} n\,\frac{x^{n-1}}{e^x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} n\,\frac{x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} n(n-1)\,\frac{x^{n-2}}{e^x}$
- *ecc... ecc...*

Dopo n iterazioni del procedimento ci troviamo a considerare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} n! \frac{1}{e^x} = 0$$

da cui si risale, passo dopo passo, fino a riconoscere che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Riassumendo:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinitesime o entrambe divergenti in x_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \to \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

anche nel caso $\ell = \pm\infty$.

2.1. Esercizi.

(1) ►► Calcolare il limite $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\pi x} - 1}{\pi x}$ servendosi della regola di de l'Hôpital.

(2) ►► Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3}$ servendosi della regola di de l'Hôpital.

(3) ►► Sia $\alpha > 0$ cercare il limite $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log(x)$ osservando che $x^\alpha \log(x) = \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}}$ e servendosi quindi della regola di de l'Hôpital.

CAPITOLO 18

I polinomi di Taylor

1. I polinomi

Assegnati:

- la funzione f, indefinitamente derivabile[1] nell'intervallo I,
- un punto $x_0 \in I$,
- un numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$

si possono costruire i polinomi, detti di Taylor,

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Il punto x_0 scelto si chiama *punto iniziale* mentre il numero naturale n si chiama *ordine*[2] *del polinomio*.

Ovviamente il polinomio di Taylor $T_n(x;x_0)$ di ordine n ha grado minore o uguale ad n.

ESEMPIO 1.1. *Sia* $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ *ed* $n = 1$*:*

$$T_1(x;0) = \sin(0) + \sin'(0)(x-0) = 0 + \cos(0)(x-0) = x$$

ESEMPIO 1.2. *Sia* $f(x) = \sqrt{15+x}$, $x_0 = 1$ *ed* $n = 2$*:*

$$T_2(x;1) = \sqrt{15+1} + \frac{1}{2\sqrt{15+1}}(x-1) - \frac{1}{4(\sqrt{15+1})^3}\,\frac{(x-1)^2}{2!} =$$

$$= 4 + \frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{512}(x-1)^2$$

ESEMPIO 1.3. *Sia* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$ *e* $n = 3$*:*

[1] Le funzioni indefinitamente derivabili in I si dicono anche funzioni $C^\infty(I)$

[2] Ordine, non grado: infatti nessuno assicura che il polinomio di ordine, ad esempio, 2 abbia grado 2, la derivata $f''(x_0)$ potrebbe essere nulla.

Tenuto conto che

$$\begin{array}{lll} f(x) & = \dfrac{1}{1-x} & f(0)=1 \\ f'(x) & = \dfrac{1}{(1-x)^2} & f'(0)=1 \\ f''(x) & = \dfrac{2}{(1-x)^3} & f''(0)=2 \\ f'''(x) & = \dfrac{6}{(1-x)^4} & f'''(0)=6 \end{array}$$

$$T_3(x;0) = 1+x+x^2+x^3$$

PROPOSIZIONE 1.4. *La funzione $f(x)$ e il relativo polinomio di Taylor $P(x) = T_n(x;x_0)$ soddisfano nel punto x_0 le seguenti $n+1$ uguaglianze :*

$$f(x_0) = P(x_0), \quad f'(x_0) = P'(x_0), \quad \dots \quad f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0)$$

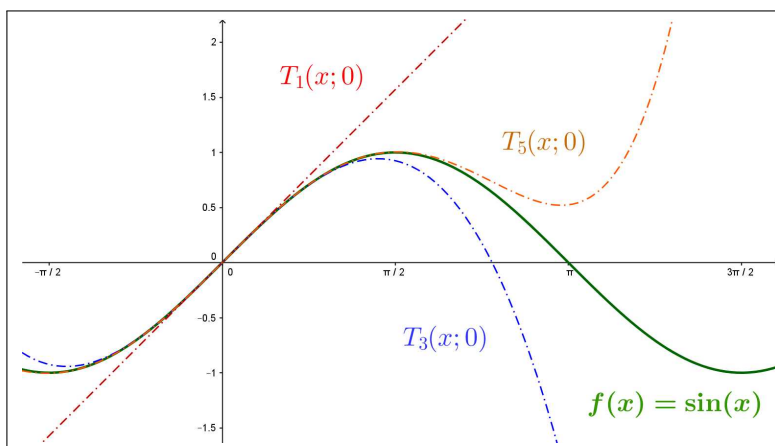



FIGURA 1. $\sin(x)$, $\quad x$, $\quad x-\frac{x^3}{3!}$, $\quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

> *L'idea fondamentale che la Proposizione suggerisce è che i polinomi di Taylor* **somiglino** *notevolmente alla funzione $f(x)$, cioè producano, almeno se $x \approx x_0$, valori $P(x) \approx f(x)$.*

Guardando la Figura 1, grafico di $\sin(x)$ e dei suoi tre polinomi di Taylor si riconosce che

- il primo $T_1(x;0)$ si sovrappone a $\sin(x)$ per $x \approx 0$,
- il terzo $T_3(x;0)$ è abbastanza simile a $\sin(x)$ fin quasi a $\pi/2$,
- il quinto $T_5(x;0)$ è simile a $\sin(x)$ anche un po' oltre $\pi/2$.

1.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $f(x) = \sqrt{9+x}$: determinare il pol. di Taylor per $x_0 = 0$ e $n = 1$
(2) ▶▶ Sia $f(x) = \cos(x)$: determinare il pol. di Taylor per $x_0 = 0$ e $n = 2$
(3) ▶▶ Sia $f(x) = \sin(3x)$: determinare il pol. di Taylor per $x_0 = 0$ e $n = 3$

2. La formula di Taylor

La *formula di Taylor* consiste in un'espressione della differenza

$$R(x) = f(x) - T_n(x;x_0)$$

detta *resto*, tra i valori della funzione $f(x)$ e quelli del corrispondente polinomio di Taylor $T_n(x;x_0)$.

L'espressione data dalla *formula di Taylor* consente di stimare la grandezza del resto $R(x)$ e quindi decidere se servirsi vantaggiosamente di $T_n(x;x_0)$ per approssimare i valori $f(x)$.

Consideriamo il caso $n = 0$, per il quale $P(x) = T_0(x;x_0) = f(x_0)$:

$$R(x) = f(x) - P(x), \quad R'(x) = f'(x)$$

si ha $R(x_0) = 0$ e quindi

$$R(x) = R(x) - R(x_0)$$

dal teorema di Lagrange esiste c nell'intervallo tra x_0 ed x tale che

$$R(x) = R(x) - R(x_0) = R'(\eta)(x - x_0) = f'(\eta)(x - x_0)$$

Riassumendo:

$$f(x) - T_0(x;x_0) = f'(\eta)(x - x_0) \qquad R(x) = \frac{f^{[1]}(\eta)}{1!}(x - x_0)^1$$

Consideriamo il caso di $n = 1$:

$$P(x) = T_1(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Posto come sopra $R(x) = f(x) - P(x)$ e posto $d(x) = (x - x_0)^2$ consideriamo il quoziente

$$\frac{R(x)}{d(x)} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

Tenuto conto che $R(x_0) = 0, \quad d(x_0) = 0$ si ha

$$\frac{R(x)}{d(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{d(x) - d(x_0)}$$

Applicando il teorema di Cauchy, vedi pagina 227, si ha

$$\frac{R(x)}{d(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{d(x) - d(x_0)} = \frac{R'(c)}{d'(c)}$$

Tenuto conto che $R'(x_0) = 0, \quad d'(x_0) = 0$ si ha anche

$$\frac{R'(c)}{d'(c)} = \frac{R'(c) - R'(x_0)}{d'(c) - d'(x_0)}$$

e applicando nuovamente il teorema di Cauchy, riferito questa volta alle due funzioni R' e d', si ha

$$\frac{R'(c) - R'(x_0)}{d'(c) - d'(x_0)} = \frac{R''(\eta)}{d''(\eta)}$$

Tenuto presente che

$$R''(x) = f''(x), \quad d''(x) = 2$$

si ha, in definitiva

$$\frac{R(x)}{d(x)} = \frac{f''(\eta)}{2} \quad \to \quad R(x) = \frac{f''(\eta)}{2} d(x) \quad \to \quad R(x) = \frac{f^{[2]}(\eta)}{2!} (x - x_0)^2$$

ovvero

$$f(x) - T_1(x; x_0) = \frac{f^{[2]}(\eta)}{2!} (x - x_0)^2$$

I conti sperimentati nei primi casi $n = 0$ ed $n = 1$ si conservano in generale, in modo da dar luogo alla seguente formula che indica il divario tra la $f(x)$ e i suoi polinomi di Taylor

$$f(x) - T_n(x; x_0) = \frac{f^{[n+1]}(\eta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \tag{17}$$

$f^{[n+1]}$ rappresenta la derivata $(n+1)$-esima e il numero η è compreso nell'intervallo tra x e x_0.

L'espressione trovata

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \tag{18}$$

si chiama *espressione di Lagrange* del resto.

La presenza del fattoriale $(n+1)!$ a denominatore fa ben sperare che il *resto* sia, almeno per n abbastanza grande e $x \approx x_0$, abbastanza piccolo: cioè che

$$f(x) \quad \approx \quad T_n(x; x_0)$$

È chiaro che per valutare quanto $f(x)$ differisca dal polinomio di Taylor scelto occorre poter stimare $|R(x)|$: questo si ottiene tenendo conto della grandezza, in modulo, dei tre fattori che lo compongono:

- la derivata $|f^{[n+1]}(\eta)|$,
- il fattore $|x - x_0|^{n+1}$,
- il fattoriale $(n+1)!$ a dividere.

La formula (17) implica con le notazioni degli «*o piccolo di Landau*» che

$$f(x) - T_n(x; x_0) = o(|x - x_0|^n) \tag{19}$$

2.1. Esercizi.

(1) ►► Sia $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ determinare il resto $f(2) - T_2(2;1)$.

(2) ►► Sia $f(x) = \sqrt{1+x}$ determinare il resto $f(5) - T_2(5;0)$.

(3) ►► Sia $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ determinare il resto $f(0.5) - T_2(0.5;0)$.

3. Interesse numerico della formula di Taylor

ESEMPIO 3.1. *Si debba calcolare il valore* $\sin(0.123)$*: scelto* $x_0 = 0$ *consideriamo i vari polinomi di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 0$ *associabili alla funzione* $\sin(x)$*:*

$n = 0$	$T_0(x;0) = 0$	$\sin(x) - T_0(x;0) = \sin(x) - 0$	$= \cos(c)\,x$
$n = 1$	$T_1(x;0) = x$	$\sin(x) - T_1(x;0) = \sin(x) - x$	$= -\frac{\sin(\eta)}{2}x^2$
$n = 2$	$T_2(x;0) = x$	$\sin(x) - T_2(x;0) = \sin(x) - x$	$= -\frac{\cos(\eta)}{3!}x^3$

*(**Attenzione**: il polinomio* $T_2(x;0)$ *è lo stesso di* $T_1(x;0)$*, non è uno sbaglio, controllate !)*

Teniamo conto del polinomio alla terza riga, $n = 2$*:*

$$|\sin(x) - x| = \left|\frac{\cos(\eta)}{3!}x^3\right| \leq \frac{1}{6}|x|^3$$

avendo tenuto presente che l'ignoto valore $|\cos(\eta)|$ *è comunque un numero in valore assoluto minore o uguale a* 1.

Pertanto

$$|\sin(0.123) - 0.123| \leq \frac{1}{6}|0.123|^3$$

ovvero

$$|\sin(0.123) - 0.123| \leq 0,0003101445$$

ovverro ancora

$$0,1226898555 \leq \sin(0.123) \leq 0,1233101445$$

La differenza fra le due stime è 0,000620289 *poco più di* 6 *decimillesimi.*

Il valore esatto *offerto dalla calcolatrice di Windows è* 0.1226900900

Si può apprezzare la rapidità e semplicità della approssimazione offerta dal terzo polinomio di Taylor.

3.1. Alcune considerazioni:

- per potersi servire dei polinomi di Taylor occorre... poterli costruire, occorre cioè che nel punto iniziale x_0 scelto sia possibile calcolare i diversi valori $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dots$ (cosa accaduta in relazione alla funzione $\sin(x)$ e alla scelta di $x_0 = 0$),
- per poter essere sicuri che il resto R sia piccolo occorre che il punto x in cui si vuol fare il calcolo e il punto iniziale x_0 siano abbastanza vicini (cosa che è accaduta nel caso precedente $x = 0.123$ e $x_0 = 0$).

ESEMPIO 3.2. *Supponiamo di dover risolvere l'equazione*

$$3^{x^2} = 9^{4x} + 6 \quad \textit{ovvero} \quad 3^{x^2} - 3^{8x} = 6$$

Tenuto presente che $x = 8 \quad \to \quad 3^{x^2} - 3^{8x} = 0$*, possiamo riconoscere che la soluzione* x *dell'equazione assegnata sia vicina a* 8*: poniamo*

$$x = 8 + \varepsilon \quad \to \quad 3^{(8+\varepsilon)^2} - 3^{8(8+\varepsilon)} = 6$$

ovvero

$$e^{(8+\varepsilon)^2 \log(3)} - e^{8(8+\varepsilon)\log(3)} = 6 \quad \to \quad e^{(16\varepsilon+\varepsilon^2)\log(3)} - e^{8\varepsilon \log(3)} = 6 \times 3^{-64}$$

Approssimando

$$\begin{array}{l} e^{(16\varepsilon+\varepsilon^2)\log(3)} \approx 1 + (16\varepsilon + \varepsilon^2)\log(3) \approx 1 + (16\varepsilon)\log(3) \\ e^{8\varepsilon\log(3)} \approx 1 + 8\varepsilon \log(3) \end{array}$$

Si arriva all'equazione approssimata

$$8\varepsilon \log(3) = 6 \times 3^{-64} \quad \to \quad \varepsilon = \frac{3^{-63}}{4\log(3)}, \quad \varepsilon \leq 10^{-30}$$

La soluzione approssimata dell'equazione è pertanto

$$x_0 = 8 + \frac{3^{-63}}{4\log(3)}$$

Numero che in forma decimale sarà

$$x_0 = 8,\overbrace{0000\dots0000}^{30\ \textit{zeri}}\dots$$

3.2. Esercizi.

(1) ►► Fornire una maggiorazione per $|e^x - T_3(x;0)|$ valida per $x \in [0,1]$.
(2) ►► Fornire una maggiorazione per $|\sin(x) - T_5(x;0)|$ valida per $x \in [0,\pi/2]$.
(3) ►► Fornire una maggiorazione per $|\cos(x) - T_4(x;0)|$ per $x \in [0,\pi/2]$.

CAPITOLO 19

Interpolazione

1. Interpolazione lineare

Assegnata una funzione f e scelti due punti a e b consideriamo l'equazione $y = P(x)$ della retta passante per i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$P(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

I valori della funzione P coincidono con quelli della f agli estremi e, probabilmente, *somigliano* a quelli della f anche nei punti intermedi, almeno se essi non sono troppo distanti:

- $x_0 = a \quad \rightarrow \quad P(x_0) = f(x_0)$
- $x_0 = b \quad \rightarrow \quad P(x_0) = f(x_0)$
- $a < x_0 < b \quad \rightarrow \quad P(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0)$

La differenza tra $f(x_0)$ e $P(x_0)$ si stima con un intelligente uso del Teorema di Rolle.

Consideriamo la funzione di t

$$d(t) = f(t) - P(t) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \frac{(t-a)(t-b)}{(x_0-a)(x_0-b)}$$

si ha

$$d(a) = 0, \quad d(x_0) = 0, \quad d(b) = 0$$

quindi per il teorema di Rolle

$$\begin{array}{lcl} d(a) = d(x_0) & \rightarrow & \exists c_1 \in (a, x_0) : \ d'(c_1) = 0, \\ d(x_0) = d(b) & \rightarrow & \exists c_2 \in (x_0, b) : \ d'(c_2) = 0 \end{array}$$

e ancora

$$d'(c_1) = d'(c_2) \quad \rightarrow \quad \exists c \in (c_1, c_2) : \ d''(c) = 0$$

Se ora calcoliamo le derivate di $d(t)$ abbiamo

$$\begin{cases} d'(t) = f'(t) - P'(t) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \dfrac{(t-a) + (t-b)}{(x_0-a)(x_0-b)} \\ \\ d''(t) = f''(t) - P''(t) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \dfrac{2}{(x_0-a)(x_0-b)} \end{cases}$$

Tenuto conto che P è di primo grado si ha $P'' \equiv 0$ e quindi

$$d''(t) = f''(t) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \frac{2}{(x_0 - a)(x_0 - b)}$$

$$d''(c) = 0 \quad \rightarrow \quad f''(c) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \frac{2}{(x_0 - a)(x_0 - b)} = 0$$

da cui segue

$$f(x_0) - P(x_0) = \frac{f''(c)}{2} (x_0 - a)(x_0 - b)$$

Tenuto presente che il modulo del polinomio $(x_0 - a)(x_0 - b)$ è, per $x \in [a, b]$ massimo nel punto medio $\dfrac{a+b}{2}$ si ha

$$\forall x_0 \in [a, b] : \ |f(x_0) - P(x_0)| \leq \frac{|f''(c)|}{2} \left(\frac{|b-a|}{2} \right)^2$$

Se $\forall x \in [a, b]$ riesce $\quad |f''(x)| \leq M$ allora

$$\forall x_0 \in [a, b] : \ |f(x_0) - P(x_0)| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{|b-a|}{2} \right)^2$$

ESEMPIO 1.1. *Sia* $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad a = 4, \quad b = 16$, *il polinomio di interpolazione lineare è*

$$P(x) = \frac{x}{6} + \frac{4}{3}$$

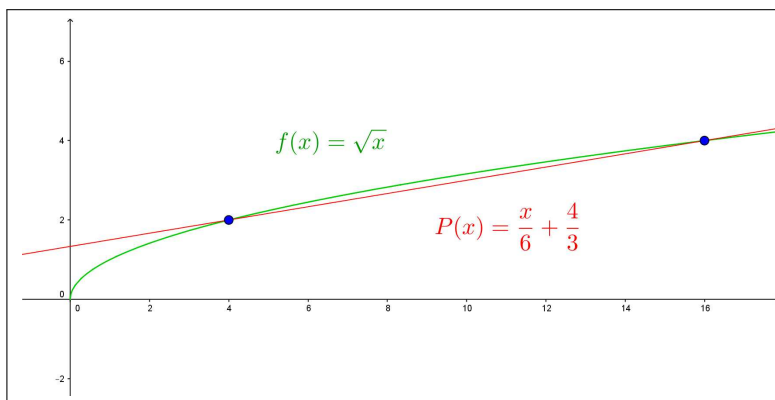



FIGURA 1. Interpolazione lineare

La figura illustra chiaramente quanto tale polinomio approssimi bene la funzione e quindi quanto sia utile servirsi di esso per approssimarne diversi valori:

$$\begin{array}{lll|ll} \sqrt{6} & \approx \frac{6}{6}+\frac{4}{3} & = \frac{7}{3} & \sqrt{6} & \approx 2,44949 \\ \sqrt{10} & \approx \frac{10}{6}+\frac{4}{3} & = 3 & \sqrt{10} & \approx 3,16227 \\ \sqrt{13} & \approx \frac{13}{6}+\frac{4}{3} & = 3.5 & \sqrt{13} & \approx 3,60555 \\ \dots & & & & \end{array}$$

ESEMPIO 1.2. *Sia* $f(x) = \sin(x)$, $\quad a = 0$, $\quad b = \pi/2$, *il polinomio di interpolazione è*

$$P(x) = \frac{2}{\pi}x$$

Per ogni $x_0 \in [0, \pi/2]$ *si ha quindi*

$$\sin(x_0) - P(x_0) = \frac{1}{2}(x_0 - 0)(x_0 - \pi/2)(-\sin(c))$$

da cui ricordando che $|\sin(c)| \leq 1$ *si ha*

$$\left|\sin(x_0) - \frac{2}{\pi}x_0\right| \leq \frac{1}{2}|x_0(x_0 - \pi/2)| \leq \frac{\pi^2}{32} \leq 0,308$$

OSSERVAZIONE 1.3. *Il procedimento di interpolazione lineare è più frequente di quanto si pensi.*

Supponiamo, ad esempio di sapere che $f(10) = 2.5$, $f(0) = 0.5$*: quanto si stima che possa valere* $f(2)$ *?*

È normale lavorare come segue:

passando da 0 *a* 10*, cioè aumentando* x *di* $\Delta = 10$ *i valori della funzione sono passati da* 0.5 *a* 2.5*, sono aumentati di* 2*. Aumentando* x *di un quinto dell'aumento precedente i valori della funzione aumenteranno... di un quinto dell'aumento precedente... cioè di* 0.4

$$f(2) \approx f(0) + 0.4 = 0.5 + 0.4 = 0.9$$

Valore che corrisponde alla formula

$$f(2) \approx f(0) + \frac{f(10) - f(0)}{10} \cdot 2 = 0.5 + \frac{2}{10}2 = 0.9$$

1.1. Esercizi.

(1) ►► Determinare il polinomio di interpolazione lineare $P(x)$ relativo alla funzione $f(x) = \log_e(x)$ e ai punti $x_1 = 1$ e $x_2 = e$ e maggiorare la differenza $|f(x) - P(x)|$ per $x \in [1, e]$.

(2) ▶▶ Determinare il polinomio di interpolazione lineare $P(x)$ relativo alla funzione $f(x) = \sqrt{x}$ e ai punti $x_1 = 100$ e $x_2 = 144$ e maggiorare la differenza $|f(x) - P(x)|$ per $x \in [100, 144]$.

(3) ▶▶ Determinare il polinomio di interpolazione lineare $P(x)$ relativo alla funzione $f(x) = e^{-x}$ e ai punti $x_1 = 0$ e $x_2 = \log(10)$ e maggiorare la differenza $|f(x) - P(x)|$ per $x \in [0, \log(10)]$.

2. Interpolazione quadratica

Assegnata una funzione f e scelti tre punti a, b e c consideriamo il polinomio di secondo grado P che coincide con f nei tre punti.

Tenuto conto che i tre polinomi

$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad B(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad C(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

valgono rispettivamente

$$\begin{array}{lll} A(a) = 1 & A(b) = 0 & A(c) = 0 \\ B(a) = 0 & B(b) = 1 & B(c) = 0 \\ C(a) = 0 & C(b) = 0 & C(c) = 1 \end{array}$$

il polinomio cercato $P(x)$ è certamente $P(x) = f(a)A(x) + f(b)B(x) + f(c)C(x)$ ovvero

$$P(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \tag{20}$$

Come nel precedente caso lineare cerchiamo di stimare la differenza $f(x_0) - P(x_0)$ in punti x_0 diversi da a, b, c.

Costruita la funzione di t, analoga a quella usata nel caso dell'interpolazione lineare

$$d(t) = f(t) - P(t) - \{P(x_0) - f(x_0)\} \frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)}$$

si riconosce che d si annulla in (almeno) 4 punti, a, b, c, x_0, e quindi, sempre dal teorema di Rolle,

- d' si annulla in (almeno) 3 punti,
- d'' si annulla in (almeno) 2 punti,
- d''' si annulla in (almeno) 1 punto γ

Tenuto conto che

$$\begin{cases} d'''(t) = f'''(t) - P'''(t) - \{f(x_0) - P(x_0)\} \left(\dfrac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)} \right)''' \\ P'''(t) \equiv 0 \\ \left(\dfrac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)} \right)''' = \dfrac{3!}{(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)} \end{cases}$$

Si ha

$$d'''(\gamma) = 0 \quad \rightarrow \quad f'''(\gamma) - \frac{3!}{(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)}\{f(x_0) - P(x_0)\} = 0$$

da cui

$$f(x_0) - P(x_0) = \frac{f'''(\gamma)}{3!}(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)$$

Se $\forall x$ riesce $|f'''(x)| \leq M$ si ha, analogamente al caso lineare precedente,

$$|f(x_0) - P(x_0)| \leq \frac{M}{3!}|(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)| \tag{21}$$

ESEMPIO 2.1. *Consideriamo $f(x) = \cos(x)$ e siano $a = -\pi/2$, $b = 0$, $c = \pi/2$ i tre punti. Si ha*

$$P(x) = \frac{\pi^2/4 - x^2}{\pi^2/4} = 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}$$

Si ha

$$\left|\cos(x_0) - \left[1 - \frac{4x_0^2}{\pi^2}\right]\right| = \left|\frac{x_0\,(x_0^2 - \pi^2/4)}{6}\sin(\gamma)\right| \leq \frac{|x_0|\,(x_0^2 - \pi^2/4)}{6}$$

Ad esempio per $x_0 = \pi/4$ si ha

$$\left|\cos(x_0) - \left[1 - \frac{4x_0^2}{\pi^2}\right]\right| = \left|\cos(\pi/4) - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{\pi^3}{128} \approx 0.24$$

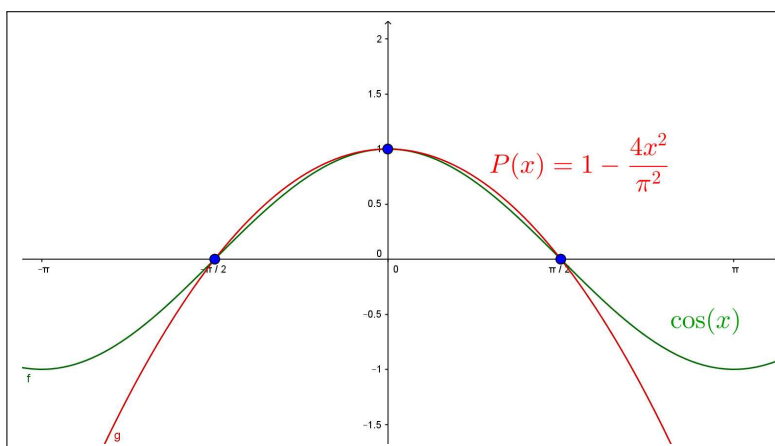



FIGURA 2. Interpolazione quadratica

2.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare il polinomio $P(x)$ di interpolazione quadratica relativo a $f(x) = 1 + x - x^2$ e ai tre punti $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$.

(2) ▶▶ Determinare il polinomio $P(x)$ di interpolazione quadratica relativo a $f(x) = \sin(x)$ e ai tre punti $x_1 = 0, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = \pi$.

(3) ▶▶ Determinare il polinomio $P(x)$ di interpolazione quadratica relativo a $f(x) = \sqrt{x}$ e ai tre punti $x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9$.

3. La retta di regressione lineare

Assegnati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ esiste ed è unica la retta passante per essi, retta di equazione

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

La questione cambia, notevolmente, se in luogo di due punti se ne assegnano tre, o anche un numero maggiore,

- è evidente che se i tre (o più) punti non sono allineati non esiste alcuna retta che passi contemporaneamente per essi,
- è ragionevole chiedere comunque di determinare la retta *migliore*, nel senso che pur non passando esattamente per essi passi... abbastanza vicino.

Siano

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_2),\ \dots,\ P_N = (x_N, y_N)$$

gli N punti dati: tra le rette $y = mx + q$ scegliamo quella per la quale la somma degli N scarti quadratici

$$S(m,q) = (y_1 - mx_1 - q)^2 + (y_2 - mx_2 - q)^2 + \cdots + (y_N - mx_N - q)^2$$

sia minore possibile.

Svolgendo i conti si ottiene:

$$S(m,q) = m^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2mq \sum_{i=1}^{N} x_i + Nq^2 - 2m \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2q \sum_{i=1}^{N} y_i + \sum_{i=1}^{N} y_i^2$$

Nel punto di minimo (m_0, q_0) dovrà essere nulla sia la derivata $\dfrac{dS}{dm}$ che la $\dfrac{dS}{dq}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dm} = 2m \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2q \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\ \dfrac{dS}{dq} = 2m \sum_{i=1}^{N} x_i + 2Nq - 2 \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + q \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ m \sum_{i=1}^{N} x_i + Nq = \sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases}$$

Gli unici valori m_0 e q_0 che soddisfano tali condizioni sono i seguenti, espressi con le note formule di Cramer, vedi pagina 35.

$$m_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}} \quad q_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}}$$

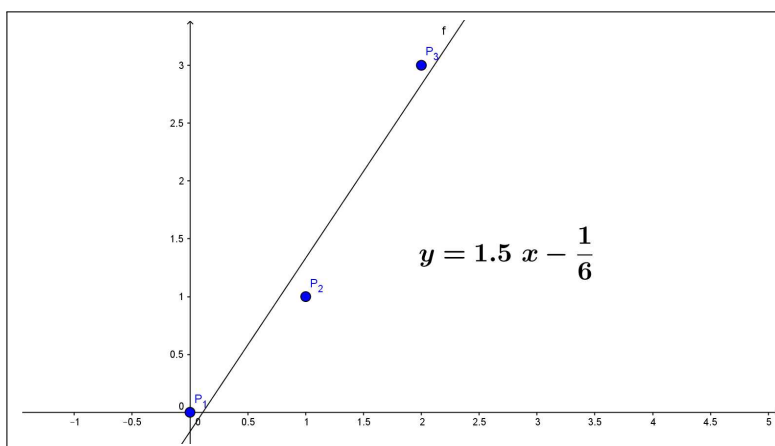



FIGURA 3. La retta di regressione lineare relativa ai 3 punti dati

La retta $y = m_0 x + q_0$ è pertanto *la migliore* nel senso di quella per la quale la somma degli scarti quadratici nei punti assegnati è più bassa.

ESEMPIO 3.1. *Siano assegnati i tre punti*

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1), \quad P_3 = (2,3)$$

evidentemente non allineati. La retta che meglio li approssima ha i coefficienti

$$m_0 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = 1.5 \quad q_0 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{6}$$

Si tratta della retta $y = 1.5\,x - \frac{1}{6}$ *di Figura 3.*

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare la retta di regressione lineare relativa ai tre punti
$$P_1 = (0,1), \quad P_2 = (1,0), \quad P_3 = (2,1).$$
(2) ▶▶ Determinare la retta di regressione lineare relativa ai quattro punti
$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,2), \quad P_3 = (2,1), \quad P_4 = (3,4).$$

CAPITOLO 20

Modelli analitici fondamentali

Le espressioni analitiche $f(t)$ di parametri naturali che evolvano nel tempo presentano quasi sempre, al tendere di t a $+\infty$, tre comportamenti fondamentali:

1	la crescita illimitata,	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$,
2	un carattere infinitesimo,	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$,
3	una stablizzazione asintotica,	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ o $\lim_{t\to+\infty} f(t) = F(t)$

essendo $F(t)$ un «*comportamento a regime*».

Consideriamo nel seguito possibili forme delle espressioni $f(t)$ relative ai diversi comportamenti indicati.

1. Crescita illimitata

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty}$$

Hanno questo requisito le funzioni $f(t)$

$$\log(t), \quad \sqrt[3]{t}, \quad \sqrt{t}, \quad t, \quad t^2, \quad t^3, \dots, \quad e^t, \quad e^{t^2}, \dots$$

l'ordine con il quale sono elencate corrisponde alla rapidità con cui esse divergono al crescere di t.

Nel caso $f(t) = A + B\log_{10}(t)$[1] si parla di crescita logaritmica, si tratta di una crescita molto lenta

$$f(1) = A, \ f(10) = A+B, \ f(100) = A+2B, f(1000) = A+3B, \dots$$

Nel caso $f(t) = A + Bt$ si parla di crescita lineare, si tratta di una crescita direttamente proporzionale al tempo trascorso

$$f(t+h) - f(t) = Bh$$

mentre nel caso $f(t) = A + Bt^2$ si parla di crescita quadratica: la variazione $f(t+h) - f(t)$ è proporzionale ad h ma con un fattore di proporzionalità che cresce

[1] La scelta tra logaritmi in base 10 e logaritmi in base e o logaritmi naturali è irrilevante e solo collegata alla maggiore semplicità della regola di derivazione sui logaritmi naturali: si tenga presente infatti che $\log_e(t) = \log_e(10)\,\log_{10}(t) \approx 2{,}30\,\log_{10}(t)$.
In ambito chimico (*pH* docet) il titolo *logaritmo* viene quasi sempre riferito ai logaritmi di base 10.

al crescere di t:

$$f(1+h)-f(1)=B(h+2)h, \quad f(10+h)-f(10)=B(h+20h)h, \dots$$

I casi $f(t)=A\,e^{\lambda t}$, $\lambda>0$ rappresentano un tipo di crescita, esponenziale, generalmente considerato molto importante e rapido: quanto questo dipenda dalla grandezza del coefficiente λ è del tutto evidente anche se quasi mai ricordato dai predicatori della *crescita esponenziale*.

Hanno crescita esponenziale tutti quei fattori che raddoppiano, o triplicano o comunque aumentano di una percentuale positiva fissa in ogni unità di tempo.

Il fenomeno si capisce meglio risolvendo il seguente problemino:

> *una popolazione di moscerini raddoppia di numero ogni giorno:*
> *se oggi ce ne sono un migliaio quanti ce n'erano ieri ?*
> *... e quanti l'altro ieri ?*

Dovrebbero avere crescita esponenziale i denari che un risparmiatore deposita in banca.

Le espressioni più comuni di crescita esponenziale non sono necessariamente espresse con la *aristocratica* base e di Nepero: possono essere date da

$$f(t)=A\;2^t, \quad f(t)=A\;(1.5)^t, \quad f(t)=A\;(1+\rho)^t$$

con $\rho>0$.

ESEMPIO 1.1. *La funzione $f(t)=e^{4t}-e^{3t}$ ha crescita esponenziale: infatti*

$$f(t)=e^{3t}\left(e^t-1\right) \quad \rightarrow \quad f(t)\geq e^{3t}$$

OSSERVAZIONE 1.2. *Crescite più rapide di quelle esponenziali sono, ad esempio*

$$f(t)=e^{t^2}, \quad f(t)=e^{t^3}, \;\dots, f(t)=e^{(e^t)}, \quad f(t)=e^{(e^{(e^t)})}, \dots$$

Limitandosi a ragionare per tempi t interi, $t=1,2,\dots,n,\dots$ è interessante notare le tre successioni

$$e^n, \qquad \sqrt{n!}, \qquad n!$$

tutte e tre divergenti con ordini di infinito diversi, i rapporti

$$\frac{e^{n+1}}{e^n}=e, \qquad \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}}=\sqrt{n+1}, \qquad \frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

fanno ben capire le tre diverse rapidità con cui le tre quantità aumentano.

2. Carattere infinitesimo

Hanno questo requisito le funzioni $f(t)$:

$$\frac{1}{\log(t)}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, \quad \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t^2}, \quad \frac{1}{t^3}, \dots, \quad e^{-t}, \quad e^{-t^2}, \dots$$

reciproche di quelle precedenti, che erano divergenti.

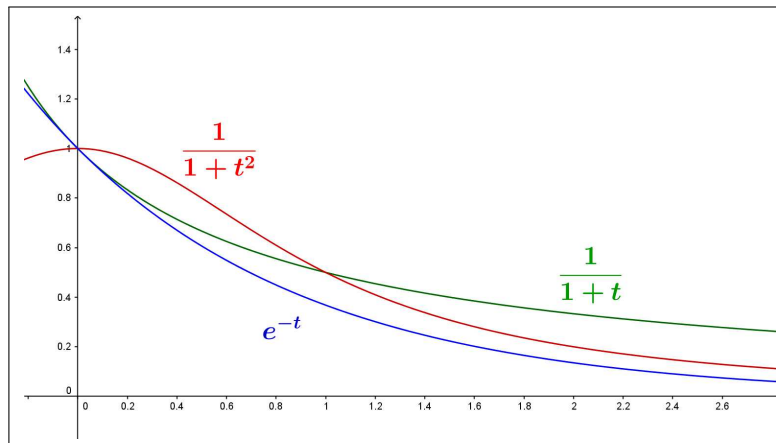



FIGURA 1. $\dfrac{1}{1+t}, \quad \dfrac{1}{1+t^2}, \quad e^{-t}$

Anche in questo caso l'ordinamento proposto corrisponde alla rapidità con cui esse tendono a zero.

Le espressioni $f(t)$ più comuni che risultano infinitesime a $+\infty$ sono

- le espressioni razionali con il denominatore di grado maggiore del numeratore
$$f(t) = \frac{A}{B+Ct}, \quad f(t) = \frac{M}{1+t^2}, \quad \dots$$
- le espressioni esponenziali $f(t) = A\,e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$

Le espressioni proposte sopra riguardano funzioni positive e convesse, almeno da un certo t_0 in poi.

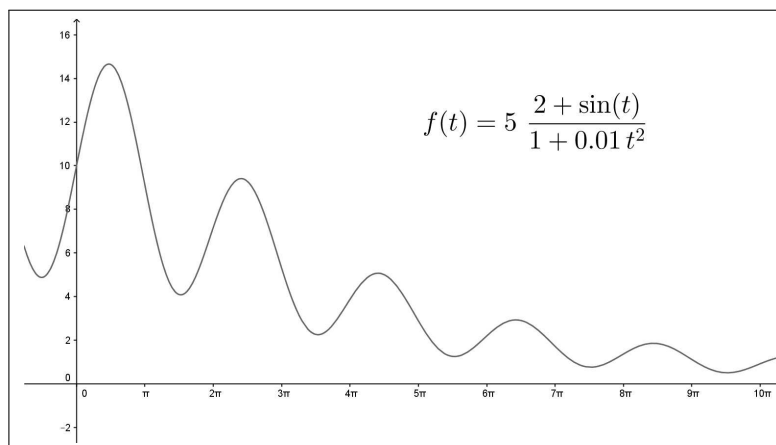



FIGURA 2. $f(t) = 5\frac{1+\sin(t)}{1+0.01\,t^2}$

Tali requisiti, per quanto appaiano naturali non sono obbligati: le funzioni $f(t)$

$$\frac{1+\sin(t)}{1+t^2}, \quad e^{-\lambda t}(1+\sin(t)), \quad e^{-\lambda t}t^2\sin^2(t), \quad \dots$$

sono positive, sono infinitesime per $t \to +\infty$ ma non sono convesse neanche da un certo t_0 in poi.

3. Stabilizzazione asintotica

Il titolo si riferisce a due possibili comportamenti di *stabilizzazione asintotica*:

- quello di un parametro, rappresentato al variare del tempo dalla funzione $f(t)$, che abbia limite un valore finito ℓ per t tendente a $+\infty$,
- quello di un parametro sottopposto inizialmente a variazioni, disturbi, destinati a smorzarsi nel tempo.

Hanno il primo requisito le funzioni $f(t) = \ell + \varepsilon(t)$ essendo $\varepsilon(t)$ una funzione che ha limite zero per t tendente a $+\infty$.

Rientrano in questa categoria tutte le funzioni razionali con numeratore e denominatore dello stesso grado.

ESEMPIO 3.1.

$$f(t) = \frac{1+3t}{1+2t} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(1+2t)} \quad \to \quad f(t) = \frac{3}{2} + \varepsilon(t)$$

con $\varepsilon(t) = -\dfrac{1}{2(1+2t)}$ *infinitesima per* $t \to +\infty$.

ESEMPIO 3.2. *Scelta* $f(t) = 1 + e^{-t}\sin(3t)$ *si ha* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$.

Rientra nella seconda categoria ogni espressione della forma

$$f(t) = F(t) + \varepsilon(t)$$

al solito con $\varepsilon(t)$ infinitesima.

ESEMPIO 3.3. *Sia*

$$f(t) = 8\sin\left(\frac{1}{3}t\right) + 4e^{-0.05t}\cos(6t)$$

nella quale l'addendo infinitesimo $\varepsilon(t) = 4e^{-0.05t}\cos(6t)$ *rappresenta il disturbo iniziale, destinato ad affievolirsi al crescere di t*

Fenomeni di questo secondo tipo, illustrato nel precedente esempio, corrispondono all'idea comune di procedimenti che *vanno a regime*: l'espressione sinusoidale

$$F(t) = 8\sin\left(\frac{1}{3}t\right)$$

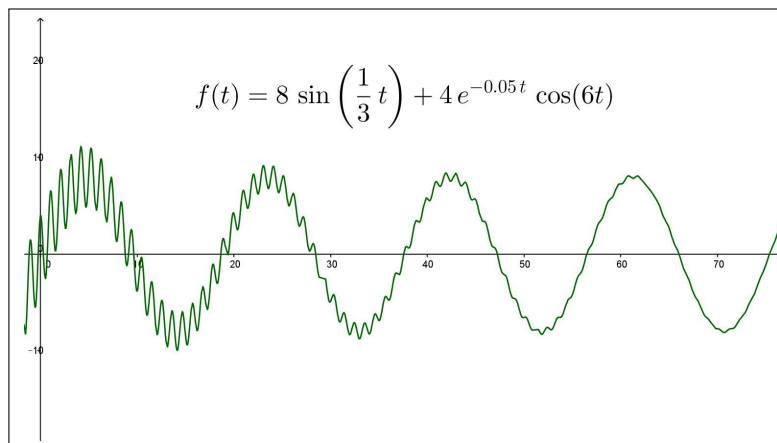



FIGURA 3. $f(t) = 8\,\sin\left(\frac{1}{3}t\right) + 4\,e^{-0.05t}\,\cos(6t)$

del precedente esempio è inizialmente *disturbata* dal termine $\varepsilon(t) = 4\,e^{-0.05t}\,\cos(6t)$, che però, al crescere di t diviene via via meno influente:

...si va a regime !

4. Evoluzione sigmoide

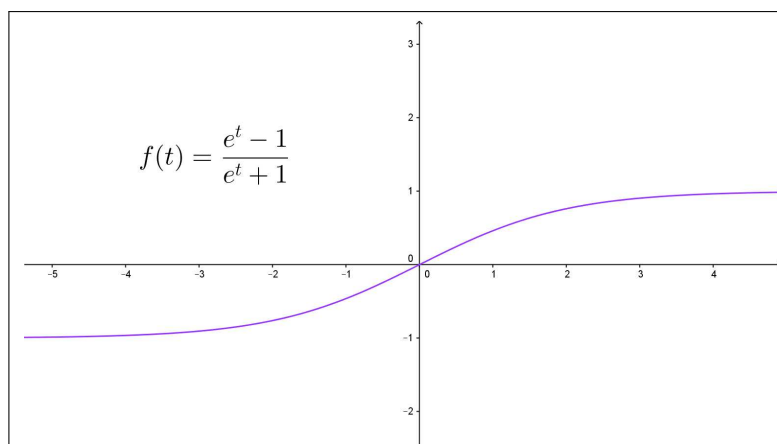



FIGURA 4. $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}$

Il titolo si riferisce alle espressioni $f(t)$ crescenti e tali che

$$A = \lim_{t \to -\infty} f(t) \;<\; \lim_{t \to +\infty} f(t) = B$$

Un modello particolarmente interessante è quello della funzione

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -1 \\ \\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1 \end{cases}$$

che simula l'evoluzione crescente di un parametro rappresentato dalla $f(t)$, che in tempi $t \approx -\infty$, abbia valori ≈ -1 e che al passare del tempo, $t \approx +\infty$, cresce tendendo a stabilizzarsi sul valore 1.

4.1. La funzione arcotangente.

Comportamento analogo a quello della precedente $f(t)$ è quello della $\arctan(t)$:

- i limiti agli estremi di $\mathbb{R}$ esistono finiti

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} \arctan(t) = -\dfrac{\pi}{2} \\ \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \arctan(t) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \geq 0 \quad \to \quad \arctan(t)$ è monotona crescente,
- la pendenza del grafico è massima nell'origine, $\arctan'(0) = 1$,
- $\arctan''(t) = \dfrac{-2t}{1+t^2} \quad \to \quad \arctan(t)$ è convessa per $t < 0$ e concava per $t > 0$.

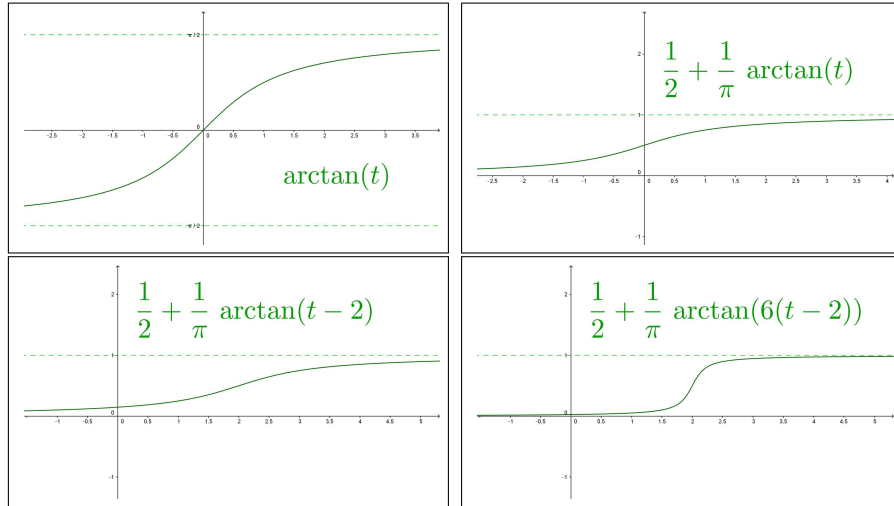



FIGURA 5. $\arctan(t)$ e sue generalizzazioni.

È possibile modificare la funzione arcotangente,

$$\varphi(t) = A + B \arctan(\lambda(t - \mu)), \quad A, B, \lambda, \mu > 0$$

come del resto ogni funzione a grafico sigmoide in modo da ottenere, ad esempio,

- limiti agli estremi ℓ_- ed ℓ_+ assegnati,

$$\begin{cases} \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = A - B\frac{\pi}{2} = \ell_- \\ \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = A + B\frac{\pi}{2} = \ell_+ \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A = \dfrac{\ell_+ + \ell_-}{2} \\ B = \dfrac{\ell_+ - \ell_-}{\pi} \end{cases}$$

- massima pendenza in $t = \mu$ assegnata.

$$\varphi'(t) = \frac{B\lambda}{\lambda^2(t-\mu)^2+1} \quad : \quad \varphi'(\mu) = B\lambda$$

- convessità per $t \leq \mu$ e concavità per $t \geq \mu$,

$$\varphi''(t) = -\frac{2B\lambda^3(t-\mu)}{\left(\lambda^2(t-\mu)^2+1\right)^2} \quad : \quad t \leq \mu \quad \to \quad \varphi''(t) \geq 0$$

Incontreremo funzioni *sigmoidi* come soluzioni dell'equazione differenziale *logistica* a pagina 322: la funzione $f(t)$ rappresenterà la numerosità di una popolazione (vegetale o animale) la cui crescita, inizialmente alta, finisce per ridursi progressivamente (esaurimento delle risorse) fino a stabilizzarsi su una sorta di equilibrio ecologico.

5. Picco e decrescita

Numerosi parametri naturali risultano crescenti in un primo periodo di tempo e, successivamente (la vecchiaia...) decrescono con un andamento infinitesimo.

Un'espressione tipica di tale andamento è offerta dalla funzione

$$f(t) = t\,e^{-t}$$

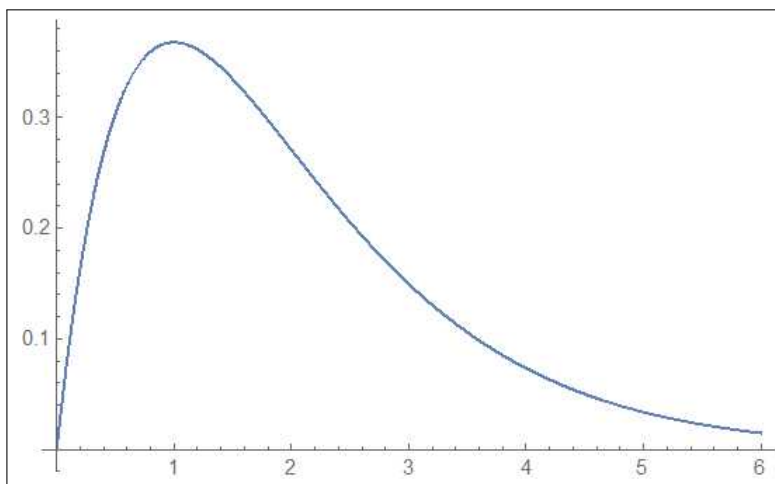



FIGURA 6. $f(t) = t\,e^{-t}$

- al tempo $t = 0$ si ha $f(0) = 0$

- tenuto conto che $f'(t) = e^{-t}(1-t)$, $f(t)$ è crescente nell'intervallo $[0,1]$,
- successivamentem per $1 \leq t$ $f(t)$ è decrescente,
- il valore $f(1) = e^{-1}$ è il massimo,
- $\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t} = 0$

Semplici variazioni consentono di produrre funzioni analoghe:

- la funzione $A\,t\,e^{-t}$ ha ancora il massimo in $t = 1$ ma il massimo è cambiato in Ae^{-1},
- la funzione $B\,t\,e^{\lambda t}$ ha il massimo in $t = \frac{1}{\lambda}$, con il valore $\dfrac{B}{\lambda}e^{-1}$,

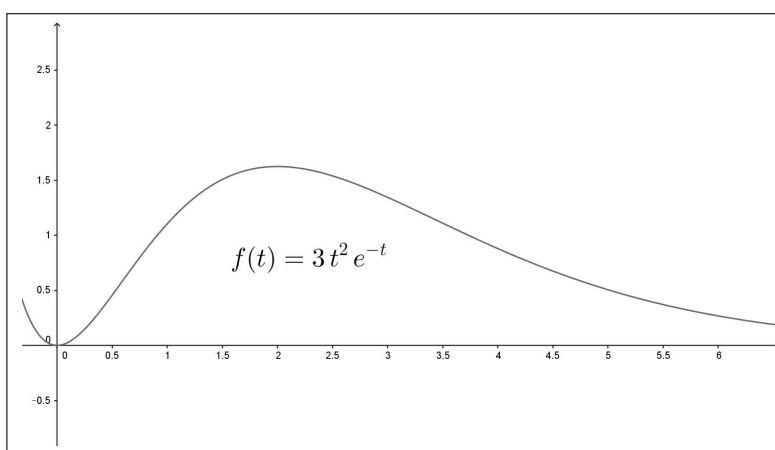



FIGURA 7. $f(t) = 3t^2\,e^{-t}$

- la funzione $t^2\,e^{-t}$ inizialmente cresce meno della $f(t) = t\,e^{-t}$ (guardate in Figura 7 l'angolo con cui il grafico esce dall'origine) e raggiunge il massimo più tardi, per $t = 2$.

6. Le oscillazioni smorzate

Il grafico delle funzioni $A\,\sin(\omega t)$ o $A\,\cos(\omega t)$ è una serie periodica di onde

- tutte della stessa ampiezza $|A|$,
- di lunghezza (d'onda) $2\pi/\omega$

le cose cambiano quasi sempre nei fenomeni naturali in quanto le *onde* vanno smorzandosi al passare del tempo (anche i migliori diapason finiscono per fermarsi...).

Le funzioni che rappresentano oscillazioni smorzate sono generalmente del tipo

$$\frac{A}{1+\alpha^2 t^2}\,\sin(\omega t), \qquad A\,e^{-\lambda t}\,\sin(\omega t)$$

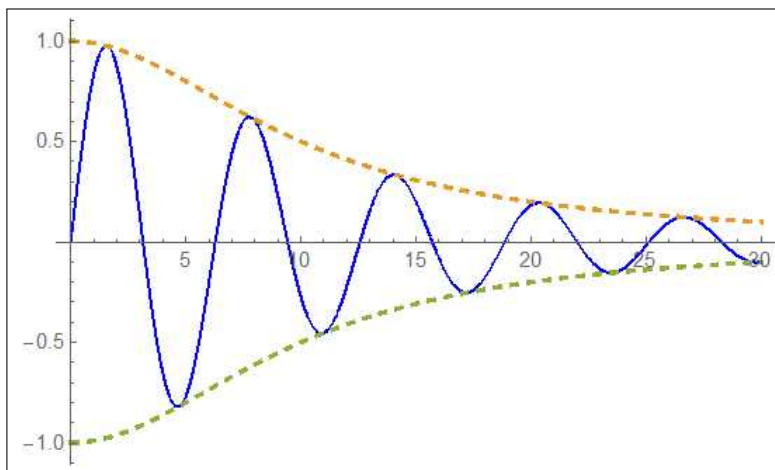



FIGURA 8. $\dfrac{1}{1+0.01\,t^2}\,\sin(t)$

Il fenomeno, ben visibile in Figura 8, corrisponde a smorzare le onde di $\sin(t)$ dentro l'imbuto determinato dal grafico delle due

$$-\frac{1}{1+0.01\,t^2} \quad e \quad \frac{1}{1+0.01\,t^2}$$

o delle $-e^{-\lambda t}$ e $e^{-\lambda t}$.

Si osservi che le *oscillazioni smorzate* sono funzioni non periodiche.

Avremo occasione, nell'ambito delle equazioni differenziali, di riconoscere nelle *oscillazioni smorzate* un modello del moto di un pendolo soggetto, come naturale, ad atttriti che...

...ne *smorzano* le oscillazioni.

7. Le scale logaritmiche

I grafici che si disegnano più facilmente sono ... quelli delle rette, ovvero quelli delle funzioni $f(x) = mx + p$ lineari.

Basta disegnare due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ del grafico per disegnarlo poi, tutto, con la riga.

Non solo ma dalla retta per i due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si ricavano (con semplici giochetti grafici) i valori di m e p.

Le facilitazioni delle funzioni lineari si estendono alle numerose funzioni $f(t) = A\,e^{\lambda\,t}$ pensando di disegnare in luogo del grafico di $f(t)$ quello della funzione composta $\log[f(t)]$

$$f(t) = A\,e^{\lambda\,t} \quad \to \quad \log[f(t)] = \log(A) + \lambda\,t$$

ovvero di disegnare il grafico di $f(t)$ su un piano cartesiano in cui le ordinate $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ siano deformate, attribuendole alle altezze $\log(1), \log(2), \log(3), \dots, \log(n), \dots$.

Un piano cartesiano così fatto viene in genere detto *semilogaritmico*.

Si possono studiare su piani *semilogaritmici* naturalmente solo le funzioni positive.

Riconosciamo quanto detto guardando le Figure seguenti relative al grafico di $\frac{1}{2}e^t$ in ordinaria scala lineare e in scala semilogaritmica:

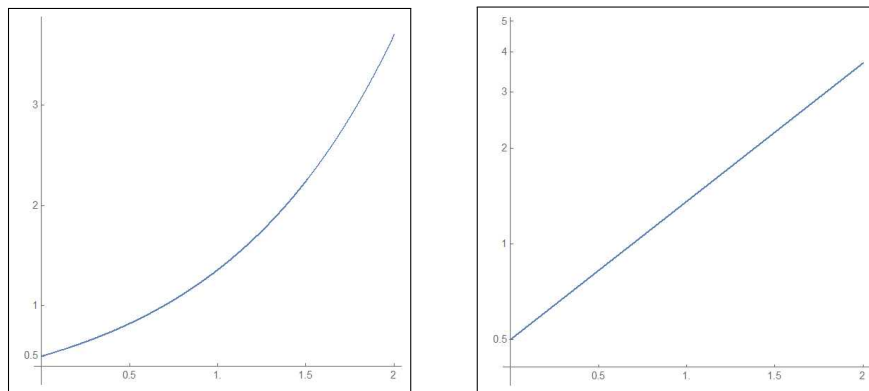



FIGURA 9. Scala lineare e scala logaritmica per $f(t) = \frac{1}{2}e^t$

- l'intervallo in cui varia t è lo stesso nei due grafici: $t \in [0, 2]$,
- le ordinate (valori sull'asse verticale) sono ancora le stesse $[1,4]$,
- le distanze tra l'ordinata 1 e la 2, tra la 2 e la 3 ecc. sono nel primo grafico sempre le stesse mentre nel secondo grafico la distanza ad esempio tra l'ordinata 1 e la 0.5 è visibilmente uguale a quella tra l'ordinata 2 e l'ordinata 1
- i due grafici sono visibilmente diversi: curvilineo il primo, rettilineo il secondo,
- entrambi i grafici consentono di leggere i valori della funzione: così, ad esempio per $t = 1.5$ si immagina nel grafico a sinistra un valore della funzione ≈ 2.2, analogamente riferendosi al grafico a destra si legge un valore ≈ 2.2 letto secondo le ordinate riportate sull'asse verticale.

Dove sono i vantaggi ? Supponiamo di

- disporre di *carta semilogaritmica* cioè di fogli su cui sia riportato un riferimento cartesiano con scala lineare $x \in [0,5]$ sull'asse orizzontale e scala logaritmica $y \in [0,100]$ su quello verticale, come in Figura 10,
- dover disegnare il grafico di $f(t) = A\,e^{\lambda t}$, $A > 0$
- conoscere due valori della f, ad esempio $f(0)$ e $f(1)$

Allora riportiamo sul nostro foglio in scala semilogaritmica i due punti $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$ e tracciamo la retta per i due punti.

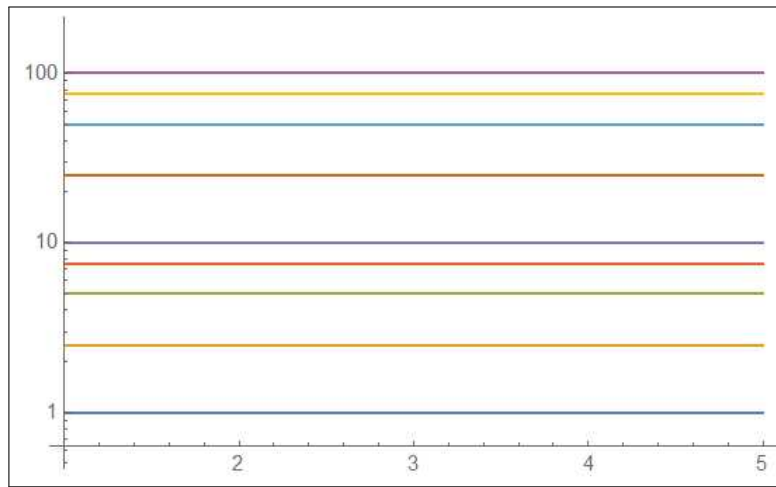



FIGURA 10. Carta semi logaritmica.

Per calcolare ad esempio $f(0.7)$ basterà leggere nel foglio semilogaritmico l'ordinata del punto della retta appena tracciata in corrispondenza a $t = 0.7$.

Non solo ma la differenza fra le ordinate $f(1)$ e $f(0)$, differenza naturalmente letta secondo le ordinate del foglio semilogaritmico, rappresenta il coefficiente λ.

CAPITOLO 21

Integrazione

1. Somme integrali

1.1. Valutare dalla velocità tenuta i kilometri percorsi.

Consideriamo un veicolo P che si muova, partendo da Roma, lungo una delle consolari uscenti: sia $k = k(t)$ il kilometro raggiunto al tempo t.

Se conosciamo la velocità $v(t)$ con cui P viaggia possiamo conoscere, o almeno stimare, in ogni momento t_0 il kilometro $k(t_0)$ raggiunto:

$$k(t_0) \approx v(0) \times t_0$$

avendo assunto che la velocità in tutto l'intervallo $[0, t_0]$ sia approssimativamente quella iniziale $v(0)$.

L'approssimazione è tanto più precisa quanto più l'intervallo $[0, t_0]$ è breve: pertanto decomposto l'intervallo $[0, t_0]$ in due parti uguali

$$[0,\ t_0] = \left[0,\ \frac{t_0}{2}\right] \cup \left[\frac{t_0}{2},\ t_0\right]$$

potremo stimare $k(t_0)$ ancora più accuratamente come

$$k(t_0) \approx v(0)\,\frac{t_0}{2} + v(t_0/2)\,\frac{t_0}{2}$$

avendo tenuto conto, ad esempio che la velocità nel secondo periodo di tempo possa essere diversa da quella nel primo. Una suddivisione in tre o più intervalli appare ancora più efficace, e quindi

$$k(t_0) \approx v(0)\,\frac{t_0}{3} + v(t_0/3)\,\frac{t_0}{3} + v(2t_0/3)\,\frac{t_0}{3} = \sum_{h=0}^{2} v\left(h\,\frac{t_0}{3}\right)\,\frac{t_0}{3}$$

ovvero appare ragionevole ritenere che

$$k(t_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n-1} v\left(h\,\frac{t_0}{n}\right)\,\frac{t_0}{n}$$

ESEMPIO 1.1. *Suppomiamo che la velocità sia $v(t) = 1+t$, crescente linearmente col tempo*[1]*, allora il kilometro $k(t)$ raggiunto al tempo t sarà:*

$$k(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n-1} v\left(h\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{h=0}^{n-1}\frac{t}{n} + \sum_{h=0}^{n-1} t^2\left(\frac{h}{n^2}\right)\right\} = t + t^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{h=0}^{n-1} h$$

Tenuto presente che

$$\sum_{h=0}^{n-1} h = \frac{(n-1)\,n}{2} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{h=0}^{n-1} h = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\,n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Si ha

$$k(t) = t + \frac{1}{2}t^2$$

Si noti come, giustamente,

$$k'(t) = v(t)$$

1.2. Valutare l'area di un sottografico.

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva assegnata in un intervallo I: presi due punti $a, t \in I$ consideriamo il *sottografico* di f relativo all'intervallo $[a,t]$, cioè la totalità dei punti (x,y) del piano tali che

$$a \le x \le t, \quad 0 \le y \le f(x)$$

A meno che $f(x)$ non sia di tipo particolarissimo quali

- $f(x) \equiv c$, il sottografico risulta un rettangolo,
- $f(x) = mx + p$, il sottografico risulta un trapezio

è difficile valutare l'area $\mathscr{A}(t)$, dipendente anche da t, del sottografico di f.

Una prima stima di tale area potrebbe essere

$$\mathscr{A}(t) \approx f(a)\,(t-a)$$

relativa a ritenere il grafico di f in tutto il tratto $[a,t]$ pressocchè costante.

L'approssimazione proposta coincide con approssimare il sottografico con un unico rettangolo.

Una stima leggermente più attenta può essere suddividere l'intervallo $[a,t]$ in due metà, ciascuna di lunghezza $(t-a)/2$ e detto c il punto medio proporre

$$\mathscr{A}(t) \approx f(a)\,\frac{t-a}{2} + f(c)\,\frac{t-a}{2}$$

Stime ancora più precise si possono ottenere dividendo l'intervallo $[a,t]$ in n parti con n grande: detti $c_1, c_2, \dots c_n$ gli n punti di suddivisione si ha

$$\mathscr{A}(t) \approx f(c_1)\,\frac{t-a}{n} + f(c_2)\,\frac{t-a}{n} + \cdots + f(c_n)\,\frac{t-a}{n} \;=\; \frac{t-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

[1] È improponibile: viaggiando per un bel po' di tempo si finirebbe per viaggiare a una velocità superiore a quella della luce !

Ne segue la ragionevole congettura

$$\mathscr{A}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \tag{22}$$

Il limite precedente, supponendo che esista, si chiama *integrale* di f esteso all'intervallo $[a,t]$ e si indica con la notazione

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

ESEMPIO 1.2. *Si consideri, come nell'esempio precedente,* $f(x) = 1 + x$ *e se ne consideri il grafico: il sottografico relativo all'intervallo* $x \in [0,t]$ *è un trapezio di vertici*

$$A = (0,0), \quad B = (t,0), \quad C = (t, 1+t), \quad D = (0,1)$$

che ha area

$$\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}(1 + (1+t)) \times t = t + \frac{1}{2}t^2$$

Si noti, riferendosi ai casi precedenti, che

- *sia lo spazio percorso fino al tempo* t*, muovendosi con velocità* $v(\tau) = 1 + \tau$ *per* $\tau \in [0,t]$
- *sia l'area del sottografico relativo alla funzione* $f(x) = 1 + x$ *per* $x \in [0,t]$

hanno la stessa espressione

$$t + \frac{1}{2}t^2$$

una funzione primitiva della funzione integranda.

Vedremo assai presto che tale coincidenza non è casuale.

1.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Sia $v = gt$ la velocità di caduta: di quanto si è scesi al tempo $t = 5$?
(2) ▶▶ Sia $f(x) = |x-1|$: determinare l'area del sottografico corrispondente a $x \in [-1,2]$.
(3) ▶▶ Sia $f(x) = \sqrt{1-x^2}$: determinare l'area del sottografico corrispondente a $x \in [0,\,1]$.

2. La definizione di integrale

Sia $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ limitata, per ogni partizione P di $[a,b]$ in intervalli parziali

$$[a,b] = [c_0,c_1] \cup [c_1,c_2] \cup [c_2,c_3] \cup \ldots \cup [c_{n-1},c_n]$$

con $c_0 = a$ e $c_n = b$, possiamo considerare:

- gli estremi inferiori di f in ciascuno degli n intervallini

$$e_1 = \inf_{c_0 \le x \le c_1} f(x), \quad e_2 = \inf_{c_1 \le x \le c_2} f(x), \; \dots, \quad e_n = \inf_{c_{n-1} \le x \le c_n} f(x)$$

- gli estremi superiori di f in ciascuno degli n intervallini

$$E_1 = \sup_{c_0 \le x \le c_1} f(x), \quad E_2 = \sup_{c_1 \le x \le c_2} f(x), \; \dots, \quad E_n = \sup_{c_{n-1} \le x \le c_n} f(x)$$

- le somme integrali inferiore e superiore

$$\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} e_k \, (c_k - c_{k-1}), \qquad \overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} E_k \, (c_k - c_{k-1})$$

È ovvio che

$$\underline{S}(P) \le \overline{S}(P)$$

ESEMPIO 2.1. *Sia $f(x) = x$, l'intervallo sia $[0,1]$ e la decomposizione P, quattro intervallini, sia espressa dai punti*

$$\{0, \quad 0.3, \quad 0.6, \quad 0.9, \quad 1\} \quad \to \quad [0,1] = [0,0.3] \cup [0.3,0.6] \cup [0.6,0.9] \cup [0.9,1]$$

Gli estremi inferiori e superiori di f nei quattro intervallini sono, rispettivamente,

$$\{0, \quad 0.3, \quad 0.6, \quad 0.9\}, \quad \{0.3, \quad 0.6, \quad 0.9, \quad 1\}$$

Le somme integrali sono quindi

$$\underline{S}(P) = (0.3)\,0 + (0.3)\,0.3 + (0.3)\,0.6 + (0.1)\,0.9 \quad = 0.36$$
$$\overline{S}(P) = (0.3)\,0.3 + (0.3)\,0.6 + (0.3)\,0.9 + (0.1)\,1 \quad = 0.64$$

Decomposizioni P diverse porteranno, naturalmente, a somme integrali diverse.

DEFINIZIONE 2.2. *La funzione f si dice integrabile in $[a,b]$ se l'insieme delle somme inferiori è contiguo a quello delle somme superiori, ovvero se*

$$\sup_P \{\underline{S}(P)\} = \inf_P \{\overline{S}(P)\}$$

Il comune valori di tali due estremi si chiama integrale della funzione f esteso ad $[a,b]$ e si denota con il simbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

La definizione data coincide per le funzioni positive, nella maggioranza dei casi, con l'interpretazione di area di sottografici proposta nella (22) di pagina 263,

Detta $\delta(P)$ la massima lunghezza degli intervallini della partizione P

$$[a,b] = [c_0, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup [c_2, c_3] \cup \ldots \cup [c_{n-1}, c_n]$$

è ragionevole immaginare che le somme inferiori $\underline{S}(P)$ e le somme superiori $\overline{S}(P)$ di una funzione integrabile f siano tanto più vicine quanto più la massima lunghezza $\delta(P)$ degli intervallini di P è piccola.

TEOREMA 2.3. *Le funzioni f limitate in $[a,b]$ e monotone sono integrabili.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f crescente: per riconoscere che f sia integrabile occorre poter esibire per ogni $\varepsilon > 0$ una sua somma integrale superiore $\overline{S}(P)$ e una integrale inferiore $\underline{S}(P)$, che differiscano meno di ε.

Serviamoci delle partizioni P_n di $[a,b]$ in n parti uguali: siano $c_0, \dots, c_{n-1}, c_n$ i punti della partizione, con $c_0 = a$ e $c_n = b$

$$[a,b] = [c_0, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_{n-1}, c_n] \qquad |c_{i+1} - c_i| = \frac{b-a}{n}$$

Tenuto conto che f è crescente gli estremi inferiore e superiore di f in ogni intervallino sono rispettivamente il valore nell'estremo sinistro e quello nell'estremo destro dell'intervallino:

$$\begin{array}{l} e_1 = f(c_0), \quad e_2 = f(c_1), \quad \ldots e_n = f(c_{n-1}), \\ E_1 = f(c_1), \quad E_2 = f(c_2), \quad \ldots E_n = f(c_n) \end{array}$$

Pertanto

$$\begin{cases} \overline{S}(P_n) = \dfrac{b-a}{n} \{f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)\} \\ \underline{S}(P_n) = \dfrac{b-a}{n} \{f(c_0) + f(c_1) + \ldots + f(c_{n-1})\} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \overline{S}(P_n) - \underline{S}(P_n) = \frac{b-a}{n} \{-f(c_0) + f(c_n)\} = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

Scelto n sufficientemente grande si ha, tenuto conto della limitatezza di f,

$$\left| \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \right| \leq \varepsilon \quad \rightarrow \quad \overline{S}(P_n) - \underline{S}(P_n) \leq \varepsilon$$

□

Si può anche dimostrare (dimostrazione non semplice, e quindi omessa) che

PROPOSIZIONE 2.4. *Tutte le funzioni continue in intervalli chiusi e limitati sono integrabili.*

2.1. Le somme integrali generalizzate. Le somme integrali inferiori e superiori precedentemente introdotte hanno il difetto di essere calcolabili con grosso sforzo: infatti la determinazione degli n estremi inferiori e_i e di quelli superiori E_i comporta, al di fuori di casi particolarmente fortunati (il caso delle funzioni monotone) notevole lavoro.

Le *somme integrali generalizzate* definite da

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad \xi_i \in [x_{n-1}, x_i]$$

hanno invece una assai maggiore semplicità computazionale: ciascun addendo è formato semplicemente dal valore della funzione in un punto ξ_i dell'intervallino (ad esempio l'estremo sinistro) e la lunghezza dell'intervallino stesso.

Qual'è l'interesse di calcolare tali *somme integrali generalizzate* ?

La evidente relazione

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\,(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} E_i,(x_i - x_{i-1})$$

mostra che allorchè la somma inferiore e la somma superiore sono vicine tra loro, e quindi vicine al valore dell'integrale, altrettanto vicina all'integrale sarà la *somma integrale generalizzata* (una sorta di Teorema dei Carbinieri).

In termini di disuguaglianze si ha certamente

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right| \le \sum_{i=1}^{n} E_i,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} e_i\,(x_i - x_{i-1})$$

Ne segue quindi, ad esempio, riferendosi a partizioni in parti uguali con $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\,(a + i\,h)\,,$$

ESEMPIO 2.5. *Scegliamo n numeri* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *a caso, il primo* $\xi_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ *, il secondo* $\xi_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$*, ecc. e consideriamo la somma*

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Cosa pensare di tale somma per scelte di n via via più grandi ?

È semplice, le somma S è una somma integrale generalizzata relativa alla funzione $f(x) = x$ *sull'intervallo* $[0,1]$.

Quindi le somme S convergono al crescere di n all'integrale $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. [2]

Il risultato non è del resto molto sorprendente, tenuto conto che la somma S proposta è null'altro che la media aritmetica degli n numeri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *sostanzialmente equidistribuiti nell'intervallo* $[0,1]$.

3. L'integrale indefinito

Si chiama *integrale indefinito di f* e si denota col simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

ogni funzione F primitiva della f nell'intervallo I in cui f è definita

$$\forall x \in I: \quad F'(x) = f(x).$$

[2] Il valore indicato è banalmente dedotto dalla nota formula dell'area dedl triagolo sottografico di x in $[0,1]$.

È evidente che se $F'(x) = f(x)$ anche $(F(x)+c)' = f(x)$ da cui la notazione frequente

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

L'operazione di integrazione indefinita corrisponde pertanto all'operazione inversa della derivazione.

La tabella delle derivate letta nella direzione opposta fornisce quindi la tabella degli integrali indefiniti.

Così, ad esempio,

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

$\leftrightarrows$

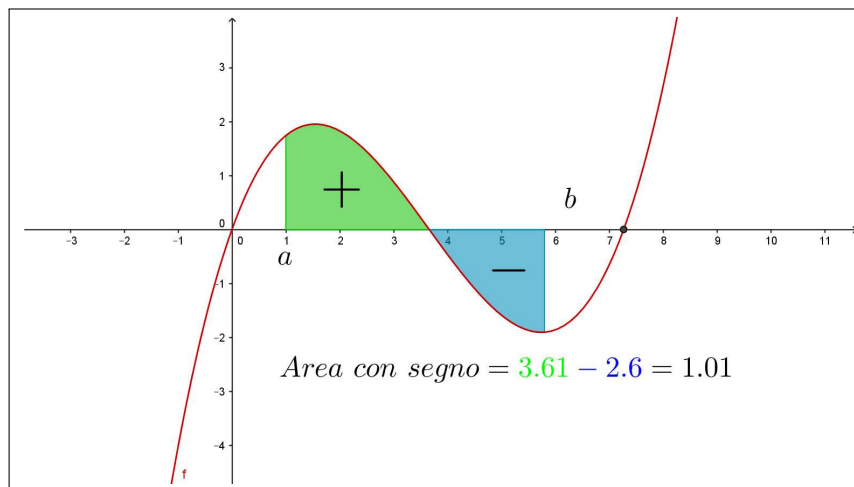
$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
$2x$	x^2
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\lambda e^{\lambda x}$	$e^{\lambda x}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Molte primitive fondamentali e utili si trovano con il comando `integrate` su http://www.wolframalpha.com.

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare le primitive di $f(x) = 5x\,e^{-x^2}$.
(2) ▶▶ Determinare le primitive di $f(x) = \sin(3x) + \cos(2x)$.
(3) ▶▶ Determinare le primitive di $f(x) = \dfrac{2x}{3+4x^2}$.

4. Il teorema fondamentale del calcolo

Sia $f(x)$ **continua** in $a \leq x \leq b$: consideriamo l'area, con segno, del sottografico relativo all'intervallo $a \leq x \leq b$: area con segno in quanto somma delle aree delle porzioni sopra l'asse x meno la somma delle aree poste sotto.

Indichiamo per ogni $t \in [a,b]$ con

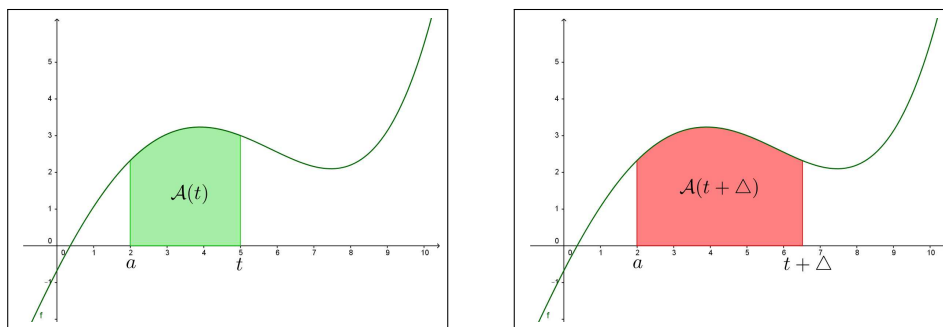
$$\mathscr{A}(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

l'area, con segno, del sottografico della funzione **continua** f relativo all'intervallo $a \le x \le t$. [3]

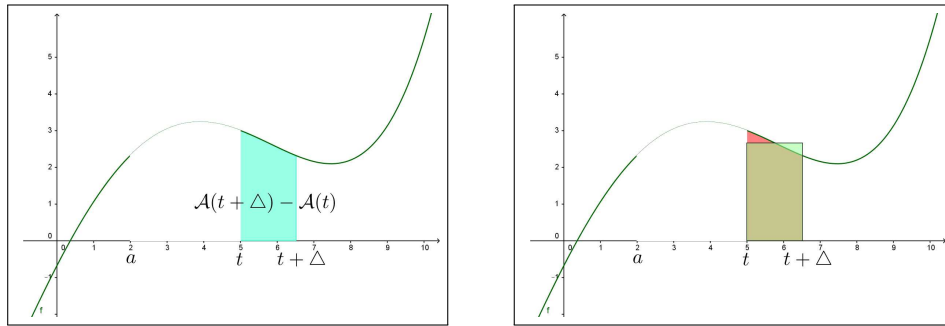
TEOREMA 4.1. *$\mathscr{A}(t)$ è definita e **continua** in $[a,b]$, è nulla per $t = a$, $\mathscr{A}(a) = 0$ e si ha $\mathscr{A}'(t) = f(t)$.*

DIMOSTRAZIONE. Naturalmente $\mathscr{A}(a) = 0$, mentre $\mathscr{A}(t+\triangle)$ indica l'area con segno relativa al sottografico $a \le x \le t+\triangle$ e la differenza, per $\triangle > 0$,

$$\mathscr{A}(t+\triangle) - \mathscr{A}(t)$$

indica l'area con segno relativa all'intervallo $[t, t+\triangle] \subset [a, b]$. È evidente che

la differenza $\mathscr{A}(t+\triangle) - \mathscr{A}(t)$, area della parte dipinta in azzurro nella figura seguente, è simile a quella del rettangolo di base $\triangle$ e altezza intermedia tra i valori $f(t)$ e $f(t+\triangle)$:

---

[3] Il sottografico citato è l'insieme dei punti (x,y) con $a \le x \le t$ e y appartenente all'intervallo di estremi 0 e $f(x)$, una sorta di generalizzazione di quanto già visto nel caso di f positiva.

$$\mathscr{A}(t+\triangle)-\mathscr{A}(t)\approx f(t+\triangle/2)\,\triangle$$

Pertanto il rapporto incrementale di $\mathscr{A}$ nel punto t relativo all'incremento $\triangle$ è simile a

$$\frac{\mathscr{A}(t+\triangle)-\mathscr{A}(t)}{\triangle}\approx f(t+\triangle/2)$$

da cui, passando al limite per $\triangle\to 0$

$$\mathscr{A}'(t)=f(t)$$

Il caso di $\triangle<0$ è analogo

$$\mathscr{A}(t)-\mathscr{A}(t+\triangle)\approx f(t+\triangle/2)\,(-\triangle)\quad\to\quad\frac{\mathscr{A}(t+\triangle)-\mathscr{A}(t)}{\triangle}\approx f(t+\triangle/2)$$

□

Il precedente teorema, cui spetta il famoso titolo di

teorema fondamentale del calcolo

è estremamente utile perchè fornisce un modo, spesso praticabile, per conoscere l'espressione dell'area con segno di un sottografico, ossia per calcolare gli integrali.

ESEMPIO 4.2. *Supponiamo ad esempio $f(x)=x^3$ e che interessi l'area del sottografico relativo all'intervallo $1\le x\le 3$: detta $\mathscr{A}(t)$ l'area del sottografico relativo a $1\le x\le t$ sappiamo, dal precedente teorema fondamentale del calcolo che*

- $\mathscr{A}'(t)=t^3 \quad\to\quad \mathscr{A}(t)=\frac{1}{4}t^4+c,$
- $\mathscr{A}(1)=0 \quad\to\quad c=-\frac{1}{4}$

Ne segue pertanto che

$$\mathscr{A}(t)=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{4}\quad\to\quad\mathscr{A}(3)=\frac{1}{4}3^4-\frac{1}{4}=20$$

Quindi l'area cercata è 20*.*

PROPOSIZIONE 4.3. *L'integrale di una funzione f continua in $[a,b]$ coincide con l'incremento $F(b)-F(a)$ di una qualsiasi primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE. Se $F(t)$ è una qualsiasi primitiva di $f(t)$ allora $F(t)-F(a)$ è la primitiva di $f(t)$ che vale zero per $t=a$, quindi coincide con la $\mathscr{A}(t)$

$$F(t)-F(a) \equiv \mathscr{A}(t) \quad \to \quad \mathscr{A}(b) = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \tag{23}$$

□

La differenza $F(b)-F(a)$ viene spesso indicata con la notazione

$$F(x)\,|_a^b \;=\; F(b)-F(a)$$

pertanto il risultato precedente, (23), è spesso indicato con

$$\int_a^b f(x)\,dx = \; F(x)\,|_a^b$$

OSSERVAZIONE 4.4. *Il quindi ...* $\mathscr{A}(t) = F(t)-F(a)$ *usato sopra deriva dal teorema di Lagrange:*

- $\mathscr{A}(t)$ *e* $\{F(t)-F(a)\}$ *sono primitive della stessa* f*,*
- *quindi*
$$\frac{d}{dt}\left(\mathscr{A}(t)-\{F(t)-F(a)\}\right) \equiv 0$$
- *quindi* $\mathscr{A}(t)-\{F(t)-F(a)\}$ *è costante in tutto l'intervallo in cui è definita,*
- *poichè tale differenza vale zero nel punto* a *allora... vale zero in tutto l'intervallo !*

OSSERVAZIONE 4.5. *Quando si assegna un intervallo* $[a,b]$ *è naturale sottintendere che* $a \le b$*.*

Quando si parla dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$*, almeno nel caso di* $f(x) \ge 0$ *si pensa all'area del sottografico, quindi in definitiva si pensa a un numero positivo.*

Quando si scrive

$$\int_a^b f(x)\,dx = \; F(x)\,|_a^b$$

si intende qualcosa di più: infatti nell'espressione a secondo membro conta l'ordine con cui i due numeri a *e* b *intervengono: è evidente che*

$$F(x)\,|_a^b \;=\; -\;F(x)\,|_b^a$$

quindi il calcolo dell'integrale eseguito con l'incremento di una primitiva corrisponde ad assumere, ***per definizione****, che*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

4.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_0^1 \left(1+x+x^2\right)\, dx$.
(2) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_0^\pi \sin(x)\,\cos(x)\, dx$.
(3) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{2+x}\, dx$.

5. Calcolo di alcuni integrali

Il teorema fondamentale del calcolo, il legame tra integrali e primitive espresso dalla formula (23) di pagina 270, permette il calcolo di nmumerosi integrali.

5.1. Integrali di polinomi. Dal momento che per ogni polinomio $p(x)$ è molto semplice costruire polinomi $P(x)$ primitive il calcolo degli integrali di polinomi non riveste difficoltà.

ESEMPIO 5.1.

$$\int_1^3 \left(1-x^2\right)\, dx = \left\{x-\frac{x^3}{3}\right\}\Bigg|_1^3 = -7$$

5.2. Integrali di esponenziali. Le primitive dell'esponenziale e^x sono e^x stessa: quindi

$$\int_{-1}^3 e^x\, dx = e^x|_{-1}^3 = e^3 - e^{-1}$$

Anche le primitive di esponenziali generalizzati quali e^{kx} sono disponibili: esse hanno la forma $\frac{1}{k}e^{kx}$

ESEMPIO 5.2.

$$\int_0^{\ln(2)} e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Bigg|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3}e^{3\ln(2)} - \frac{1}{3}e^0 = \frac{7}{3}$$

5.3. Integrali di funzioni razionali semplicissime. Le frazioni parziali $\frac{1}{x-k}$ hanno primitive $\ln(|x-k|)$ (non si dimentichi la presenza del modulo, del resto comprensibile ricordando che il logaritmo è definito solo su numeri positivi) e pertanto

$$\int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx = \ln(|x+1|)|_0^2 = \ln(2+1) - \ln(1) = \ln(3)$$

La possibilità di decomporre funzioni razionali più generali in frazioni parziali permette di calcolare gli integrali di tali funzioni.

ESEMPIO 5.3.

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int_1^5 \left\{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right\} dx =$$

$$= \left\{ \ln(|x+2|) - \ln(|x+3|) \right\}\Big|_1^5 = \ln(7) - \ln(8) - \ln(3) + \ln(4) = \ln\left(\frac{28}{24}\right)$$

5.4. Integrali di polinomi trigonometrici. Le funzioni trigonometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$ hanno primitive rispettivamente $-\cos(x)$ e $\sin(x)$.

Anche le funzioni, più generali, $\sin(kx+\gamma)$ o $\cos(kx+\gamma)$ hanno primitive analoghe, rispettivamente $-\frac{1}{k}\cos(kx+\gamma)$ o $\frac{1}{k}\sin(kx+\gamma)$.

ESEMPIO 5.4.

$$\int_0^\pi (\sin(2x)+\cos(3x))\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)\Big|_0^\pi = 0$$

È interessante notare che, qualunque sia n,

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1 \quad \to \quad \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(nx)+\cos^2(nx)\right) dx = 2\pi$$

da cui accogliendo la ragionevole congettura che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx$$

si ricava che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi \end{cases}$$

6. Linearità, monotonia, additività

L'integrazione verifica le seguenti (prevedibili) proprietà:

- **la linearità**: significa che l'integrale della somma di due funzioni è uguale alla somma degli integrali delle due funzioni.
  Stessa cosa vale naturalmente per la differenza e per ogni combinazione lineare
  $$\int_a^b (A\,f(x) + B\,g(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$
- **la monotonia**: significa che se $a \le b$ allora
  $$f(x) \le g(x) \quad \to \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

- **la additività**: significa che dati tre numeri a, b, c allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

dando ovviamente per scontato che $f(x)$ sia definita in un intervallo che contenga i tre numeri a, b, c.

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{4} \sin(kx) \right) dx$.

(2) ▶▶ Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 0 \\ x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(3) ▶▶ Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \leq 1 \\ 2 & se \quad x > 1 \end{cases}$$

disegnare il grafico della funzione integrale $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$ per $t \in [0, 5]$.

7. Integrali di moduli di funzioni

Si debba calcolare, ad esempio $\displaystyle\int_0^2 \left|1 - x^2\right| dx$: tenuto presente che

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & altrove \end{cases}$$

si ha

$$\int_0^2 |1 - x^2|\,dx = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx =$$

$$= \left\{ x - \frac{x^3}{3} \right\}\Bigg|_0^1 + \left\{ \frac{x^3}{3} - x \right\}\Bigg|_1^2 = 2$$

7.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx$, dopo aver disegnato il grafico della funzione integranda.
(2) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{2} |x(1-x^2)|\,dx$, dopo aver disegnato il grafico della funzione integranda.
(3) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx$.

7.2. Integrali di funzioni assegnate a tratti.

Supponiamo che

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-9| & se \quad x \leq 0 \\ |x^2-1| & se \quad x > 0 \end{cases}$$

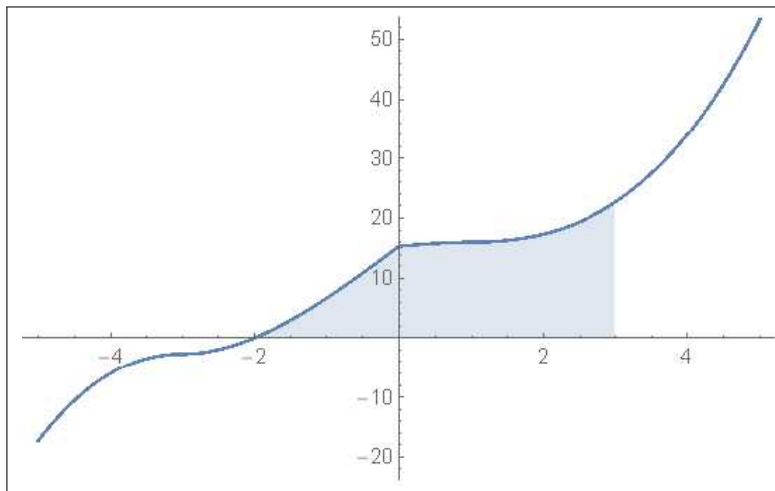



FIGURA 1. $F(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,dx$

Allora

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} |x^2-9|\,dx + \int_0^3 |x^2-1|\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (9-x^2)\,dx + \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx =$$

$$= (9x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{0} + (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_1^3 = \frac{68}{3}$$

8. Il teorema della media

La parola *media di una funzione su un intervallo* $[a,b]$, spesso riferita a situazioni in cui $f(x)$ abbia una certa variabilità, si riferisce a un valore centrale $f(c)$ più significativo di altri.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ è, per definizione, il numero

$$m_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Se pensiamo al caso $f(x) \geq 0$, caso in cui l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del sottografico, la relazione

$$m_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,m_f$$

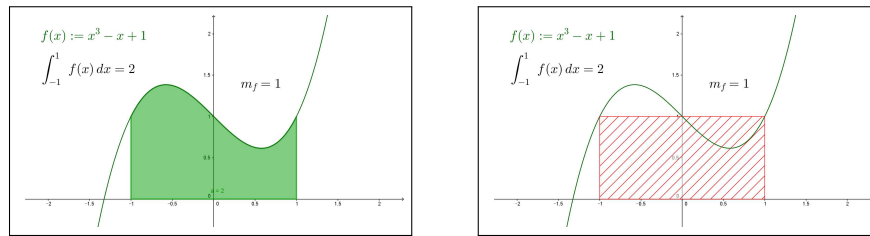



FIGURA 2. $f(x) = x^3 - x + 1, [a,b] = [-1,1], \quad m_f = 1$

esprime che l'area del sottografico è uguale all'area del rettangolo di base l'intervallo $[a,b]$ e altezza il valor medio m_f di f.

OSSERVAZIONE 8.1. *Il valor medio m_f della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ verifica la relazione*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b m_f\,dx$$

ovvero la funzione costante $y = m_f$ ha, su $[a,b]$, lo stesso integrale della f.

È interessante notare che hanno lo stesso integrale della f su $[a,b]$ anche tutte le combinazioni lineari

$$\alpha\, f(x) + (1-\alpha)\,m_f$$

al variare di $\alpha \in [0,1]$.

$$\int_a^b \{\alpha\, f(x) + (1-\alpha)\,m_f\}\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + (1-\alpha)\int_a^b m_f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 8.2. *Se $\forall x \in [a,b]$, $a \leq b$: $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ allora $\alpha \leq m_f \leq \beta$.*

DIMOSTRAZIONE.

$$\alpha \le f(x) \le \beta \quad \to \quad \int_a^b \alpha\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b \beta\, dx$$

da cui

$$(b-a)\,\alpha \le \int_a^b f(x)\, dx \le (b-a)\,\beta \quad \to \quad \alpha \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \le \beta$$

□

TEOREMA 8.3. *Sia $f(x)$ **continua** in $[a,b]$, intervallo chiuso e limitato:*

$$\exists\, \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a)$$

DIMOSTRAZIONE. $f(x)$ è dotata di minimo e di massimo in $[a,b]$, cioè

$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b]: \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

Dalla proposizione precedente segue quindi che anche il valor medio m_f cade fra $f(x_m)$ e $f(x_M)$.

Dal teorema dei valori intermedi, valido per le funzioni **continue in un intervallo**, segue che

$$\exists\, \xi \in [a,b]: \; f(\xi) = m_f \quad \to \quad \exists\, \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a)$$

□

ESEMPIO 8.4. *Sia $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$ il valor medio nell'intervallo $[0,2]$ è*

$$m_f = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{2}{3}$$

Si noti che nel caso f lineare il valor medio m_f coincide con $f(1)$ il valore di f nel punto 1, medio dell'intervallo.

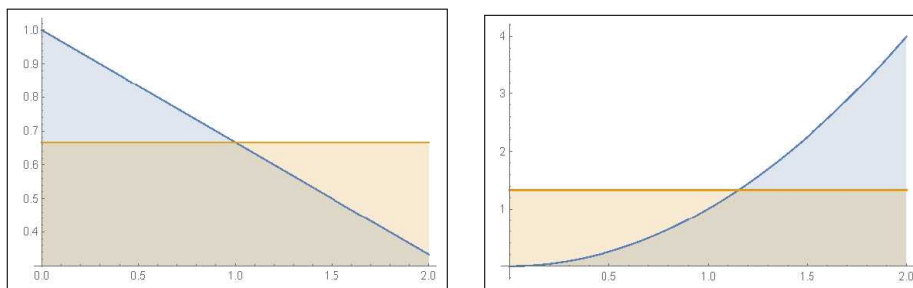



FIGURA 3. $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x, \quad g(x) = x^2, \quad x \in [0,2]$

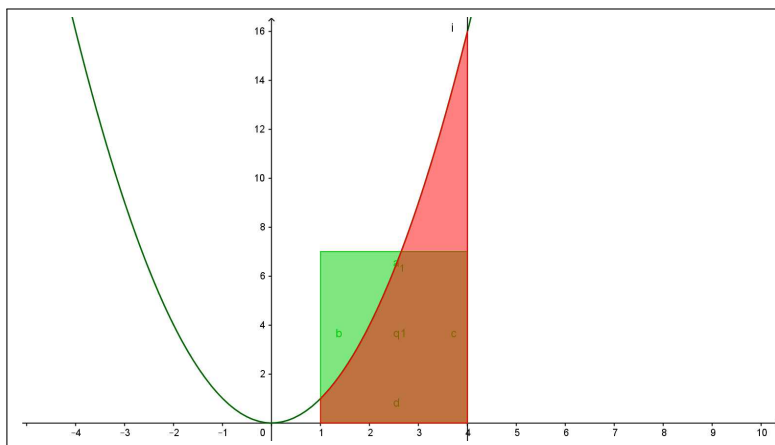



FIGURA 4. $\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$

ESERCIZIO 8.5. *Sia $f(x) = x^2$ l'integrale di f sull'intervallo $[1,4]$ è come osservato in virtù del teorema fondamentale del calcolo*

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Si ha pertanto

$$\int_1^4 x^2\,dx = (4-1)\,c^2 \quad \to \quad 3\,c^2 = 21 \quad \to \quad c = \sqrt{7} \in [1,4]$$

Il valor medio è $m_f = 7$ e il punto c atteso dal teorema della media è $c = \sqrt{7}$.

OSSERVAZIONE 8.6. *Se la funzione $f(x)$ non è continua il teorema della media può cadere.*

Si pensi ad esempio a $f(x) = [x]$, la parte intera, e si pensi all'intervallo $[1,\,2.8]$.

Il sottografico è formato da due rettangoli, il quadrato di base l'intervallo $[1,\,2]$ e altezza 1 e il rettangolo di base l'intervallo $[2,\,2.8]$ e altezza 2.

Area complessiva ovviamente $1 + 2 \times 0.8 = 2.6$

$$\int_1^{2.8} [x]\,dx = 2.6$$

Tuttavia non esiste alcun $\xi \in [1,\,2.8]$ tale che $2.6 = 1.8\,f(\xi)$.

8.1. Estendiamo il Teorema di Rolle. Sia f una funzione continua e derivabile in $[a,b]$ che prenda valori uguali agli estremi *(le ipotesi del Teorema di Rolle)*: il **Teorema Fondamentale del calcolo** implica che

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = 0$$

Se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n intervallini uguali di lunghezza $h = \dfrac{b-a}{n}$ si ha, servendosi del Teorema della Media integrale,

$$0 = \int_a^b f'(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f'(x)\,dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)$$

da cui $\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = 0$.

Vale pertanto la seguente

PROPOSIZIONE 8.7. *Se f verifica in $[a,b]$ le ipotesi del teorema di Rolle allora, per ogni n, esistono n punti $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ in (a,b) tali che*

$$f'(\xi_0) + f'(\xi_1) + \ldots + f'(\xi_{n-1}) = 0$$

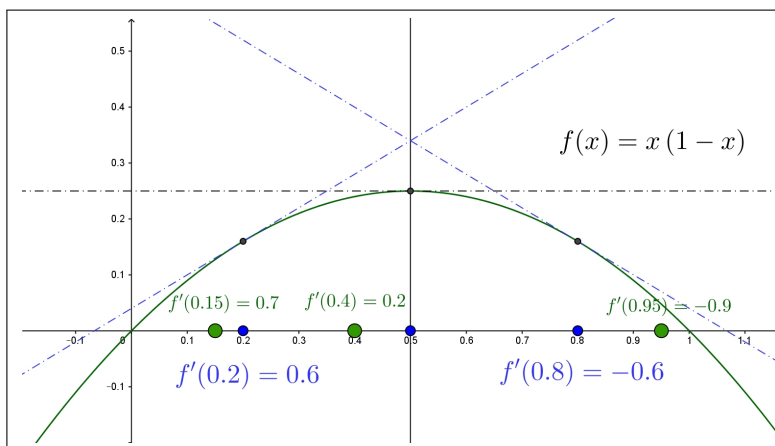



FIGURA 5. $f(x) = x(1-x),\ f'(x) = 1-2x,\ x \in [0,1]$

ESEMPIO 8.8. *Sia $f(x) = x(1-x),\ f'(x) = 1-2x,\ x \in [0,1]$: f verifica le ipotesi del teorema di Rolle in* $[0,1]$.

$$\begin{array}{lll} n=1 \quad \xi_0 = \frac{1}{2} & f'(\frac{1}{2}) & = 0 \\ n=2 \quad \xi_0 = \frac{1}{4},\ \xi_1 = \frac{3}{4} & f'(\frac{1}{4}) + f'(\frac{3}{4}) & = 0 \\ n=3 \quad \xi_0 = \frac{1}{4},\ \xi_1 = \frac{1}{2},\ \xi_2 = \frac{3}{4} & f'(\frac{1}{4}) + f'(\frac{1}{2}) + f'(\frac{3}{4}) & = 0 \\ \ldots & & \end{array}$$

8.2. Esercizi.

(1) ►► Calcolare il valor medio m_f della funzione $f(x) = 1+x$ nell'intervallo $[0,4]$ e verificare che l'area del sottografico di f coincide con l'area del rettangolo di altezza m_f.

(2) ▶▶ Calcolare il valor medio della funzione $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ nell'intervallo $[0,6]$

(3) ▶▶ Calcolare i valori medi della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0,1]$, nei due intervalli $[0,1/2]$, $[1/2,1]$, nei tre intervallini $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$.

9. Il metodo di Cavalieri Simpson

Il valore di un integrale è raramente ottenibile con il celebrato ricorso alle primitive, per il semplice motivo che tali primitive sono disponibili per troppo pochi casi.

Il valore di un integrale è pertanto quasi sempre calcolato, o meglio approssimato con metodi numerici che, con l'attuale sviluppo dei computer, sono diventati molto popolari.

Il celebre sito https://www.wolframalpha.com/ è giustamente apprezzato per il calcolo di integrali e non solo, anche dagli studenti più giovani.

Diamo ora un cenno a un metodo molto semplice con il quale assai prima dell'era dei computer si ottenevano soddisfacenti approssimazioni di numerosi integrali.

FIGURA 6. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Thomas Simpson (1710-1761)

Il metodo, detto *metodo di Cavalieri Simpson*, dai nomi di due grandi matematici di tanti anni fa, consiste nell'approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$ con l'integrale

$$\int_a^b P(x)\,dx$$

del polinomio $P(x)$ di interpolazione quadratica di $f(x)$ relativo ai due estremi a e b e al loro punto medio c.

La costruzione di $P(x)$ è abbastanza facile, vedi pagina 244, e naturalmente altrettanto facile il calcolo del suo integrale.

La fortuna del *metodo di Cavalieri Simpson* è consistita nell'espressione, particolarmente semplice ed elegante, dell'integrale di $P(x)$

$$\int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\Big\{f(a)+4f(c)+f(b)\Big\}$$

Le stime precedentemente studiate della differenza $|f(x)-P(x)|$ che passa tra una funzione $f(x)$ e il suo polinomio di interpolazione quadratica $P(x)$, vedi (21) di pagina 245, permettono di valutare a quanto possa ammontare al più la differenza

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\{f(a)+4f(c)+f(b)\}\right| \leq \int_a^b |f(x)-P(x)|\,dx$$

Osserviamo solo una semplice astuzia che rende il *metodo di Cavalieri Simpson* ancora più efficente: per calcolare l'integrale di $f(x)$ su $[a,b]$ possiamo, naturalmente, occuparci di calcolare i due integrali

$$\int_a^c f(x)\,dx \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

con c il punto medio tra a e b, approssimando poi ciascuno dei due con il *metodo di Cavalieri Simpson*.

La sorpresa consiste nel fatto che la somma dei due errori che così si commettono è, quasi sempre, minore dell'errore che si sarebbe commesso lavorando direttamente sull'integrale su $[a,b]$.

L'idea di dividere in 4, 8, ecc. parti segue in modo del tutto naturale e basta poco per implementare il procedimento su un computer.

ESEMPIO 9.1. *Sperimentiamo il metodo di Cavalieri Simpson sull'integrale*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

Il valore esatto dell'integrale è 2.

Il polinomio di interpolazione è

$$P(x) = 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}$$

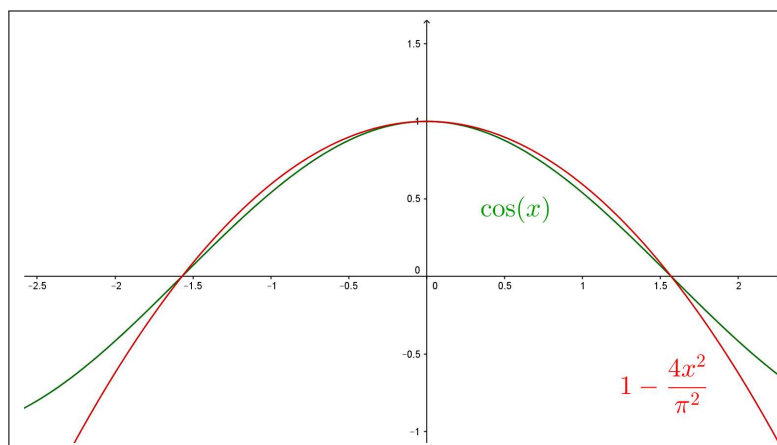



FIGURA 7. Il metodo di Cavalieri Simpson.

Il valore ottenuto con il metodo di Cavalieri Simpson, integrando cioè $P(x)$ al posto di $\cos(x)$, *è*

$$\frac{\pi/2+\pi/2}{6}\{\cos(-\pi/2)+4\cos(0)+\cos(\pi/2)\} = \frac{\pi}{6}4 \approx 2.094$$

9.1. Esercizi.

(1) ►► Calcolare l'approssimazione di Cavalieri-Simpson per l'integrale $\int_0^4 x^2\,dx$ e confrontare il valore ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

(2) ►► Calcolare l'approssimazione di Cavalieri-Simpson per l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ e confrontare il valore ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

(3) ►► Approssimare l'integrale $\int_0^8 \sqrt{9+x^2}\,dx$ con il metodo di Cavalieri-Simpson e confrontare con il valore proposto da `http://www.wolframalpha.com`.

10. Un'applicazione: il calcolo delle tasse

Le tasse, che tutti i cittadini devono pagare, sono proporzionali ai redditi: i fattori di proporzionalità sono determinati dalle leggi dello stato e si ispirano al principio costituzionale della progressività della contribuzione in relazione alle capacità economiche, *chi più ha più contribuisca*.

Ai cittadini meno abbienti si chiederà meno di un quarto delle loro entrate, mentre dai più ricchi si potrà pretendere quasi la metà.

Attualmente le leggi fiscali prevedono una tassazione (IRPEF) del 23% del reddito annuale (depurato da spese mediche, ecc) per redditi annuali minori di 15.000 euro, mentre sull'eventuale porzione di reddito che ecceda tale cifra

tra 15.000 e 28.000 si deve il 27%,
tra 28.000 e 55.000 si deve il 38%,
tra 55.000 e 75.000 si deve il 41%,
superiore a 75.000 si deve il 43%,

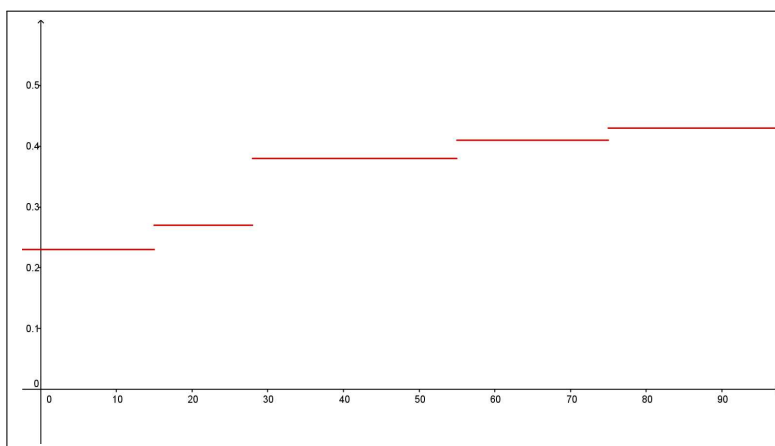



FIGURA 8. I fattori di proporzionalità fiscali

I fattori di proporzionalità riportati determinano una funzione $i(r)$, vedi Figura 8,

$$i: \quad \mathbb{R} \quad \mapsto \quad [0,1]$$

che fa corrispondere ad ogni porzione di reddito r la percentuale di tassazione stabilita, le aliquote.

ESEMPIO 10.1. *Se, ad esempio il reddito R fosse stato $R = 25.000$ euro, allora sui primi 15.000 euro si sarebbe dovuto pagare $15.000 \times 23\% = 3450$ e sui 10.000 rimasti $10.000 \times 27\% = 2700$: complessivamente $3450 + 2700 = 6150$ euro.*

Riferendosi al grafico di Figura 8 la tassa dovura dal cittadino con 25.000 euro di reddito equivale al sottografico della funzione $i(r)$ per $r \in [0, 25.000]$.

In altri termini, stabilita, dalla legge, la funzione $i(r)$ la tassazione $T(R)$ dovuta per un reddito R è l'integrale

$$T(R) = \int_0^R i(r)\,dr$$

ESEMPIO 10.2. *Se $R = 56.000$ allora $T(56.000)$ è*

$$\int_0^{56.000} i(r)\,dr = \int_0^{15.000} i(r)\,dr + \int_{15.000}^{28.000} i(r)\,dr + \int_{28.000}^{55.000} i(r)\,dr + \int_{55.000}^{56.000} i(r)\,dr =$$

$$= \{15 \times 0.23 + (28-15) \times 0.28 + (55-28) \times 0.38 + (56-55) \times 0.41\}\ 1000 =$$

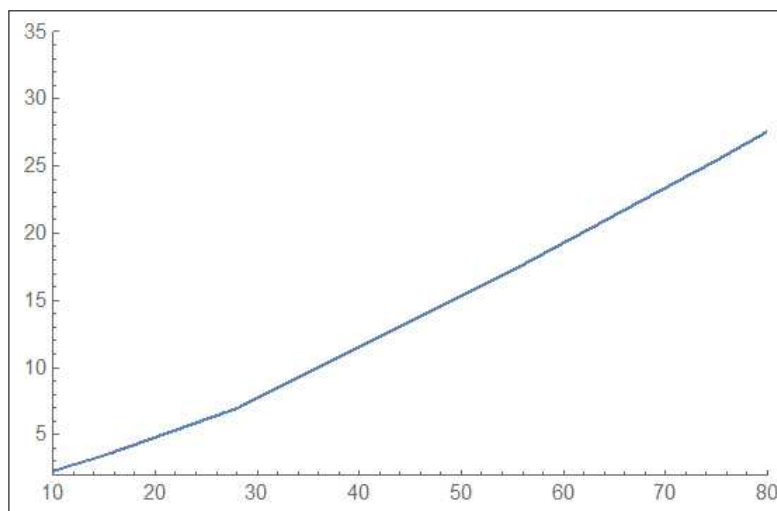
$$= \{15 \times 0.23 + 13 \times 0.28 + 27 \times 0.38 + 1 \times 0.41\}\ 1000 = 17.760$$

10.1. La funzione $T(R)$.

FIGURA 9. La funzione integrale $T(R) = \int_0^R i(r)\,dr$

La funzione $T(R)$ è *lineare a tratti*: il suo grafico è una poligonale con i vertici corrispondenti alle ascisse

$$15.000, \quad 28.000, \quad 55.000, \quad 75.000,$$

Ognuno dei segmenti che la compongono ha pendenza con tangente goniometrica pari ai coefficienti

$$0.23, \quad 0.27, \quad 0.38, \quad 0.41, \quad 0.43$$

La funzione *integrale* $T(R)$ è continua[4], ma non è derivabile (esistenza di punti angolosi) in corrispondenza dei quattro valori $15.000, \quad 28.000, \quad 55.000, \quad 75.000, \quad .$

Quale delle ipotesi del Teorema fondamentale del Calcolo, pagina 267, manca ?

La continmuità della funzione integranda $i(r)$!

Pertanto

$$\forall r \in \mathbb{R} - \{15.000, 28.000, 55.000, 75.000\} : \quad T'(r) = i(r)$$

mentre per $r \in \{15.000, 28.000, 55.000, 75.000\}$ $T'(r)$ non esiste.

10.2. Ridisegnare le aliquote.

[4] Ricordate a questo proposito le sciocchezze diffuse con la frase *con questo aumento mi scatta l'aliquota* che allude a una inesistente discontinuità della tassazione.

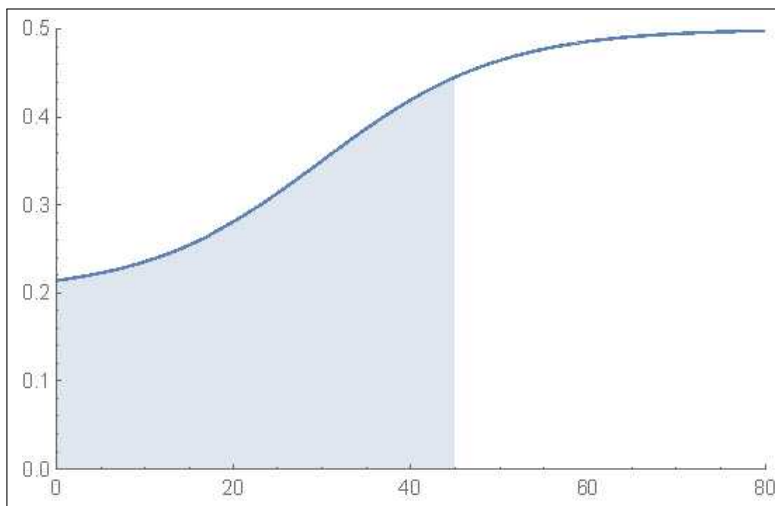



FIGURA 10. $i(r) := 0.35 + 0.15\ \dfrac{e^{0.1(r-30)} - 1}{e^{0.1(r-30)} + 1}$

La frase *ridisegnare le aliquote* viene attribuita, in termini di riforma fiscale, alle modifiche delle percentuali di imposizione IRPEF che il legislatore ritenesse opportune (in epoche recenti si è perfino pensato di proporre una $i(r)$ costante).

È interessante osservare la naturale forma *sigmoide* del grafico di $i(r)$ e, quindi le sue modellizzazioni.

Per ottenere una espressione *sigmoide* per $i(r)$ possiamo riferirci a

$$i(r) = A + B\,\frac{e^{\lambda(r-r_0)} - 1}{e^{\lambda(r-r_0)} + 1}$$

scegliendo opportunamente i parametri in modo che

- $i(0) = 0.2, \quad \lim_{r\to+\infty} i(r) = 0.5,$
- abbia il flesso per $r \approx 30$, scala relativa alle migliaia di euro,
- traversi il flesso con una pendenza ridotta,

Possiamo assumere quindi $A = 0.35, \quad B = 0.15, \quad r_0 = 30, \quad \lambda = 0.1,$ ovvero

$$i(r) := 0.35 + 0.15\,\frac{e^{0.1(r-30)} - 1}{e^{0.1(r-30)} + 1}$$

L'area del sottografico relativo a $r \in [0, 45]$, colorato in Figura 10 vale $\approx 13,960$ e corrisponderebbe alla tassa di 13.960 euro dovuta da un cittadino con reddito 45.000 euro, secondo i coefficienti di proporzionalità della riforma fiscale ipotizzata dal grafico di $i(r)$ in Figura 10.

Nessun legislatore proporrà comunque mai una funzione $i(r)$ quale quella proposta in Figura 10: il motivo sta nel calcolo dell'integrale

$$T(R) = \int_0^R i(r)\,dr,$$

manifestamente fuori della portata della maggioranza dei commercialisti !

Il calcolo di $T(R)$ nel caso di $i(r)$ costante a tratti è invece assai semplice e quindi adatto alle applicazioni.

CAPITOLO 22

Metodi di Integrazione

Il presente capitolo illustra alcuni procedimenti utili alla determinazione di primitive e, quindi, ricorrendo al *Teorema fondamentale del Calcolo* (vedi pagina 269), procedimenti utili al calcolo di integrali.

1. Integrazione per parti

Consideriamo l'integrale indefinito di un prodotto $\int u(x) \cdot v(x)\, dx$ supponendo di riconoscere nel primo fattore la derivata di una funzione nota $U(x)$

$$u(x) = U'(x) \quad \to \quad \int u(x) \cdot v(x)\, dx = \int U'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Dalla regola di derivazione del prodotto

$$\left\{ U(x) \cdot v(x) \right\}' = U'(x) \cdot v(x) + U(x) \cdot v'(x)$$

segue

$$U(x) \cdot v(x) = \int U'(x) \cdot v(x)\, dx + \int U(x) \cdot v'(x)\, dx$$

ovvero

$$\int U'(x) \cdot v(x)\, dx = U(x) \cdot v(x) - \int U(x) \cdot v'(x)\, dx$$

detta *formula di integrazione per parti* che mette in evidenza come il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int U'(x) \cdot v(x)\, dx$$

cioè la ricerca di una primitiva di $U'(x) \cdot v(x)$, venga trasformato nel calcolo dell'altro integrale indefinito

$$\int U(x) \cdot v'(x)\, dx$$

cioè nella ricerca di una primitiva di $U(x) \cdot v'(x)$, che *potrebbe* risultare più semplice del primo, offrendo quindi un vantaggio.

ESEMPIO 1.1.

$$\int x e^x\, dx$$

- *cercare una primitiva di uno dei due fattori x o e^x: in questo caso prendiamo la primitiva e^x del fattore e^x stesso,*

- *riscrivere l'integrale nella forma quindi* $\int x\,(e^x)'\,dx$
- *trasformarlo come la regola insegna in* $x\,e^x - \int (x)'\,e^x\,dx$
- *ovvero* $x\,e^x - \int e^x\,dx$
- *tenuto conto che conosciamo bene il nuovo integrale indefinito maturato a secondo membro abbiamo*

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x$$

OSSERVAZIONE 1.2. *Le primitive di* $x\,e^x$, $x^2\,e^x$, ... *e, in generale di* $P(x)\,e^x$*, con* $P(x)$ *un polinomio sono prevedibilmente della forma* $Q(x)\,e^x$.

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left(Q(x)\,e^x\right) = \big(Q(x) + Q'(x)\big)\;e^x$$

e pertanto basta trovare $Q(x)$ *tale che* $Q'(x) + Q(x) = P(x)$.

Così, ad esempio una primitiva di $(1+3x+x^2)\,e^x$ *si trova nella forma* $Q(x)\,e^x = (ax^2+bx+c)\,e^x$*:*

$$Q + Q' = ax^2 + bx + c + 2ax + b = 1 + 3x + x^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} = a & = 1 \\ b + 2a & = 3 \\ c + b & = 1 \end{cases}$$

da cui segue

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0$$

ovvero

$$\int (1+3x+x^2)\,e^x\,dx = (x^2+x)\,e^x$$

ESEMPIO 1.3.

$$\int \ln(x)\,dx$$

- *osserviamo che, contrariamente a quanto sembra a prima vista, la funzione integranda è un prodotto di due fattori*

$$\ln(x) = 1\,.\,\ln(x)$$

- *riconosciamo in* 1 *la derivata di* x *pertanto*

$$\int \ln(x)\,dx = \int (x)'\ln(x)\,dx$$

- *applichiamo la regola*

$$\int (x)'\ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\,(\ln(x))'\,dx$$

- *da cui segue*

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x$$

ESEMPIO 1.4.

$$\int x^2 \cos(x)\, dx$$

Riconosciuta in $\cos(x)$ *la derivata di* $\sin(x)$ *si ha*

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = \int x^2\, (\sin(x))'\, dx$$

da cui, applicando la regola si ha

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - \int (x^2)' \sin(x)\, dx = x^2 \sin(x) - 2\int x \sin(x)\, dx$$

Il risultato raggiunto non è conclusivo: per conoscere l'integrale indefinito $\int x^2 \cos(x)\, dx$ *dovrei conoscere l'integrale indefinito* $\int x \sin(x)\, dx$.

Possiamo a tal fine servirci nuovamente della regola: riconosciuta in $\sin(x)$ *la derivata di* $-\cos(x)$ *si ha*

$$\int x \sin(x)\, dx = \int x\, (-\cos(x))'\, dx = -x\cos(x) + \int (x)' \cos(x)$$

da cui

$$\int x \sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \int \cos(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$$

Complessivamente si ha quindi

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - 2\, \{-x\cos(x) + \sin(x)\}$$

ESEMPIO 1.5.

$$F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Tenuto conto dell'invisibile ma presente fattore 1 *si ha*

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int (x)' \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Da cui segue, portando a primo membro l'integrale $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

$$2\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \quad \to \quad F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

2. Integrazione per sostituzione

Si parla di *integrazione per sostituzione* quando si *sostituisce* la variabile x con una espressione $\phi(t)$ essendo $\phi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ una funzione di classe C^1 strettamnte monotona, tale che $\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b,$.

Se $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ sono una partizione di $[a, b]$ allora detti

$$\begin{cases} t_0 & \phi(t_0) = x_0 = a \\ t_1 & \phi(t_1) = x_1 \\ \ldots & \ldots \\ t_n & \phi(t_n) = x_n = b \end{cases}$$

i punti

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

costituiscono una partizione di $[\alpha, \beta]$.

Le lunghezze degli intervallini $[x_{i-1}, x_i]$ si rappresentano, con il teorema di Lagrange come

$$(x_i - x_{i-1}) \approx \phi'(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

e i valori $f(x)$ per $x \in [x_{i-1}, x_i]$ corrispondono ai valori della funzione composta $f[\phi(t)]$ per $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

I singoli addendi $f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ si approssimano con $f[\phi(t_i)]\,\phi'(t_i)\,(t_{i+1} - t_i)$ ovvero

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) \quad \approx \quad \sum_{i=0}^{n} f[\phi(t_i)]\,\phi'(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

Tenuto presente che le somme a sinistra approssimano l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ mentre quelle a destra approssimano l'integrale $\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt$ si riconosce la formula, detta di *integrazione per sostituzione*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt$$

Tenuto presente che il valore di un integrale viene quasi sempre dedotto dalla disponibilità di una primitiva può capitare che sia più facile disporre di una primitiva $\Phi(t)$ della $f[\phi(t)]\,\phi'(t)$ che non di una primitiva $F(x)$ della $f(x)$.

La possibilità, teoricamente infinita, delle $\phi(t)$ di cui servirsi offre infatti un vasto panorama di $f[\phi(t)]\,\phi'(t)$ di cui cercare le primitive.

ESEMPIO 2.1. *Si debba calcolare* $\int_1^e \frac{\log(x)+1}{x}\,dx.$

Ricorriamo alla sostituzione $x = e^t \quad \leftrightarrow \quad \log(x) = t.$

Tenuto conto che $1 = e^0 \quad \to \quad \alpha = 0, \quad e = e^1 \quad \to \quad \beta = 1$ *si ha*

$$\int_1^e \frac{\log(x)+1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{t+1}{e^t}\,(e^t)'\,dt = \int_0^1 (t+1)\,dt = \frac{3}{2}$$

ESEMPIO 2.2. *Si debba calcolare* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}}\,dx$.
Ricorriamo alla sostituzione $3+x=t \quad \leftrightarrow \quad x=t-3$. *Tenuto conto che ne segue*

$$x \in [0,1] \quad \to \quad t \in [3,4] \quad \to \quad \alpha = 3, \quad \beta = 4$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}}\,dx = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,(t-3)'dt = \int_3^4 t^{-1/2}dt = 4-2\sqrt{3}$$

ESEMPIO 2.3. *Si debba calcolare* $\int_1^{\log(5)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.
Ricorriamo alla sostituzione $e^x = t \ \to x = \log(t)$.

Tenuto conto che ne segue $\alpha = 0, \quad \beta = 5$ *si ha*

$$\int_1^{\log(5)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^5 \frac{t}{1+t^2}(\log(t))'\,dt = \int_0^5 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(5)$$

3. Integrale delle funzioni razionali

Per quanto riguarda funzioni razionali consideriamo solo quelle

- *proprie*, cioè con numeratore di grado minore del denominatore,
- con denominatore di grado 1 o 2.

Quelle *proprie* con denominatore di grado 1 sono

$$\frac{a}{bx+c} \quad \to \quad \int \frac{a}{bx+c}\,dx = \frac{a}{b}\,\ln(|bx+c|)$$

Quelle *proprie* con denominatore di grado 2 sono di tre tipi a seconda che il denominatore:

- sia privo di radici reali,
- abbia una sola radice reale,
- abbia due radici reali e distinte.

I tre casi sono illustrati negli esempi seguenti.

ESEMPIO 3.1.

$$\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{5}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{2x}{5}\right)$$

ESEMPIO 3.2.

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+1}\,dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+1}$$

ESEMPIO 3.3.

$$\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left\{ \frac{1}{3(x+2)} + \frac{8}{3(x-1)} \right\} dx = \frac{1}{3}\ln(|x+2|) + \frac{8}{3}\ln(|x-1|)$$

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ ricordando il significato di area con segno dei sottografici.
(2) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx$.
(3) ▶▶ Calcolare l'integrale $\int_{1}^{2} \frac{1+x}{x^2}\,dx$.

4. Derivate sotto il segno di integrale

Nel caso in cui la funzione integranda contenga un parametro α, naturalmente in aggiunta alla variabile di integrazione, anche ogni suo integrale dipenderà da tale parametro, sarà cioè funzione di tale parametro α: quindi si può esaminare se tale risultato sia o meno derivabile rispetto a α.

Consideriamo, ad esempio,

$$\int_0^1 e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \quad \to \quad \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^\alpha}{\alpha} - \frac{e^\alpha - 1}{\alpha^2}$$

Del resto si ha anche, vedi Osservazione di pagina 288,

$$\int_0^1 \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}\,dx = \int_0^1 x e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^\alpha}{\alpha} - \frac{e^\alpha - 1}{\alpha^2}$$

Ovvero

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^1 e^{\alpha x}\,dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}\,dx$$

Lo scambio osservato nel precedente esempio fra le due operazioni, una derivazione e un'integrazione prende il nome di

Derivazione sotto il segno di integrale

Lo scambio è lecito nella maggior parte dei casi di funzioni integrande sufficientemente regolari.

4.1. Esercizi.

(1) ►► Calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}(x-t)\,\sin(t)\,dt$$

(2) ►► Calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}\int_0^{1}(x+t)^2\,e^t\,dt$$

(3) ►► Calcolare la somma

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^1 \sin(x-t)\,e^{-t^2}\,dt+\int_0^1 \sin(x-t)\,e^{-t^2}\,dt$$

5. Le funzioni integrali

Si attribuisce questo nome a funzioni il cui algoritmo di calcolo includa integrazioni: sono funzioni integrali, ad esempio

$$F(x)=\int_0^x t^2\,dt,\quad G(x)=1+\int_0^x (x-t)\,\cos(t)\,dt,\quad R(x)=\int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt$$

In qualche caso, come per la prima $F(x)$ l'integrazione inclusa è facilmente seguibile e quindi chiunque capisce che $F(x)=x^3/3$, per le altre liberarsi dell'integrazione è meno agevole se non addirittura impossibile.

È importante ricordare come in molti casi si possano conoscere le derivate di alcune funzioni integrali.

Riportiamo, senza alcuna dimostrazione, le formule di derivazione di alcune importanti funzioni integrali:

- $$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad\to\quad F'(x)=f(x)$$
- $$F(x)=\int_x^a f(t)\,dt \quad\to\quad F'(x)=-f(x)$$
- $$F(x)=\int_a^x (x-t)^m f(t)\,dt \quad\to\quad F'(x)=\int_a^x m\,(x-t)^{m-1}f(t)\,dt$$

Si tratta di formule che discendono tutte dalla prima

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

servendosi *giudiziosamente* del teorema fondamentale del calcolo e delle possibilità di *derivare sotto il segno di integrale*.

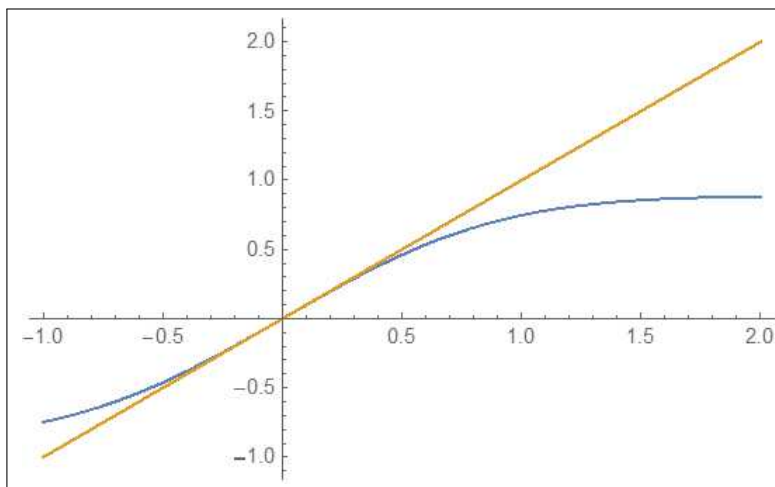



FIGURA 1. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad P(x) = x$

ESEMPIO 5.1. *Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$ per la funzione*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Occorre determinare

$$F(0), \quad F'(0), \quad F''(0)$$

Si ha $F(0) = 0$

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad \to \quad F'(0) = 1, \qquad F''(x) = -2x e^{-x^2} \quad \to \quad F''(0) = 0$$

Il polinomio richiesto è pertanto

$$P(x) = x$$

ESEMPIO 5.2. *Determinare gli intervalli in cui la funzione*

$$F(x) = \int_0^x (x-t)\cos(t)\,dt$$

è crescente. Tenuto conto che

$$F'(x) = \int_0^x \cos(t)\,dt = \sin(x) \quad \to \quad F(x) = -\cos(x) + c \quad \to \quad F(x) = 1 - \cos(x)$$

si riconosce che F è crescente negli intervalli $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ per ogni intero k.

5.1. Funzioni integrali generalizzate. Accanto alla classica espressione della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \to \quad F'(x) = f(x)$ si possono considerare funzioni generalizzate della forma

$$G(x) = \int_a^{b(x)} f(t)\,dt \quad \to \quad G'(x) = ?$$

Si tratta, in realtà di funzioni composte:

$$\begin{cases} F(u) = \int_a^u f(t)\,dt, \\ u = b(x), \end{cases} \quad \rightarrow \quad G(x) = F[b(x)]$$

Ne segue pertanto, per la regola di derivazione delle funzioni composte [1]

$$F'(x) = G'[b(x)]\,b'(x) = f[b(x)]\,b'(x)$$

5.2. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

(2) ▶▶ Posto $F(x) = \int_0^x \sin^3(t)\,dt$ determinare gli intervalli in cui F è crescente.

(3) ▶▶ Calcolare la somma

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt + \int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

[1] Si tratta in effetti dell'uso più importante della regola di derivazione delle funzioni composte: calcolare la derivata di una funzione di cui non si conosce un'espressione elementare esplicita.

CAPITOLO 23

Integrali impropri

1. Integrali impropri come limiti

Il titolo *integrali impropri* si da

- ad integrali estesi invece che ad un intervallo $[a,b]$ limitato ad intervalli illimitati $(a,+\infty)$ o $(-\infty,a)$ o a tutto $\mathbb{R}$,
- ad integrali estesi ad intervalli limitati (a,b) ma relativi a funzioni divergenti, o comunque discontinue, in uno o in entrambi gli estremi.

In entrambi i casi la definizione dell'integrale è del tutto naturale: integrare, ad esempio su $[1,+\infty)$ corrisponderà ad integrare su intervalli $[1,M]$ con M sempre più grande, ecc.

In altri termini gli integrali impropri sono definiti e calcolati tramite procedimenti di limite.

Nel caso di intervalli di integrazione illimitati:

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

e nel caso di funzioni integrande divergenti, o discontinue, in uno o in entrambi gli estremi dell'intervallo di integrazione

$$\begin{aligned}
\int_a^{b} f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\
\int_a^{b} f(x)\,dx &= \lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx \\
\int_a^{b} f(x)\,dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \eta\to0^+}}\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Naturalmente i limiti proposti possono esistere come pure non esistere: ci limitiamo nel seguito ad indicare un pacchetto di **condizioni sufficienti** all'esistenza di integrali impropri, limitandoci a considerare funzioni $f(x)$:

- continue nell'interno degli intervalli proposti,
- positive.

2. Il caso di integrali estesi a semirette

Gli integrali sono prodotti di valori di una funzione per lunghezza degli intervalli su cui tali valori sono presi. È ragionevole ritenere quindi che affinchè un integrale esteso ad intervalli sempre più lunghi si mantenga limitato la funzione integranda dovrà produrre valori via via più vicini a zero ... !

PROPOSIZIONE 2.1. *Se la funzione integranda $f(x)$, continua in $\mathbb{R}$, soddisfa una maggiorazione della forma*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1+|x|^{\alpha}}, \quad \alpha > 1 \tag{24}$$

allora esistono gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il primo dei tre integrali impropri, pensando semplicemente a $a > 0$: occorre riconoscere l'esistenza del limite per $b \to +\infty$ dell'integrale

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tenuto presente che

- $f(x) \geq 0 \quad \to \quad I(b) \nearrow$, crescente,
- $|f(x)| \leq \dfrac{M}{1+|x|^{\alpha}} \quad \to \quad I(b) \leq \displaystyle\int_a^b \frac{M}{1+|x|^{\alpha}}\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \frac{M}{1+|x|^{\alpha}}\,dx \leq M \int_a^b x^{-\alpha}\,dx = \frac{M}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$

Per $\alpha > 1$ riesce $1-\alpha < 0$

$$a < b \quad \to \quad 0 < b^{1-\alpha} < a^{1-\alpha}$$

e quindi

$$\frac{M}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{M}{\alpha-1}(a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}) \leq \frac{M}{\alpha-1}\,a^{1-\alpha}$$

L'integrale $I(b)$ è pertanto:

- crescente al crescere di b
- limitato superiormente,

quindi esiste il limite per $b \to +\infty$.

La prova dell'esistenza anche degli altri due possibili integrali impropri si ottiene con ragionamenti del tutto analoghi. □

OSSERVAZIONE 2.2. *Se riuscisse*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$$

allora, certamente non esisterebbe finito $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Infatti, da un certo x_0 *in poi riuscirebbe* $f(x) \geq \ell/2$ *e quindi*

$$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^M f(x)\,dx \geq \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \frac{\ell}{2}(M - x_0)$$

L'ultima espressione a secondo membro è chiaramente, al crescere di M*, divergente a* $+\infty$.

ESEMPIO 2.3. *Consideriamo la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$*: si tratta di una funzione positiva che verifica ovviamente la maggiorazione (24) indicata nella precedente Proposizione.*

Riesce infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} (\arctan(b) - \arctan(a)) = \pi$$

ESEMPIO 2.4. *Sia* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *e si voglia calcolare l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$$

Occorre quindi calcolare gli integrali

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx$$

e cercarne il limite per $b \to +\infty$.

Tenuto conto che

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+b)$$

si riconosce che $\lim_{b\to\infty} I(b) = +\infty$ *e pertanto si riconosce che l'integrale improprio richiesto non esiste.*

Si noti, a titolo di osservazione, che la funzione assegnata non soddisfa la maggiorazione (24) della precedente Proposizione.

ESEMPIO 2.5. *Consideriamo la funzione* $f(x) = xe^{-x}$*, e cerchiamo l'integrale improprio esteso alla semiretta positiva*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

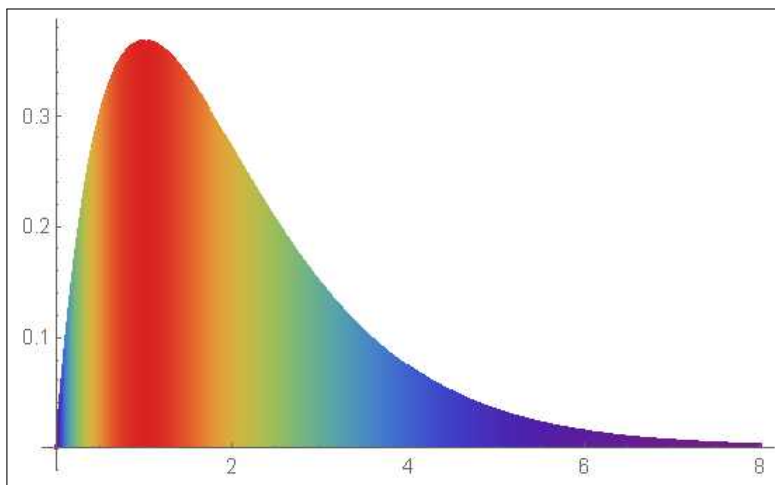



FIGURA 1. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

Servendosi dell'integrazione per parti si ha

$$\int_0^M x e^{-x} dx - x e^{-x}\Big|_0^M + \int_0^M e^{-x} dx = -M e^{-M} + 1 - e^{-M}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \left\{-M e^{-M} + 1 - e^{-M}\right\} = 1$$

Si noti che $x e^{-x} = \frac{x}{e^x} \leq \frac{x}{x + x^3/6} = \frac{6}{6+x^2} \leq \frac{6}{1+x^2}$*, la maggiorazione (24) della precedente Proposizione.*

2.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Provare che esiste l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$ e calcolarne il valore.

(2) ▶▶ Provare che esiste l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx$.

(3) ▶▶Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3} dx$

OSSERVAZIONE 2.6. *L'integrale di una funzione positiva, che sia proprio o improprio, rappresenta sempre l'area del sottografico: quindi se l'intergrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$*, area del sottografico di* f *relativamente all'intervallo* $[a, +\infty)$*, è finito allora avranno area altrettanto finita i sottografici, sempre relativi a* $[a, +\infty)$*, di ogni altra funzione* $g(x)$ *che riesca* $0 \leq g(x) \leq f(x)$*.*

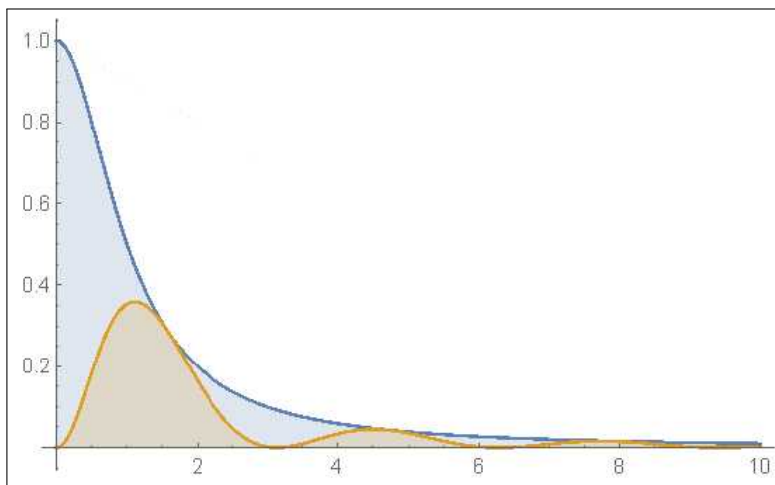



FIGURA 2. I sottografici di $\dfrac{1}{1+x^2}$ e di $\dfrac{\sin^2(x)}{1+x^2}$

Così, ad esempio, avranno area finita i sottografici su $[0, +\infty)$ *di*

$$g(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+x^2}, \quad s(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad r(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

3. Funzioni divergenti in un estremo dell'intervallo

Come osservato altre volte gli integrali sono prodotti di valori di una funzione per lunghezza degli intervalli su cui tali valori sono presi.
È ragionevole ritenere quindi che affinchè un integrale di una funzione sempre più grande si mantenga limitato occorrerà che i tratti su cui la funzione è ... grandissima, siano ... piccolissimi !

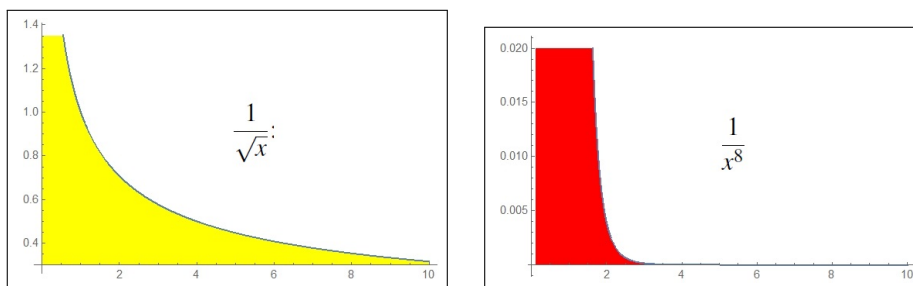



FIGURA 3. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$: Guglia sottile: SI ! $\quad \dfrac{1}{x^8}$: Guglia larga: NO !

Ovvero che la *guglia* che il grafico della funzione integranda disegna a fianco dell'asintoto verticale sia ... sottilissima !

PROPOSIZIONE 3.1. *La funzione $f(x)$ continua e positiva in $(a\,,b)$ sia divergente per $x \to a^+$: se la funzione verifica la maggiorazione*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x-a|^\gamma}, \quad \gamma < 1 \tag{25}$$

(che corrisponde a richiedere una guglia sottile) allora esiste l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella offerta precedentemente nel caso di intervalli di integrazione illimitati.

ESEMPIO 3.2. *Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x^{1/2}}$, divergente per $x \to 0^+$ e cerchiamo l'integrale improprio esteso all'intervallo $(0,1)$*

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}},\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2\sqrt{x}},\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}\right) = 1$$

La funzione assegnata soddisfa infatti la maggiorazione (25) della precedente Proposizione.

ESEMPIO 3.3. *Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, e cerchiamo l'integrale improprio esteso all'intervallo $(0,1)$*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2},\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2},\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

(2) ▶▶ Provare che esiste l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\, dx$.

(3) ▶▶ Provare che esiste l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

OSSERVAZIONE 3.4. *Se la funzione positiva $f(x)$ ha integrale, improprio o meno, sull'intervallo $[a,b]$ finito, vuol dire che il sottografico ha area finita. Quindi avranno area finita anche i sottografici relativi a qualunque altra funzione $g(x)$ positiva minore di $f(x)$. Così, ad esempio, riconosciuta l'esistenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ si riconosce naturalmente l'esistenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$.*

4. L'interpretazione geometrica

Gli integrali impropri di funzioni positive rappresentano, come gli usuali integrali di funzioni positive, aree di sottografici:

- l'area del sottografico relativo a una semiretta (o a tutto l'asse reale) nel caso di intervalli illimitati,
- l'area del sottografico relativo a un intervallo ma in presenza di un asintoto verticale su uno degli estremi.

Le Proposizioni precedenti stabiliscono che tali aree sono finite tutte le volte che

- il grafico di $f(x)$ si schiaccia sull'asse x abbastanza rapidamente nel caso degli intervalli illimitati, come deriva dalla condizione
$$|f(x)| \leq \frac{M}{1+|x|^{\alpha}}$$
con esponente α grande, $\alpha > 1$,
- la guglia relativa alla divergenza di $f(x)$ in uno degli estremi sia abbastanza sottile, come deriva dalla condizione
$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x-a|^{\gamma}}$$
con esponente γ piccolo, $\gamma < 1$.

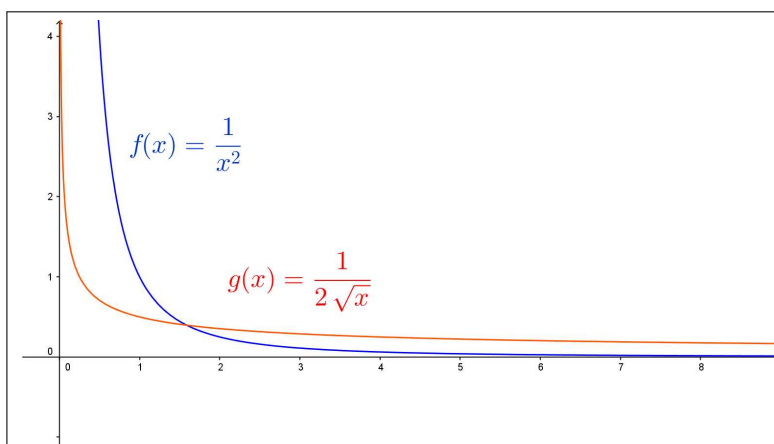



FIGURA 4. Divergenza in un estremo $\gamma < 1$

OSSERVAZIONE 4.1. *Il fenomeno illustrato sopra può essere memorizzato pensando che se dovessimo verniciare un muro lungo quanto tutto l'asse x positivo, di altezza che cali ad esempio come*
$$\frac{1}{1+x^2}$$

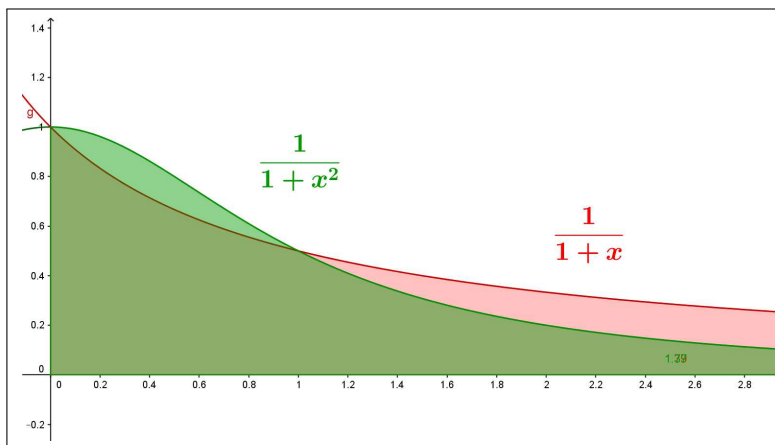



FIGURA 5. I due muri

allora ci basterà un barattolo di vernice, se del tipo coprente un m^2 *con un litro, di soli* $\pi/2$ *litri.*

Se invece dovessimo verniciare un muro analogo ma di altezza che diminuisca solo come

$$\frac{1}{1+x}$$

non ci basterebbe tutta la vernice di questo mondo !

Discorso analogo per la pittura delle guglie, vedi Figura 4: quelle sottili $1/\sqrt{x}$ *si verniciano con ... poca spesa, per quelle più larghe,* $1/x^2$ *la vernice non basta mai.*

CAPITOLO 24

Le serie

1. Introduzione

Assegnata una successione, cioè una fila di numeri

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$$

si può costruire la relativa successione delle *somme parziali*

$$S_0 = a_0,\ \ S_1 = a_0 + a_1,\ \ S_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \ S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots$$

e **convenire** che l'eventuale limite di tale successione di somme parziali possa essere assunto come *somma* $a_0, +a_1, +a_2, +a_3, \dots$ degli infiniti addendi $a_0,\ a_1,\ a_2, \dots$

ESEMPIO 1.1. *Sia*

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n :\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, \dots$$

Riesce, naturalmente, *vedi pagina 105**,*

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{3}{2}, \quad S_2 = \frac{7}{4}, \dots$$

e si ottiene un'espressione molto semplice degli S_n tenuto conto che

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = 1 + \frac{1}{2}\left(S_n - \frac{1}{2^n}\right)$$

da cui

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \quad S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \to \quad S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

La successione $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ è convergente a 2 pertanto la serie ha somma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Il risultato ottenuto può essere apprezzato meglio con la storiella del golosone e delle torte:

Un golosone è invitato a una festa: sulla tavola ci sono numerose torte e ognuno degli invitati può servirsi a piacere.
Il golosone va una prima volta alla tavola e si prende un'intera torta; poco dopo si ripresenta alla tavola e si prende una mezza torta.
Torna una terza volta e si prende un quarto di torta. Prosegue, fino a sera tarda andando a prendere ogni volta una nuova porzione, metà di quella presa la volta prima.
Più o meno alla fine della festa il golosone ha mangiato …due torte!

DEFINIZIONE 1.2. *Si dice che la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

è convergente se la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali è convergente.

Il limite S della successione delle somme parziali è assunto come somma della serie

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \to \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ESEMPIO 1.3. *Supponiamo che la fila $a_0, a_1, \dots$ di termini sia la seguente*

$$1-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \quad \dots, \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}, \ \dots$$

Le somme parziali $S_0, S_1, \dots$ sono pertanto

$$\begin{aligned}
&S_0 = 1-\frac{1}{2} \\
&S_1 = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) &&= 1-\frac{1}{3} \\
&S_n = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\dots+\left(\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+2}\right) &&= 1-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \quad \to \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1$$

2. Le serie geometriche

Prendono questo nome le serie

$$1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^k+\dots \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$$

che hanno come addendi le potenze naturali di uno stesso numero ρ (vedi pagina 105).

Come osservato nell'esempio introduttivo, è facile trovare l'espressione esplicita delle somme parziali

$$S_n = 1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n$$

infatti, se $\rho = 1$ è evidente che $S_n = 1+n$, mentre, nel caso generale di $\rho \neq 1$,

$$S_n = 1+\rho\left(1+\rho+\cdots+\rho^{n-1}\right) = 1+\rho\left(S_n-\rho^n\right) \quad \to \quad S_n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

La successione

$$S_n = \frac{1}{1-\rho}\left(1-\rho^{n+1}\right)$$

delle *somme parziali* per $\rho \neq 1$ è convergente se la successione $\{\rho^{n+1}\}$ è convergente: cosa che accade se e solo se $\rho \in (-1,1)$.

$$\rho \in (-1,1) \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\rho}$$

ovvero

$$\rho \in (-1,1) \quad \to \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$$

Se invece $\rho \notin (-1,1)$ la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$ non converge.

ESEMPIO 2.1.

$$1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{10}} = \frac{10}{7}$$

ESEMPIO 2.2. *Consideriamo il numero periodico*

$$1.\overline{3} = 1.3333333\ldots = 1+3\frac{1}{10}+3\left(\frac{1}{10}\right)^2+3\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots$$

Espressione che possiamo scrivere anche come

$$1.\overline{3} = 1+\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots\right)$$

Tenuto conto che

$$1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

si ha

$$1.\overline{3} = 1+\frac{3}{10}\,\frac{10}{9} = \frac{4}{3}$$

Il risultato ottenuto suggerisce la prevedibile traduzione di ogni numero periodico in frazione razionale.

ESEMPIO 2.3. *Sia $\rho \in (-1,1)$ la serie*

$$\rho^3+\rho^4+\dots$$

si può leggere come

$$\rho^3\left\{1+\rho+\rho^2+\dots\right\}=\rho^3\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k=\frac{\rho^3}{1-\rho}$$

ESEMPIO 2.4. *La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right\}$$

è convergente.

Infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

OSSERVAZIONE 2.5. *Una lettura confusa della convergenza delle serie geometriche sta alla base dei cosiddetti paradossi di Zenone (Achille e la tartaruga, la freccia e l'arco, ecc) tutti ampiamente riportati sia su tanti libri che oggi sul Web.*

Mi sembra giusto ricordare Zenone di Elea oggi, a 2448 *anni dalla scomparsa, grande pensatore certamente tutt'altro che ingenuo o confuso, stimato dallo stesso Platone.*

2.1. Una successione ricorsiva.

Consideriamo, per $a \geq 0$, la successione

$$b_0=a,\ b_1=a\sqrt{a},\ b_2=a\sqrt{a\sqrt{a}},\ \dots b_{n+1}=a\sqrt{b_n}$$

Considerando gli esponenti delle potenze di a che intervengono nella costruzione di $b_1, b_2, \dots$ si ha

$$b_0=a^1,\ b_2=a^{1+\frac{1}{2}},b_2=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}},\ \dots b_n=a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$$

È evidente quindi che

$$\lim_{n\to\infty}b_n=a^{\sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^k}=a^2$$

È del resto facile riconoscere che

- la successione $\{b_n\}$ è limitata: $|b_n| \leq a^2$ (per induzione),
- è monotona (ovviamente se $a \geq 1$, passando ai reciproci se $a < 1$).

Quindi si tratta di una successione convergente: detto ℓ il suo limite

$$b_{n+1}=a\sqrt{b_n}\quad\to\quad\ell=a\sqrt{\ell}\quad\to\quad\ell=a^2$$

2.2. Esercizi.

(1) ►► Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 0.5^{2n}$.

(2) ►► Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(3) ►► Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$.

3. Le serie esponenziali

Prendono questo nome le serie

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

La convergenza di queste serie deriva dalla formula di Taylor per la funzione esponenziale e^x (vedi pagina 72) : infatti, vedi anche pagina 236, le somme parziali

$$S_n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

coincidono con il polinomio di Taylor $T_n(x;0)$ relativo a e^x.
Quindi

$$S_n-e^x=T_n(x;0)-e^x=R_n(x)$$

tenuto conto dell'espressione di Lagrange del resto, formula (18) di pagina 236 ,

$$|R_n(x)|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \quad\to\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

si riconosce che

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty}S_n=e^x \quad\to\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

ESEMPIO 3.1. *La serie*

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

ha somma il numero e.

La serie invece

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\dots$$

ha somma e^{-1} cioè $1/e$.

ESEMPIO 3.2. *La serie*

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

ha somma e^{-x^2}*, la nota campana di Gauss.*

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n!}$.

(2) ▶▶ Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!}$.

(3) ▶▶ Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{n!}$.

4. Le serie armoniche

La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ha il nome di *serie armonica*

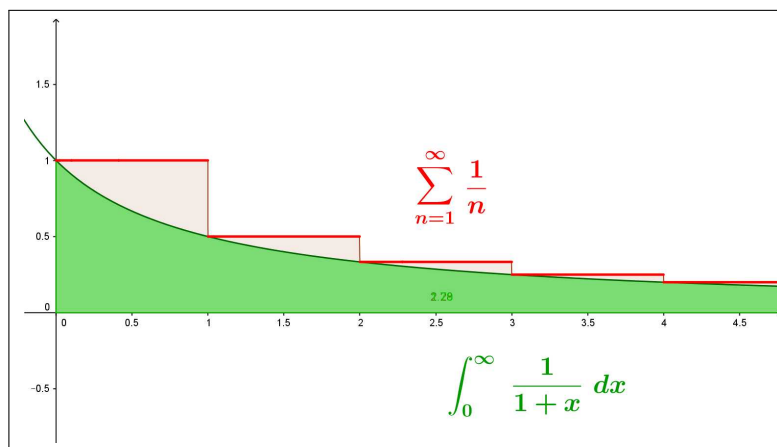



FIGURA 1. Il confronto

Il fatto che i suoi addendi siano una successione infinitesima fa sperare che le somme parziali

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

formino una successione ovviamente crescente, anche limitata e quindi convergente.

Purtroppo è facile riconoscere, guardando la figura 1, che invece

$$\int_0^n \frac{1}{1+x}\,dx \leq S_n$$

e quindi, dal momento che al crescere di n quegli integrali divergono, altrettanto divergente sarà la successione delle somme parziali S_n.

La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pertanto non è convergente.
Si tratta di un esempio estremamente importante in quanto il fatto che gli addendi $1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots$ diventino sempre più piccoli poteva far pensare che la serie costruita con essi dovesse convergere: la dimostrazione della non convergenza della serie armonica prova quindi che affinchè una serie converga non basta che i suoi addendi costituiscano una fila infinitesima.
Si noti del resto che la *non convergenza* della serie armonica è un risultato **squisitamente teorico**, nel senso che qualunque computer usato per calcolare la successione delle somme parziali S_n della serie armonica le avrebbe, erroneamente, riconosciute, prima o poi, costanti in quanto gli addendi $1/n$ sarebbero, prima o poi, stati inevitabilmente interpretati come *zeri* dalla macchina.

4.1. La costante γ.

La serie armonica non converge: questo vuol dire, come abbiamo visto precedentemente, che la successione delle somme parziali

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \quad \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge positivamente. Un problema interessante è valutare la rapidità con la quale tali somme parziali divergono: come n, come n^2, come $\log(n), \ldots$?

È interessante osservare tre fatti che coinvolgono la funzione parte intera $[x]$, le somme parziali $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, la funzione $\ln(n)$ sugli interi

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{[x]}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n+1)$
- $\displaystyle\frac{1}{[x]} \approx \frac{1}{x}, \quad \forall x \geq 1: \ \left|\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$

Ne segue che

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right| \leq \int_1^{n+1} \left|\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right| dx \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leq 1$$

Il terzo dei tre fatti precedentemente osservati implica l'esistenza dell'integrale improprio,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma \leq 1$$

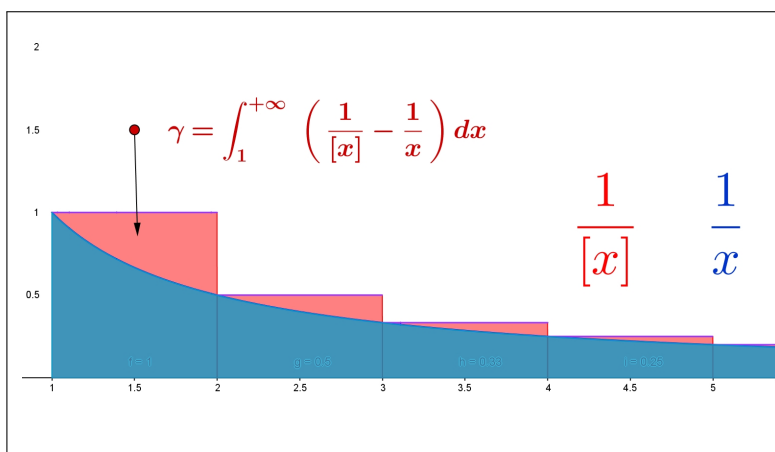



FIGURA 2. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma$

Tale numero ha il nome classico di **costante γ di Eulero Mascheroni** $\gamma \approx 0.57721$ si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma$$

In altre parole, tenuto presente il carattere crescente della successione delle differenze, certamente positive,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right| \leq \gamma \quad \to \quad \log(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n+1) + \gamma$$

La relazione di limite implica in particolare che, almeno per n abbastanza grande,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \gamma + \log(n+1)$$

4.2. Serie armoniche generalizzate.

Il confronto permette di riconoscere che essendo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \tag{26}$$

una maggiorante della serie armonica, le sue somme parziali saranno superiori a quelle della serie armonica: divergendo quelle divergeranno quindi anche queste.

La serie (26) non sarà quindi neanche lei convergente.

Analogamente è facile riconoscere, sempre per confronto, che le serie

$$\forall\,\alpha \leq 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sono tutte **non convergenti.**

Tenuto conto che, per $x > 0$, la funzione $1/x^2$ è decrescente si ha

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x \in [1,2] & \to & \dfrac{1}{2^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \\ \\ x \in [2,3] & \to & \dfrac{1}{3^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \\ \\ x \in [3,4] & \to & \dfrac{1}{4^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right| \quad \to \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \leq \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$$

ovvero, con ovvia generalizzazione,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$$

Tenuto conto che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

si ha di conseguenza

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

PROPOSIZIONE 4.1. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente.

DIMOSTRAZIONE. La successione delle somme parziali è infatti monotona crescente e limitata superiormente: quindi è convergente[1], come risulta dal Teorema sulle successioni monotone e limitate riportato a pagina 106 □

Con ragionamenti analoghi si riconosce il seguente

TEOREMA 4.2. *Le serie*

$$\forall\,\beta > 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$$

sono convergenti.

[1] È stato ottenuto, con metodi che esulano dalla nostra portata, addirittura il valore esatto della somma di tale serie, il sorprendente valore è $\pi^2/6$ circa $1{,}645$.

4.3. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare per quali α e β la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ è convergente.

(2) ▶▶ Determinare per quali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}^{\alpha}}$ è convergente.

(3) ▶▶ Determinare per quali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ è convergente.

5. Proprietà delle serie

PROPOSIZIONE 5.1. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_k = S$ *è convergente allora riesce anche*

- $\forall\lambda \in \mathbb{R}:\quad \sum_{n=0}^{\infty}\lambda\, a_k = \lambda\, S$
- $\forall m \in \mathbb{N}:\quad \sum_{n=m}^{\infty} a_k = S - S_{m-1}$

ESEMPIO 5.2. *La serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5\,\frac{1}{2^n}$$

è convergente: infatti

- *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *converge e riesce* $S = 2$ *come osservato precedentemente,*
- *quindi la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} 5\,\frac{1}{2^n}$ *converge e ha somma* $S = 5\times 2 = 10$
- *la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} 5\,\frac{1}{2^n}$ *converge e ha somma* $S = 10-(5+\frac{5}{2}) = 2.5$

COROLLARIO 5.3. *Se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *è convergente allora la successione* $\{a_n\}$ *dei suoi termini è infinitesima.*

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1}, \\ \lim_{n\to\infty} S_n = S \end{cases} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$$

□

L'uso più frequente del Corollario precedente è un uso *negativo*:

...se la successione $\{a_n\}$ degli addendi della serie non è infinitesima
la serie non può essere convergente !

ESEMPIO 5.4. *La serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ *non è convergente.*

Infatti $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$

TEOREMA 5.5. *Se due serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sono convergenti, con somme rispettivamente A e B allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\, a_n + \mu b_n)$ *è convergente e ha somma* $\lambda A + \mu B$.

ESEMPIO 5.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (13\frac{1}{2^n} - 17\frac{1}{3^n}) = 13 \times 2 - 17 \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

TEOREMA 5.7. *Le serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

- *a termini positivi,*
- *con successione* $\{S_m\}$ *delle somme parziali limitate*

sono tutte convergenti.

DIMOSTRAZIONE. Essendo gli addendi a_n positivi la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali è monotona crescente.

Tenuto conto dell'ipotesi che $\{S_n\}$ è limitata segue che è necessariamente convergente, come risulta dal Teorema sulle successioni monotone e limitate riportato a pagina 106. □

TEOREMA 5.8. *(Criterio del confronto) Siano* $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_k$ *due serie a* ***termini positivi*** *tali che* $a_n \leq b_n$ *per ogni n.*

La prima serie, quella con gli addendi minori si dice ***serie minorante****, la seconda, quella con gli addendi maggiori si dice* ***serie maggiorante***

- *se la serie maggiorante converge allora converge anche la minorante,*
- *se la serie minorante non converge allora non converge neanche la maggiorante.*

ESEMPIO 5.9. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n}$$

è convergente; infatti i suoi termini verificano la disuguaglianza

$$\frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, *maggiorante della serie assegnata, è convergente.*

Quindi, per il Criterio del confronto, è convergente anche la serie assegnata.

5.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare con il criterio del rapporto per quali x sia convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$

(2) ▶▶ Determinare, per confronto, per quali α è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n^2} \right)^{\alpha}$$

(3) ▶▶ Determinare, per confronto, per quali α è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right)^{\alpha}$$

6. La convergenza assoluta

TEOREMA 6.1. *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *è convergente allora è convergente anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

La (eventuale) convergenza della serie costituita dagli addendi in modulo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

viene detta *convergenza assoluta della serie*: pertanto il precedente Teorema può essere rienunciato come

Le serie convergenti assolutamente sono convergenti.

OSSERVAZIONE 6.2. *Se una serie a termini positivi è convergente allora, essendo ovviamente* $a_n = |a_n|$ *essa è anche assolutamente convergente.*

Le tante altre serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n$$

costruite mischiando a piacere i segni degli addendi sono tutte assolutamente convergenti, quindi convergenti.

Naturalmente hanno somme diverse, che dipendono dai cambiamenti di segno effettuati.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

PROPOSIZIONE 6.3. *(Il criterio del rapporto)*
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è convergente se* $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \ell < 1$

DIMOSTRAZIONE. (Attenzione: l'ipotesi posta è *sufficiente*, non necessaria.)

$$\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \ell \quad \rightarrow \quad |a_n| \leq |a_{n-1}|\ell \leq |a_{n-2}|\ell^2 \leq \cdots \leq |a_0|\,\ell^n$$

Tenuto conto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\,\ell^n$ con $0 \leq \ell < 1$

- è convergente,
- è maggiorante della $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

si riconosce, per confronto, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Allora, tenuto conto del precedente teorema sulle serie assolutamente convergenti, si riconosce che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. □

6.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Riconoscere la convergenza assoluta e quindi la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2\sin(n)+\sin^2(n^2)}{1+n^2}$$
(2) ▶▶ Determinare per quali α la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ è assolutamente convergente.
(3) ▶▶ Riconoscere la convergenza assoluta e quindi la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{1+n^3}$$

CAPITOLO 25

Equazioni differenziali di primo ordine

1. Introduzione

Sia x funzione di t: un'equazione che coinvolga x e t

$$3x+2t+1=0 \quad \to \quad x=-2t-1$$

si dice *equazione ordinaria*, un'equazione che coinvolga anche le derivate x' o x'' si dice *equazione differenziale*

$$x+x'=1 \quad \to \quad x'=1-x \quad \to \quad x= \quad ?$$

Se l'*equazione differenziale* coinvolge oltre a t e x solo la x' si dice *equazione differenziale di primo ordine*, se coinvolge anche la derivata seconda x'' si dice *equazione differenziale di secondo ordine*.

Risolvere un'equazione ordinaria significa, in genere, trovare un numero x che soddisfi l'equazione assegnata, una *radice* dell'equazione: se l'equazione contiene poi dei parametri le sue radici dipenderanno probabilmente da quei parametri, saranno cioè *funzioni di quei parametri*.

Risolvere invece un'equazione differenziale significa, in ogni caso, trovare una funzione $x(t)$ tale che lei e la sua derivata prima $x'(t)$ (ed eventualmente anche altre sue derivate successive $x''(t)$, ecc) soddisfino l'equazione assegnata.

Sotto questo punto di vista un'equazione quale ad esempio $x+x'=1$ dovrebbe essere scritta, più correttamente come

$$x(t)+x'(t)=1$$

Le equazioni differenziali di primo ordine più comuni sono

1.	$x'=f(t)$	esplicite,
2,	$x'=k\cdot x+b$	accrescimento ($k>0$) o decadimento ($k<0$),
3.	$x'=k\cdot x\cdot(b-x)$	equazione logistica.

Studieremo nel successivo capitolo le più comuni del secondo ordine

1.	$x''+\varepsilon x'=-g$	caduta dei gravi,
2.	$x''+\varepsilon x'+\omega^2\cdot x=0$	oscillazioni elastiche.

Le funzioni $x(t)$ che soddisfano un'equazione differenziale si dicono *soluzioni di quella equazione differenziale*.

1.1. Quali funzioni possono essere soluzioni di equazioni differenziali ?

Pensiamo ad esempio alla funzione $x(t) = t^2$: essa soddisfa certamente l'equazione differenziale $x' - 2t = 0$.

Analogamente la funzione $x(t) = e^{3t}$ soddisfa l'equazione $x' - 3x = 0$.

La funzione $x(t) = \dfrac{1}{x-1}$ verifica l'equazione $x' + x^2 = 0$.

La funzione $x(t) = \sin(t)$ verifica l'equazione del secondo ordine $x'' + x = 0$.

La funzione $x(t) = |t|$ definita in $\mathbb{R}$ non è soluzione di alcuna equazione differenziale

... perchè non è derivabile !

2. Equazioni esplicite

Supponiamo di occuparci di un'equazione del tipo $x' = f(t)$, con f continua in un intervallo $[a,b]$: determinare le sue soluzioni significa determinare le *primitive* di $f(t)$.

La formula che rappresenta tutte le soluzioni dell'equazione differenziale al variare di t in un intervallo che contenga a, è

$$x(t) = c + \int_a^t f(s)\,ds$$

Si incontrano equazioni esplicite per esempio nel calcolo del kilometraggio percorso viaggiando a una velocità $f(t)$ nota.

ESEMPIO 2.1. *Sia $x' = 2t$: le funzioni $x(t) = t^2 + c$ sono, per ogni $c \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione.*

La presenza osservata di più soluzioni per una stessa equazione differenziale permette di completare il problema cercando non solo una funzione che soddisfi l'equazione ma una funzione $x(t)$ che valga al tempo $t = 0$ iniziale un valore x_0 assegnato.

In questo caso la soluzione è unica ed è espressa come segue

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\,ds$$

3. Equazioni lineari del primo ordine

Supponiamo di occuparci di un'equazione del tipo $x' = k \cdot x + b$, cominciando dal caso $b = 0$

$$x' = k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(t+h) - x(t)}{x(t)} \approx kh$$

variazione percentuale proporzionale al tempo h fatto passare.

Legami di questo genere si incontrano

- nello sviluppo di una popolazione (la variazione è proporzionale al numero di individui),
- nel deposito ad interesse di un capitale (la variazione del montante è proporzionale al capitale depositato)
- nel decadimento radioattivo (la variazione di sostanza è proporzionale alla sua quantità).

Tutte le soluzioni dell'equazione

$$x' = kx$$

che ha il nome di *lineare omogenea*, sono le funzioni $x(t) = c \cdot e^{kt}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 3.1. *Le soluzioni dell'equazione* $x'(t) = -0.05x(t)$ *sono tutte e sole le funzioni* $x(t) = c\,e^{-0.05t}$.

ESEMPIO 3.2.

$$\begin{cases} x' = -x \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad \to \quad x(t) = 3 \cdot e^{-t}$$

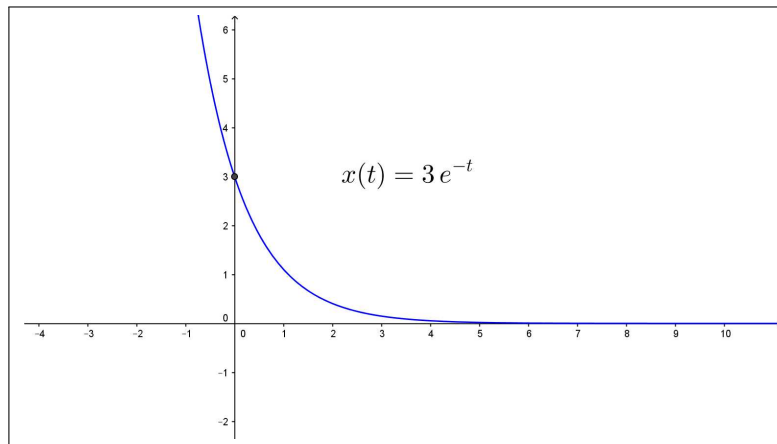



FIGURA 1. $x(t) = 3 \cdot e^{-t}$

Le funzioni $x(t) = c\,e^{-t}$ *sono tutte soluzioni dell'equazione.*

Nel punto $t_0 = 0$ *esse valgono c: quindi per soddisfare la seconda condizione c deve essere* 3.

Tutte le soluzioni dell'equazione $x' = k \cdot x + b$, che ha il nome di *lineare non omogenea*, sono le funzioni

$$x(t) = c \cdot e^{kt} - \frac{b}{k}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO 3.3. *Le soluzioni dell'equazione* $x'(t) = -0.05x(t) + 1$ *sono tutte e sole le funzioni* $x(t) = c\,e^{-0.05t} + 20$.

La presenza del termine $b \neq 0$, $x' = k \cdot x + b$, corrisponde a eventuali flussi in entrata (o in uscita) che si aggiungono alla normale variazione.

La presenza di più soluzioni permette di completare il problema cercando una funzione che soddisfi l'equazione e che produca per $t = 0$ un valore x_0 assegnato, problema detto *problema di Cauchy*,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = k \cdot x(t) + b \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad \to \quad x(t) = x_0 + \frac{b}{k}\left(e^{kt} - 1\right) \tag{27}$$

3.1. Il tempo di dimezzamento.

Le soluzioni dell'equazione $x'(t) = kx(t)$ sono tutte e sole le funzioni $x(t) = c\,e^{kt}$: supponiamo di aver a che fare con una di tali funzioni sapendo che

$$x(0) = A, \qquad x(\tau) = \frac{1}{2}A$$

conoscendo cioè il valore al tempo $t = 0$ e il tempo τ nel quale si è *dimezzata*

$$x(t) = c\,e^{kt} \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = A \\ x(\tau) = \frac{1}{2}A \end{array} \right. \quad \to \quad e^{k\tau} = \frac{1}{2} \quad \to \quad k = \frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

La funzione $x(t)$ è pertanto la seguente

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\ln(2)}{\tau}t} = A\left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$$

3.2. Esercizi.

(1) ►► Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $3x'(t) - 5x(t) = 0$

(2) ►► Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = x(t) - 1 \\ x(0) & = 1 \end{array} \right.$$

(3) ►► Determinare il «tempo di dimezzamento» per le soluzioni dell'equazione $x'(t) = -0.5x(t)$

4. La logistica

Il nome spetta all'equazione

$$x'(t) = k_0\,(M - x(t))\,x(t), \qquad k_0 > 0,\ M > 0$$

che può pensarsi come una variante della

$$x'(t) = k_0\,x(t)$$

dove, in luogo del fattore di proporzionalità costante k_0 figuri un fattore $k_0\,(M - x(t))$ che dipende da $x(t)$.

L'interpretazione è molto semplice:

- finchè $x(t) \leq M$ il fattore $k_0\,(M - x(t))$ è positivo, c'è crescita,
- se $x(t)$ supera M il fattore $k_0\,(M - x(t))$ è negativo, c'è decrescita.

Si tratta di un fenomeno frequentemente riscontrabile in natura: una popolazione (animale o vegetale) cresce finchè trova spazio, all'esaurirsi del quale smette di crescere.

Questa lettura suggerisce di attribuire al coefficiente M il significato di *capacità ambientale*.

Per determinare soluzioni della logistica si procede come segue

$$x'(t) = k_0\,(M - x(t))\,x(t) \quad \rightarrow \quad \frac{x'(t)}{x^2(t)} = k_0\left(\frac{M}{x(t)} - 1\right)$$

da cui detta

$$z(t) = \frac{1}{x(t)}$$

si ha

$$z'(t) = -k_0\,M\,z(t) + k_0$$

equazione lineare non omogenea in $z(t)$: ne segue

$$z(t) = c_1 e^{-k_0 M t} + \frac{1}{M} \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{M}{1 + c_1\,M\,e^{-k_0 M t}}$$

$$x'(t) = k_0\,(M - x(t))\,x(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{M\,e^{k_0 M t}}{e^{k_0 M t} + c_1\,M}$$

ESEMPIO 4.1. *Determinare la funzione $x(t)$ che soddisfi l'equazione logistica $x'(t) = 0.1\,x(t)\,(10 - x(t))$ e che al tempo iniziale $t = 0$ valga 2.*

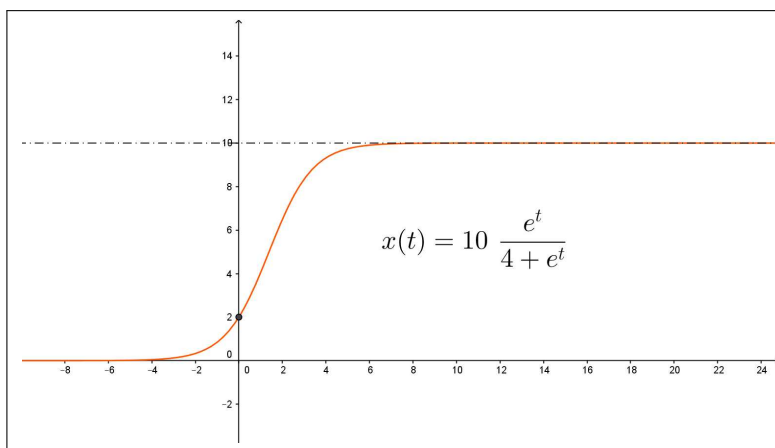



FIGURA 2. $x(t) = \frac{10\,e^t}{4+e^t}$

Le soluzioni della equazione sono

$$x(t) = \frac{10\,e^t}{10\,c_1 + e^t}$$

Per soddisfare la condizione $x(0)=2$ occorre

$$\frac{10}{10c_1+1}=2 \quad \to \quad c_1=0.4 \quad \to \quad x(t)=\frac{10\,e^t}{4+e^t}$$

La soluzione richiesta è disegnata in figura (2): si noti la forma sigmoide, vedi pagina 253.

4.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare le soluzioni della logistica $x'(t)=x(t)\,(1-x(t))$

(2) ▶▶ Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)\,(1-x(t)) \\ x(0)=2 \end{cases}$$

(3) ▶▶ Detta $x(t)$ la soluzione dell'esercizio precedente, determinare gli intervalli in cui è convessa.

5. Equazioni a variabili separabili

Prendono questo nome le equazioni differenziali di primo ordine della forma

$$x'=\frac{f(t)}{g(x)} \quad \to \quad g(x)\,x'=f(t)$$

Rappresentata la derivata x' nella notazione tradizionale $\frac{dx}{dt}$ le equazioni a variabili separabili sono generalmente riscritte nella forma

$$g(x)\,dx=f(t)\,dt \quad \to \quad \int g(x)\,dx=\int f(t)\,dt \tag{28}$$

Detto $G(x)$ l'integrale indefinito di $g(x)$ e $F(t)$ quello di $f(t)$ si ha

$$G(x)=F(t)+c$$

equazione ordinaria dalla quale ricavare x come funzione di t e di c.

ESEMPIO 5.1. *Consideriamo il problema*

$$\frac{dx}{dt}+3t^2x^2=0, \quad x(1)=\frac{1}{2}$$

L'equazione differenziale si scrive nella forma

$$-\frac{1}{x^2}\,dx=3t^2\,dt \quad \to \quad \int -\frac{1}{x^2}\,dx=\int 3t^2\,dt$$

da cui

$$\frac{1}{x}=t^3+c \quad \to \quad x=\frac{1}{t^3+c}$$

Per soddisfare l'ulteriore condizione

$$x(1) = \frac{1}{2} \quad \to \quad \frac{1}{1+c} = \frac{1}{2} \quad \to \quad c = 1$$

La soluzione del problema assegnato è pertanto

$$x(t) = \frac{1}{t^3 + 1}$$

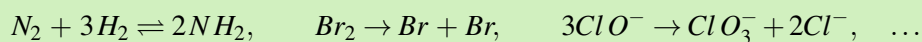
5.1. Esercizi.

(1) ►► Determinare soluzioni dell'equazione $x'(t) = e^{-x(t)}\left(3t^2 + 2t + 1\right)$
(2) ►► Determinare soluzioni dell'equazione $x'(t) = 3\sqrt{x(t)}\,t^2$
(3) ►► Determinare soluzioni dell'equazione $x'(t) = \dfrac{t^2}{x^2(t)}$

CAPITOLO 26

Cinetica chimica

Le reazioni chimiche si presentano simbolicamente con formule quali

$$N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_2, \qquad Br_2 \to Br + Br, \qquad 3ClO^- \to ClO_3^- + 2Cl^-, \quad \dots$$

Le sostanze a primo membro, i reagenti, si trasformano, in opportune condizioni di temperatura, pressione, ecc., in quelle a secondo membro: le reazioni possono anche essere, come nel primo esempio, reversibili.

Le reazioni indicate avvengono nel tempo, con velocità più o meno grandi che dipendono da vari fattori incluse le concentrazioni stesse dei reagenti.

Le concentrazioni dei reagenti, e naturalmente quelle dei prodotti di reazione, variano nel tempo,

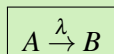
> *sono funzioni di t spesso soluzioni di opportune equazioni differenziali di primo ordine o del tipo a variabili separabili.*

Le osservazioni che seguono si riferiscono a reazioni in sistemi omogenei, caratterizzate dalla presenza di una sola fase, per esempio gassosa, durante l'intero decorso del processo.

1. Da un reagente A a un prodotto di reazione B

Consideriamo il processo di trasformazione di un reagente A in un prodotto di reazione B: si pensi, ad esempio, alla polimerizzazione, il passaggio, sotto opportune condizioni di temperatura e pressione, di un monomero A a un suo corrispondente polimero B (la produzione delle materie plastiche).

La trasformazione, indicata dallo schema

$$\boxed{A \stackrel{\lambda}{\to} B}$$

include la probabilità λ che una mole di reagente A si trasformi, nell'unità di tempo, in una mole di B: λ viene detto *costante cinetica* o *velocità di reazione*.

Sovente le reazioni del tipo $A \stackrel{\lambda}{\to} B$ sono riferite al *decadimento radioattivo*.

Le concentrazioni del reagente A, numero (anche non intero) di moli per unità di volume e quella del prodotto della reazione dipendono dal tempo, sono pertanto funzioni del tempo t

$$[A](t), \qquad [B](t)$$

Fissato un intervallo temporale $[t_0,\ t_0+\triangle t]$ il numero di moli del reagente A che passano, nell'unità di volume, allo stato B è (ragionevolmente) proporzionale alla concentrazione $[A](t)$ e alla durata dell'intervallo di tempo:

$$\begin{cases} [A](t_0+\triangle t)-[A](t_0)\approx -\lambda\triangle t\ [A](t_0) \\ \\ [B](t_0+\triangle t)-[B](t_0)\approx +\lambda\triangle t\ [A](t_0) \end{cases} \tag{29}$$

l segni $-$ e $+$ derivano dal fatto che la transizione da A a B corrisponde ad una perdita di concentrazione di A e a un aumento di quella di B

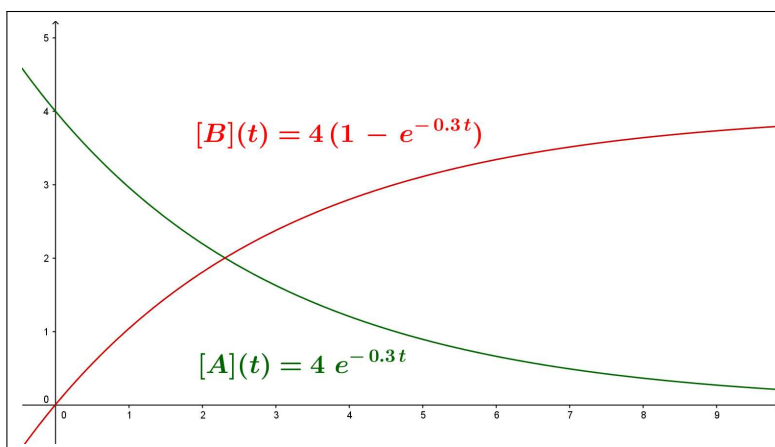



FIGURA 1. $A \to B$

Dalle (29) seguono naturalmente

$$\begin{cases} \dfrac{[A](t_0+\triangle t)-[A](t_0)}{\triangle t} & \approx & -\lambda\ [A](t_0) \\ \dfrac{[B](t_0+\triangle t)-[B](t_0)}{\triangle t} & \approx & \lambda\ [A](t_0) \end{cases} \to \begin{cases} [A]'(t)= & -\lambda\,[A](t) \\ \\ [B]'(t)= & +\lambda\,[A](t) \end{cases}$$

Le soluzioni delle due equazioni differenziali, con condizioni iniziali $[A](0)=A_0,\ [B](0)=0$ sono, vedi (27) a pagina 322,

$$[A](t)=A_0\,e^{-\lambda t}, \qquad [B](t)=A_0(1-e^{-\lambda t})$$

La concentrazione del reagente A cala, esponenzialmente, dal valore iniziale A_0 a zero, vedi Figura 1; quella del prodotto di reazione cresce dallo zero iniziale al valore A_0.

Il coefficiente $-\lambda$ che figura nell'esponenziale determina, naturalmente, la rapidità con cui il reagente A si trasforma nel prodotto di reazione B.

1.1. Il tempo di dimezzamento.

DEFINIZIONE 1.1. *Il tempo $T_{1/2}$ in cui la concentrazione del reagente è la metà di quella iniziale*

$$[A](T_{1/2}) = \frac{1}{2}A_0, \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

*si chiama **tempo di dimezzamento** della funzione* $[A](t)$

I due parametri λ e $T_{1/2}$ sono legati dalla relazione

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \to \lambda T_{1/2} = \log(2)$$

Conosciuto uno dei due si determina di conseguenza l'altro:

$$\lambda = \frac{\log(2)}{T_{1/2}} \approx \frac{0.69314..}{T_{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/2} \approx \frac{0.69314..}{\lambda}$$

Il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ dipende dal parametro λ, quindi dal tipo di reazione, ma non dipende dalla concentrazione iniziale.

Nell'esempio in Figura 1 il tempo di dimezzamento, $[A](T_{1/2}) = \frac{1}{2}[A](0) = 2$ è circa 2.3.

1.2. Vita attesa. Dato che la transizione da una mole di tipo A a una di tipo B è puramente casuale, il tempo t di vita di una mole A, cioè il tempo che passerà prima che si trasformi in una mole B, può variare tra zero e infinito.

Supponendo per semplicità che le trasformazioni avvengano ai tempi interi $0, 1, 2, 3, \ldots$ avremo che il numero di moli che si sono trasformate al tempo $t = 0$ è pari alla differenza $[A](0) - [A](1)$: tenuto conto delle (29), tale numero si esprime come

$$[A](0) - [A](1) \approx \lambda [A](0)$$

Analogamente

$$[A](1) - [A](2) \approx \lambda [A](1)$$

è il numero di quelle che si sono trasformate al tempo $t = 1$, ecc.

Le percentuali delle A_0 moli iniziali di A che si sono trasformate in moli di B ai tempi $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ sono pertanto

$$\lambda \frac{[A](0)}{[A](0)}, \quad \lambda \frac{[A](1)}{[A](0)}, \quad \lambda \frac{[A](2)}{[A](0)}, \quad \ldots \quad \lambda \frac{[A](n)}{[A](0)}, \ldots$$

Le percentuali osservate, interpretate come probabilità, dicono che *ogni mole di A ha, nella reazione considerata $A \xrightarrow{\lambda} B$, la probabilità*

$$p_n = \lambda \frac{[A](n)}{[A](0)} = \lambda\, e^{-\lambda n}$$

di trasformarsi al tempo $t_n = n$ in una mole di B.

Il valor medio o atteso τ dei tempi in cui avviene la trasformazione è pertanto, vedi pagina 125,

$$\tau = \sum_n t_n\, p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\lambda\, e^{-\lambda n} \approx \int_0^{+\infty} t\,\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$$

approssimazione tanto migliore quanto più $\lambda \approx 0$, integrando per parti, tenuto conto che $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$,

$$\int_0^{+\infty} t\,\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = -\int_0^{+\infty} t \left(e^{-\lambda t}\right)' dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

Il tempo medio τ nel quale le moli A si trasformano in moli B è

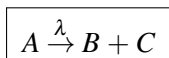
$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$$

tempo medio che non dipende dalla quantità iniziale del reagente.

L'espressione trovata attribuisce al coefficiente λ una interpretazione importante: più λ è grande più breve è il tempo mediamente impiegato dalle A per diventare B.

Nell'esempio di Figura 1 il tempo medio è ≈ 3.3.

1.3. Da un reagente A a due di reazione B e C.

$$\boxed{A \xrightarrow{\lambda} B + C}$$

Consideriamo la decomposizione di una sostanza A che si dissocia in due sostanze B e C.

Il sistema di equazioni differenziali relativo alle tre concentrazioni $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ ha forma analoga a quella del caso $A \xrightarrow{\lambda} B$:

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -\lambda\,[A], & [A](0) = A_0 \quad \to \quad [A](t) = A_0\, e^{-\lambda t} \\[2ex] \dfrac{d[B]}{dt} = \lambda\,[A], & [B](0) = B_0 \quad \to \quad [B](t) = B_0 + A_0\,(1 - e^{-\lambda t}) \\[2ex] \dfrac{d[C]}{dt} = \lambda\,[A], & [C](0) = C_0 \quad \to \quad [C](t) = C_0 + A_0\,(1 - e^{-\lambda t}) \end{cases}$$

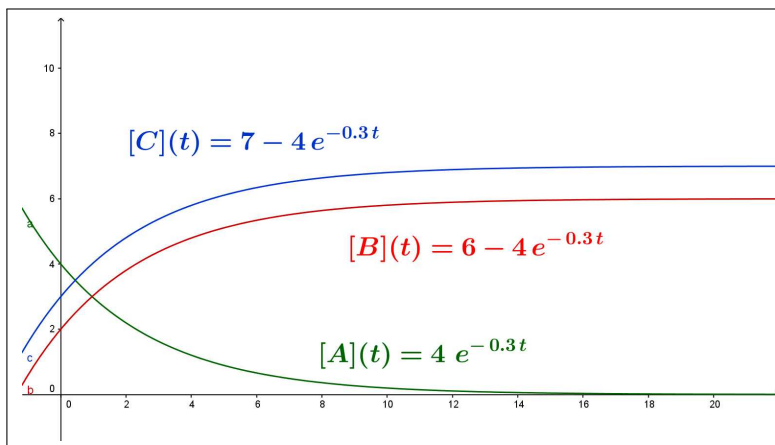



FIGURA 2. $A \to B + C$

Si noti che dalle equazioni del sistema si può dedurre che si conservano le somme delle concentrazioni

$$[A](t) + [B](t), \qquad [A](t) + [C](t)$$

1.3.1. *La determinazione sperimentale dei parametri.*

Il sapere che la concentrazione $[A](t)$ nella reazione $A \xrightarrow{\lambda} B$ verifica l'equazione differenziale

$$\begin{cases} [A]'(t) = -\lambda\,[A](t) \\ [A](0) = A_0 \end{cases} \tag{30}$$

costituisce un'informazione importante nella misura in cui conosciamo, con sicurezza, i due parametri λ e A_0 che figurano nel sistema: conoscenza che non è ovvia.

Si può procedere in modo indiretto: se $[A](t)$ verifica il precedente sistema (30) allora

$$[A](t) = A_0\,e^{\lambda\,t} \quad \to \quad \log([A](t)) = \log(A_0) - \lambda\,t$$

Misurate le concentrazioni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in n tempi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ determiniamo la retta di regressione lineare, vedi pagina 246, relativa agli n punti

$$(t_1, \log(A_1)), \quad (t_2, \log(A_2)), \quad \ldots, \quad (t_n, \log(A_n))$$

Sia

$$y = p + m\,t$$

tale retta: assumere quindi che

$$A_0 = e^p, \qquad \lambda = m$$

costituisce una ragionevole determinazione sperimentale dei parametri.

ESEMPIO 1.2. *Consideriamo due reazioni concatenate*

$$A \quad \xrightarrow{k_1} \quad B \quad \xrightarrow{k_2} \quad C$$

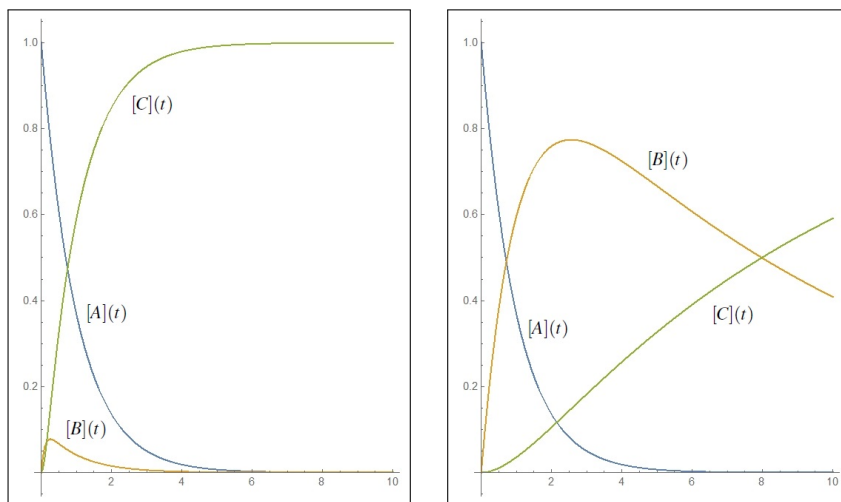
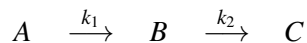



FIGURA 3. $k_1 = 1, k_2 = 10, \quad k_1 = 1, k_2 = 0.1$

Supponiamo inltre $[A](0) = a, \quad [B](0) = 0, \quad [C](0) = 0$*: le concentrazioni* $[A]$ *e* $[B]$ *soddisfano le due equazioni differenziali*

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k_1\,[A] \\ \\ [A](0) = a \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d[B]}{dt} = -k_2\,[B] + k_1\,[A] \\ \\ [B](0) = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$[A](t) = a\,e^{-k_1 t}, \quad [B](t) = \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

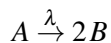
e per quanto riguarda $[C]$ *il mantenimento della somma*

$$[A](t) + [B](t) + [C](t) = [A](0) + [B](0) + [C](0)$$

conduce a

$$[C](t) = a - [A](t) - [B](t) = a\left\{1 - \frac{k_2\,e^{-k_1 t} - k_1\,e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}\right\}$$

2. Da una mole A a due moli B

$$\boxed{A \xrightarrow{\lambda} 2B}$$

La concentrazione $[A](t)$ continua a verificare l'equazione differenziale, decadimento esponenziale,

$$\begin{cases} [A]'(t) = -\lambda\,[A](t), \\ [A](0) = A_0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad [A](t) = A_0\,e^{-\lambda\,t}$$

Indichiamo con $x(t)$ la concentrazione delle moli passate nell'intervallo di tempo $[0, t]$ dalla forma A alla B:

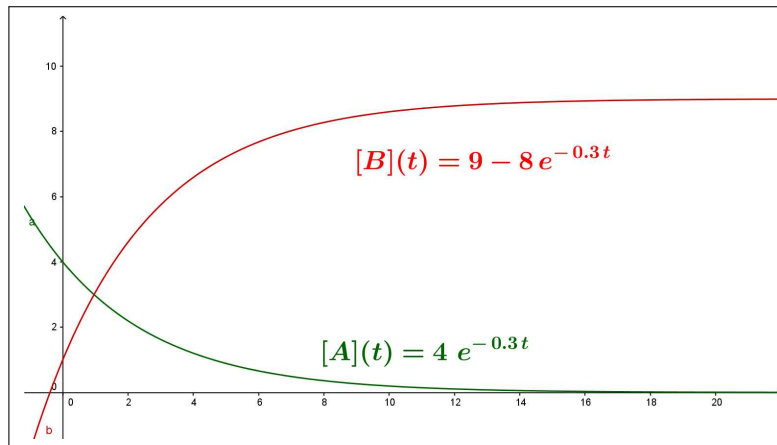



FIGURA 4. $A \rightarrow 2B$, $\lambda = 0.3, A_0 = 4, B_0 = 1$

$$\begin{cases} [A](t) = & A_0 - x(t) \\ \\ [B](t) = & B_0 + 2x(t) \end{cases}$$

Da cui

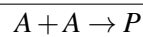
$$\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad = -\lambda\,[A](t) = -\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \lambda\,(A_0 - x(t)) = \frac{dx}{dt}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda\,(A_0 - x(t)), \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x(t) = A_0\,(1 - e^{-\lambda\,t})$$

e quindi

$$A(t) = A_0\,e^{-\lambda\,t}, \qquad B(t) = B_0 + 2A_0(1 - e^{-\lambda\,t})$$

3. Da due moli A a una di B

$$\boxed{A + A \rightarrow P}$$

Consideriamo il caso di una reazione in cui una mole di A reagisca incontrando un'altra mole ancora di A per dar luogo ad una mole P: la probabilità di incontrarsi è proporzionale in ogni tempo t al quadrato $[A]^2(t)$ della concentrazione.

Pertanto la concentrazione $[A](t)]$ deve soddisfare l'equazione differenziale non lineare ma a variabili separabili, vedi pagina 324,

$$\frac{d[A]}{dt} = -\lambda\,[A]^2(t), \qquad [A](0) = A_0$$

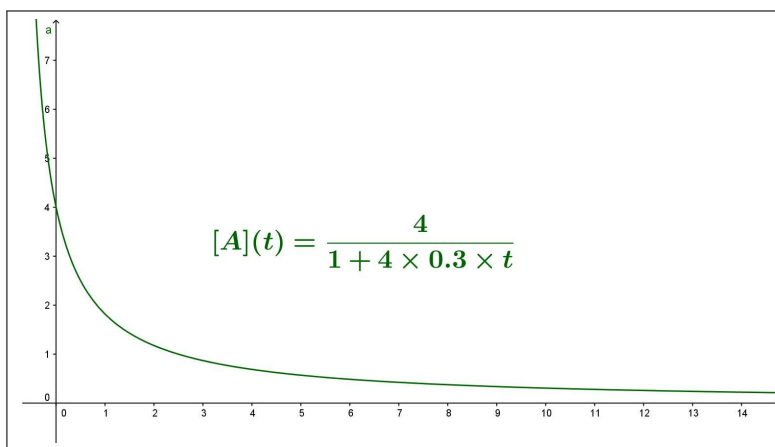



FIGURA 5. $A+A\to P,\ \lambda = 0.3,\ A_0 = 4$

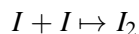
da cui

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -\lambda\,dt \quad \to \quad \frac{1}{[A](t)} = \frac{1}{A_0} + \lambda t$$

ovvero

$$[A](t) = \frac{A_0}{1+A_0\,\lambda\,t} \tag{31}$$

Si noti come il decadimento della concentrazione $[A](t)$ sia in questo caso meno veloce: $\dfrac{A_0}{1+A_0\,\lambda\,t}$ continua a calare verso zero ma meno rapidamente di quanto non calerebbe l'espressione $A_0\,e^{-\lambda\,t}$.

ESEMPIO 3.1. *Consideriamo la reazione*

$$I + I \mapsto I_2$$

di formazione della molecola I_2 *a partire da due atomi* I.

L'equazione differenziale corrispondente è

$$\begin{cases} \dfrac{d[I]}{dt} = -\lambda\,[I]^2(t) \\ [I](0) = I_0 \end{cases}$$

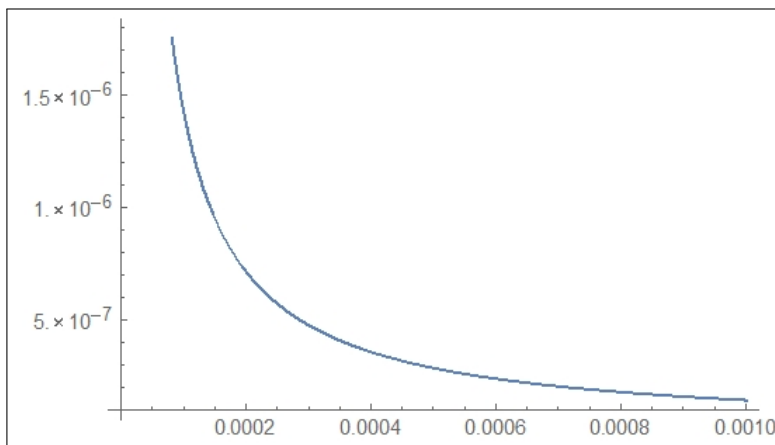



FIGURA 6. $I+I \mapsto I_2$

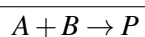
Accolto che $\lambda = 7.0\times 10^9$ *e che la concentrazione iniziale sia* $I_0 = 6.72\times 10^{-3}$ *si avrà*

$$[I](t) = \frac{I_0}{1+I_0\,\lambda\,t} = \frac{6.72\times 10^{-3}}{1+6.72\times 10^{-3}\times 7.0\,10^9\times t} = \frac{6.72\,10^{-3}}{1+4.7\,10^7\,t}$$

Il decadimento della concentrazione $[I](t)$ *è comunque molto rapido come si legge nella tabella seguente*

t	$[i](t)$
0.	6.72×10^{-3}
0.1	1.43×10^{-9}
0.2	7.15×10^{-10}
0.3	4.76×10^{-10}
0.4	3.57×10^{-10}
0.5	2.86×10^{-10}
0.6	2.38×10^{-10}
0.7	2.04×10^{-10}
0.8	1.78×10^{-10}
0.9	1.59×10^{-10}
1.	1.43×10^{-10}

decadimento molto rapido inizialmente, poi quasi nullo mano mano che il tempo passa, vedi figura 6.

4. Da due reagenti A e B a un prodotto P

$$\boxed{A+B\to P}$$

Consideriamo il caso di una reazione in cui una mole di A reagisca incontrando un'altra mole di B per dar luogo ad una mole P: la probabilità di incontrarsi

è proporzionale in ogni tempo t al prodotto $[A](t)\,[B](t)$ delle concentrazioni:

$$\frac{d[A]}{dt} = -\lambda\,[A](t)\,[B]](t)$$

Detta $x(t)$ la concentrazione delle moli entrate nella reazione al tempo t si ha

$$\begin{cases} [A](t) = A_0 - x(t), \\ [B](t) = B_0 - x(t), \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \lambda\,(A_0 - x(t))\,(B_0 - x(t))$$

L'equazione differenziale che la funzione $x(t)$ deve soddisfare è pertanto a variabili separabili, vedi pagina 324,

$$\frac{dx}{(A_0 - x(t))\,(B_0 - x(t))} = \lambda\,dt \tag{32}$$

Tenuto conto della decomposizione in frazioni semplici

$$\frac{1}{(A_0 - x)\,(B_0 - x)} = \frac{1}{B_0 - A_0}\left\{\frac{1}{A_0 - x} - \frac{1}{B_0 - x}\right\}$$

l'equazione differenziale si legge nella forma più semplice

$$\frac{dx}{A_0 - x} - \frac{dx}{B_0 - x} = (B_0 - A_0)\,\lambda\,dt$$

da cui segue, tenuto conto della condizione iniziale $x(0) = 0$,

$$\log\left(\frac{B_0 - x(t)}{B_0}\right) - \log\left(\frac{A_0 - x(t)}{A_0}\right) = (B_0 - A_0)\,\lambda\,t$$

ovvero, ricavando $x(t)$, supponendo $A_0 \neq B_0$,

$$x(t) = \frac{A_0\,B_0\,\left(e^{A_0\,\lambda\,t} - e^{B_0\,\lambda\,t}\right)}{A_0\,e^{A_0\,\lambda\,t} - B_0 e^{B_0\,\lambda\,t}} \tag{33}$$

da cui seguono quindi le espressioni di $[A](t)$ e di $[B](t)$

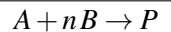
$$[A](t) = A_0 - x(t) \quad \rightarrow \quad [A](t) = \frac{A_0(A_0 - B_0)e^{A_0\lambda t}}{A_0 e^{A_0\lambda t} - B_0 e^{B_0\lambda t}},$$

$$[B](t) = B_0 - x(t) \quad \rightarrow \quad [B](t) = \frac{B_0(B_0 - A_0)e^{B_0\lambda t}}{B_0 e^{B_0\lambda t} - A_0 e^{A_0\lambda t}},$$

È interessante notare che se $B_0 \to A_0$ l'espressione di $[A](t)$ trovata restituisce quella osservata nel precedente caso (31) $A + A \xrightarrow{\lambda} P$: infatti, servendosi della regola di Hôpital si ha, derivando rispetto a B_0,

$$\lim_{B_0 \to A_0} \frac{A_0(A_0 - B_0)e^{A_0\lambda t}}{A_0 e^{A_0\lambda t} - B_0 e^{B_0\lambda t}} = \lim_{B_0 \to A_0} \frac{-A_0\,e^{A_0\lambda t}}{-e^{B_0\lambda t} - B_0\,\lambda\,t\,e^{B_0\lambda t}} = \frac{A_0}{1 + A_0\,\lambda\,t}$$

5. Da una mole di A ed n di B a una P

$$\boxed{A + n B \to P}$$

Consideriamo il caso di una reazione in cui una mole di A reagisce incontrando un'altra mole di B per dar luogo ad una mole P, con la condizione che il contributo stechiometrico di B sia n volte quello di A.

La probabilità di incontrarsi è proporzionale in ogni tempo t al prodotto $[A](t)\,[B](t)$ delle concentrazioni.

Pertanto la velocità di reazione è ancora proporzionale al prodotto delle concentrazioni $A(t)\,B(t)$:

$$\frac{d[A]}{dt} = -\lambda\,[A](t)\,[B]](t)$$

Detto $x(t)$ il numero di moli entrate nella reazione al tempo t si ha

$$\begin{cases} [A](t) = A_0 - x(t), \\ [B](t) = B_0 - n\,x(t), \end{cases} \to \frac{dx}{dt} = \lambda\,(A_0 - x(t))\,(B_0 - n\,x(t))$$

ovvero anche

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\,n\,(A_0 - x(t))\,(\frac{B_0}{n} - x(t))$$

L'equazione differenziale che la funzione $x(t)$ deve soddisfare è perfettamente analoga alla precedente (32).

La sua soluzione $x(t)$ è analoga alla (33) in cui si sostituiscano a λ e a B_0 le seguenti

$$\lambda^* = \lambda\,n, \qquad B_0^* = \frac{1}{n}\,B_0$$

6. Riepilogo equazioni incontrate

$$\begin{cases} x'(t) & = -\lambda\,x(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \quad \to \quad x(t) = x_0\,e^{-\lambda\,t}$$

$$\begin{cases} x'(t) & = -\lambda\,x^2(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \quad \to \quad x(t) = \frac{x_0}{1 + \lambda\,x_0\,t}$$

$$\begin{cases} x'(t) & = \lambda\,(a - x(t))\,(b - x(t)) \\ x(0) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \frac{b - x}{a - x} = \frac{b}{a}\,e^{\lambda\,(b-a)\,t}$$

da cui

$$0 < a < b \quad \to \quad x(t) = \frac{a\,b\,\left[e^{\lambda\,(b-a)\,t} - 1\right]}{b\,e^{\lambda\,(b-a)\,t} - a}$$

6.1. Esercizi.

(1) ►► La reazione $A \overset{\lambda}{\mapsto} B$ inizi con $A_0 = 4$ e abbia $\lambda = 0.01$: calcolare $[A](5)$ e $[A](10)$

(2) ►► La reazione $A + A \overset{\lambda}{\mapsto} B$ inizi con $A_0 = 10$ e abbia $\lambda = 0.5$: calcolare $[A](5)$ e $[A](10)$

(3) ►► La reazione $A + B \overset{\lambda}{\mapsto} P$ inizi con $A_0 = 10$ e $B_0 = 100$ e abbia $\lambda = 0.05$: calcolare $[A](5)$ e $[A](10)$.

CAPITOLO 27

Equazioni differenziali di secondo ordine

1. Oscillatore armonico

L'equazione differenziale lineare del secondo ordine più importante è la

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

detta *oscillatore armonico*.

Le sue soluzioni sono le funzioni $\sin(\omega\, t)$ e $\cos(\omega\, t)$: infatti

$$\begin{cases} (\sin(\omega\, t))'' = -\omega^2 \sin(\omega\, t) & \rightarrow \quad (\sin(\omega\, t))'' + \omega^2 \sin(\omega\, t) = 0 \\ (\cos(\omega\, t))'' = -\omega^2 \cos(\omega\, t) & \rightarrow \quad (\cos(\omega\, t))'' + \omega^2 \cos(\omega\, t) = 0 \end{cases}$$

Naturalmente sono soluzioni dell'*oscillatore armonico* anche tutte le loro combinazioni lineari

$$A \sin(\omega\, t) + B \cos(\omega\, t)$$

L'*oscillatore armonico* interviene in numerosi fenomeni fisici, sostanzialmente collegati ai movimenti di punti materiali che si muovano sull'asse x richiamati alla posizione d'equilibrio $x = 0$ da forze $\mathbf{f} = -\gamma x$ di tipo elastico:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad m\,x'' = \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad m\,x'' = -\gamma x \quad \rightarrow \quad x'' + \omega^2 x = 0$$

avendo indicato con ω^2 il quoziente, positivo, γ/m.

ESEMPIO 1.1. *Determinare la soluzione dell'equazione $y'' + 9y = 0$ che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.*

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma

$$y = A \sin(3t) + B \cos(3t)$$

pertanto per soddisfare le due condizioni iniziali assegnate occorre che

$$\begin{cases} y(0) = 0 & A \sin(0) + B \cos(0) = 0 \\ y'(0) = 1 & 3A \cos(0) - 3B \sin(0) = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = 1/3,\ B = 0$$

La soluzione richiesta è pertanto

$$y(t) = \frac{1}{3} \sin(3t)$$

OSSERVAZIONE 1.2. ***Un'osservazione qualitativa***
L'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ permette di riconoscere una proprietà importante delle funzioni soluzione.

Sia $x = f(t)$ una soluzione di tale equazione

$$\omega \neq 0: \qquad f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad \to \quad f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

negli intervalli in cui $f(t) < 0$ si ha di conseguenza $f''(t) > 0$ e, viceversa negli intervalli in cui $f(t) > 0$ si ha $f''(t) < 0$.

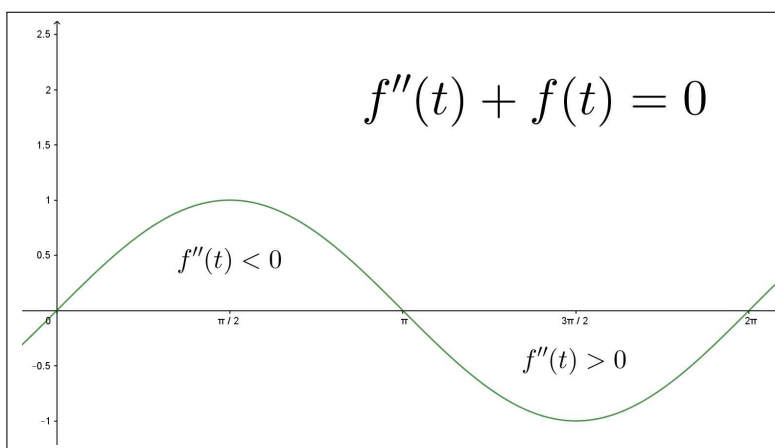



FIGURA 1. $f(t) = \sin(t)$

Quanto osservato conduce a riconoscere che il grafico di $f(t)$ sarà:

- *quello di una funzione convessa (convessità verso l'alto, come per t^2) negli intervalli in cui il grafico sta sotto l'asse t,*
- *quello di una funzione concava (convessità verso il basso, come per $-t^2$) negli intervalli in cui il grafico sta sopra l'asse t,*

requisiti che, a ben guardare, sono posseduti dai grafici di $\sin(t)$, $\cos(t)$ *e in generale anche dai grafici di* $\sin(\omega\, t)$ *e da* $\cos(\omega\, t)$ *qualunque sia* $\omega \in \mathbb{R}$.

2. Lineari omogenee

L'equazione differenziale seguente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \tag{34}$$

con a e b costanti assegnate costituisce una generalizzazione dell'*oscillatore armonico* $y'' + \omega^2 y = 0$.

Queste generalizzazioni hanno importanti applicazioni: se a e b sono positivi esse forniscono un modello delle *oscillazioni smorzate*, cioè del progressivo arrestarsi di oggetti oscillanti in conseguenza degli attriti.

2.1. Soluzioni della (34). Si cercano soluzioni dell'equazione (34) nella forma $e^{\lambda t}$ scegliendo opportunamente λ.

Il procedimento è il seguente

$$\frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} + a\frac{d e^{\lambda t}}{dt} + b e^{\lambda t} = 0 \quad \to \quad e^{\lambda t}\left\{\lambda^2 + a\lambda + b\right\} = 0 \quad \to \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Pertanto la funzione $e^{\lambda t}$ soddisfa l'equazione se e solo se λ è radice dell'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{35}$$

che prende il nome di *equazione caratteristica* della (34).

2.2. I tre casi (due radici reali, una sola, due conmplesse coniugate).

- Se l'equazione caratteristica (35) ha due soluzioni λ_1 e λ_2 reali e distinte, discriminante $\triangle = a^2 - 4b > 0$,
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{\triangle}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{\triangle}\right)$$
allora le due funzioni
$$e^{\lambda_1 t}, \qquad e^{\lambda_2 t}$$
sono soluzioni della (34).
Tutte le soluzioni della (34) sono della forma
$$x(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t}$$
- Se l'equazione caratteristica (35) ha una sola soluzione λ_1, discriminante $\triangle = a^2 - 4b = 0$, $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ allora le due funzioni
$$e^{\lambda_1 t}, \qquad t\, e^{\lambda_1 t}$$
sono soluzioni della (34).
Tutte le soluzioni della (34) sono della forma
$$x(t) = (A + Bt)\, e^{\lambda_1 t}$$
- Se l'equazione caratteristica (35) non ha soluzioni reali, ovvero ha due soluzioni complesse coniugate, discriminante $\triangle = a^2 - 4b < 0$,
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a - i\sqrt{-\triangle}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a + i\sqrt{-\triangle}\right)$$
allora le due funzioni, esponenziali complesse (vedi pagina 92)
$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{a}{2}t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right)\right\} \\ \\ e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{a}{2}t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right)\right\} \end{cases}$$
sono soluzioni della (34).

Se ne deduce, combinando opportunamente i due esponenziali che tutte le soluzioni della (34) sono della forma

$$x(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left\{A\,\sin\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right) + B\,\cos\left(\frac{\sqrt{-\triangle}}{2}t\right)\right\}$$

ESEMPIO 2.1. *Primo caso:*

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$.
Esistono due radici reali e distinte $\lambda_1 = -2$ *e* $\lambda_2 = -3$.
Le due funzioni e^{-2t} *e* e^{-3t} *sono soluzioni dell'equazione assegnata.*
Tutte le soluzioni sono della forma $Ae^{-2t} + Be^{-3t}$.

ESEMPIO 2.2. *Secondo caso:*

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, *ovvero* $(\lambda + 3)^2 = 0$.
Esiste una sola radice $\lambda_1 = -3$.
Le due funzioni e^{-3t} *e* $t\,e^{-3t}$ *sono soluzioni dell'equazione assegnata.*
Tutte le soluzioni sono della forma $Ae^{-3t} + Bt\,e^{-3t} = e^{-3t}\big(A + Bt\big)$.

ESEMPIO 2.3. *Terzo caso:*

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$.
Esistono due radici complesse coniugate $\lambda_1 = -1 - 2i$ *e* $\lambda_2 = -1 + 2i$.
Le due funzioni $e^{-t}\,\sin(2t)$ *e* $e^{-t}\,\cos(2t)$ *sono soluzioni dell'equazione assegnata.*
Tutte le soluzioni sono della forma $e^{-t}\,\{A\,\sin(2t) + B\,\cos(2t)\}$.

OSSERVAZIONE 2.4. *Le espressioni delle soluzioni trovate, in tutti e tre i casi, contengono fattori esponenziali* $e^{\gamma t}$*: il segno del coefficiente* γ *determina il carattere infinitesimo o meno di tali fattori esponenziali al tendere di* $t \to +\infty$.

In tutti e tre gli esempi precedenti abbiamo incontrato nell'espressione delle soluzioni fattori esponenziali infinitesimi per $t \to +\infty$.

Tutti e tre gli esempi corrispondono a modelli di moti che, al passare del tempo, tendono a fermarsi.

Come è facile riconoscere (ricordando la regola di Cartesio sui segni delle radici di un'equazione di secondo grado) le soluzioni di un'equazione differenziale $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\,\dfrac{dy}{dt} + b\,y = 0$ *nella quale i due coefficienti* a *e* b *siano entrambi positivi sono infinitesime per* $t \to +\infty$.

2.3. Esercizi.

(1) ►► Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea
$$x''(t) + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x'(t) + \sqrt{6}x(t) = 0$$
(2) ►►Determinare l'equazione differenziale della quale le due funzioni
$$e^{-t}\sin(3t), \qquad e^{-t}\cos(3t)$$
sono soluzioni
(3) ►► Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea
$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$$

3. Le condizioni iniziali

Le quazioni differenziali del secondo ordine originano dal *secondo principio della dinamica*
$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}, \qquad my''(t) = \mathbf{f}, \qquad y''(t) = \frac{1}{m}\mathbf{f}$$
Le equazioni differenziali lineari considerate nel paragrafo precedente nascono dall'aver considerato forze **f** di tipo elastico $-\omega^2 y$ o «*elastico con attriti*»
$$-ay' - by.$$

La meccanica insegna che il moto di un punto è determinato non solo dalla forza che gli si applica ma anche dalle condizioni di moto che il punto aveva quando gli si è applicata la forza:

- posizione iniziale, cioè valore $x(0)$,
- velocità con la quale eventualmente viaggiava già al tempo $t = 0$ iniziale, cioè valore $x'(0)$

La ricerca delle soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine viene, a seguito di quanto osservato sopra, completata nella forma seguente:
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = h \\ y'(0) = k \end{cases}$$
forma cui si da il nome di *problema di Cauchy*.

La possibilità riconosciuta nel precedente paragrafo di trovare soluzioni dell'equazione dipendenti da due parametri liberi A e B permette di riconoscere che il problema ha sempre, cioè quali che sia l'equazione e quali che siano le condizioni iniziali h e k, una e una sola soluzione.

Procedimento:

- l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale permette di costruire due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e con esse la totalità
$$y(t) = A\,y_1(t) + By_2(t)$$
delle soluzioni dell'equazione,
- per soddisfare le condizioni iniziali assegnate si determinano A e B in modo che soddisfino il sistema
$$\begin{cases} A\,y_1(0) + By_2(0) & = h \\ A\,y_1'(0) + By_2'(0) & = k \end{cases}$$

ESEMPIO 3.1. *Consideriamo la soluzione $y_\varepsilon(t)$ del problema*
$$\begin{cases} y''(t) + \varepsilon\, y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$
al variare di $\varepsilon \in [0,2]$, vedi figure di pagina *345**:*

- $\varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad y_\varepsilon(t) = \sin(t)$
- $\varepsilon = 0.2 \quad \rightarrow \quad y_\varepsilon(t) = 1.005e^{-0.1t}\sin(0.995\,t)$
- $\varepsilon = 0.9 \quad \rightarrow \quad y_\varepsilon(t) = 1.120e^{-0.45t}\sin(0.893\,t)$
- $\varepsilon = 2 \quad \rightarrow \quad y_\varepsilon(t) = t\,e^{-t}$

Per $\varepsilon = 0$ la soluzione, $\sin(t)$ oscilla in modo periodico tra 1 e -1.

Al crescere di ε le soluzioni raggiungono quote più basse e le oscillazioni vanno smorzandosi fino a scomparire del tutto per $\varepsilon = 2$ (e prevedibilmente per ogni $\varepsilon \geq 2$).

I grafici delle quattro soluzioni relative ai quattro valori di ε considerati sono le seguenti:

Domanda:
Gli attriti frenano il movimento le oscillazioni elastiche: a chi interessa che oggetti spostati dalla loro posizione d'equilibrio vi ritornino con minime oscillazioni smorzate o addirittura, senza oscillare affatto ?

Risposta: *...pensate agli ammortizzatori delle automobili !*

3.1. Esercizi.

(1) ▶▶ Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$x''(t) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

(2) ▶▶ Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

(3) ▶▶ Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

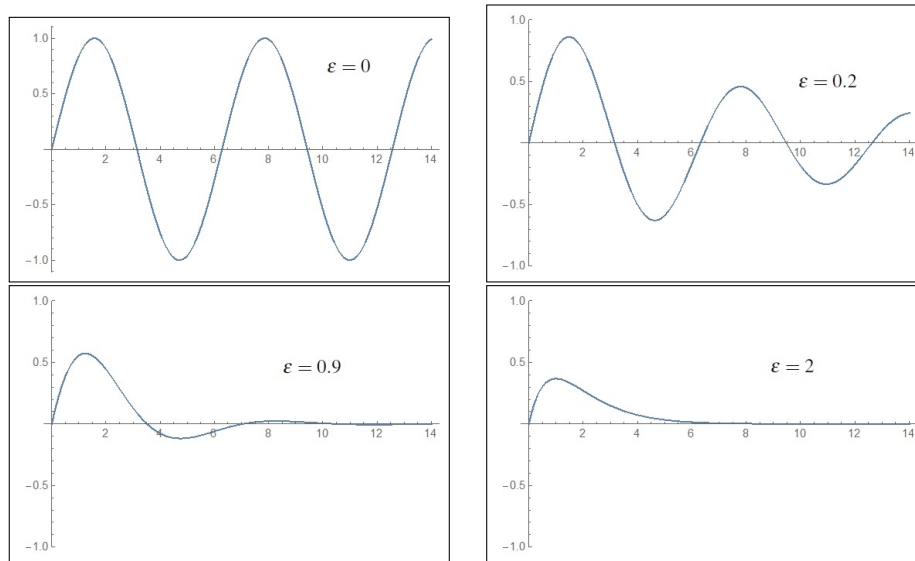



FIGURA 2. Soluzioni in presenza di attriti ε

4. Le oscilazioni forzate

Le equazioni differenziali

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

con secondo membro diverso dallo zero precedentemente considerato si chiamano *equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee*.

Non esistono algoritmi che determinino le loro soluzioni con procedimenti semplici quali quelli (equazione caratteristica) illustrati nel caso omogeneo.

Consideremo quindi solo alcuni casi di secondi membri $f(t)$ per i quali la costruzione di soluzioni sia agevole.

4.1. $f(t) = \alpha t + \beta$, polinomio di primo grado.

Cerchiamo prima di tutto, in modo empirico, una funzione $\overline{y}(t)$ che verifichi l'equazione

$$y'' + ay' + by = \alpha t + \beta \tag{36}$$

Una candidata naturale è un polinomio

$$\overline{y}(t) = ht + k$$

Per provare la sua validità sostituiamolo nell'equazione:

$$(ht+k)'' + a(ht+k)' + b(ht+k) = \alpha t + \beta \quad \to \quad (a+b)ht + bk = \alpha t + \beta$$

da cui

$$h = \frac{\alpha}{(a+b)h}, \quad k = \frac{\beta}{b} \quad \to \quad \overline{y}(t) = \frac{\alpha}{(a+b)h}t + \frac{\beta}{b}$$

Per trovare poi tutte le altre soluzioni dell'equazione (36) basterà aggiugere al polinomio $\overline{y}(t)$ tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ che sappiamo determinare tramite l'equazione caratteristica.

Tutte le soluzioni della (36) sono pertanto

$$y(t) = \overline{y}(t) + A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Può capitare che le divisioni con le quali abbiamo determinato i coefficienti h e k del polinomio $\overline{y}(t)$ siano impraticabili, per via dell'annullarsi dei denominatori. Cosa fare allora ?*

Con un po' di fatica in più si dovrà in tal caso costruire la $\overline{y}(t)$ ancora come polinomio ma di grado superiore ...

4.2. $f(t) = k\,e^{\gamma t}$, esponenziale.

Una candidata naturale che soddisfi l'equazione $y'' + a\,y' + b\,y = k\,e^{\gamma t}$ è una funzione della forma stessa $\overline{y}(t) = \alpha\,e^{\gamma t}$, con α scelto opportunamente.

Sostituendo nell'equazione si ha

$$(\alpha\,e^{\gamma t})'' + a\,(\alpha\,e^{\gamma t})' + b\,(\alpha\,e^{\gamma t}) = k\,e^{\gamma t} \quad \to \quad \alpha\,e^{\gamma t}\left(\gamma^2 + a\,\gamma + b\right) = k\,e^{\gamma t}$$

da cui segue

$$\alpha = \frac{k}{\gamma^2 + a\,\gamma + b}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + a y' + b y = k\,e^{\gamma t}$$

sono pertanto

$$y(t) = \frac{k}{\gamma^2 + a\,\gamma + b}\,e^{\gamma t} + A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$$

essendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le soluzioni dell'omogenea ottenute con il precedente procedimento dell'equazione caratteristica.

OSSERVAZIONE 4.2. *Come nel caso precedente, ove la divisione per $\gamma^2 + a\,\gamma + b$ fosse impraticabile si dovrà cercare la soluzione nella nuova forma $\overline{y}(t) = \alpha\,t\,e^{\gamma t}$.*

4.3. $f(t) = k\,\cos(\gamma t) + h\,\sin(\gamma t)$, periodica.

Una candidata naturale che soddisfi l'equazione $y'' + a\,y' + b\,y = k\,\cos(\gamma t) + h\,\sin(\gamma t)$ è una funzione della forma analoga $\overline{y}(t) = \alpha\,\cos(\gamma t) + \beta\,\sin(\gamma t)$, con $\alpha,\ \beta$ scelti opportunamente.

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}(t)'' + a\,\overline{y}(t)' + b\,\overline{y}(t) \;=\; k\,\cos(\gamma t) + h\,\sin(\gamma t) \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} -\alpha\gamma^2 + a\beta\gamma + b\alpha = h \\ -\beta\gamma^2 - a\alpha\gamma + b\beta = k \end{cases}$$

Il sistema determina i coefficienti $\alpha_0,\ \beta_0$ opportuni.

Tutte le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$y(t) = \alpha_0 \cos(\gamma t) + \beta_0 \sin(\gamma t) + A\, y_1(t) + B\, y_2(t)$$

essendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le soluzioni dell'omogenea determinate tramite l'equazione caratteristica.

4.4. Esercizi.

(1) ►► Determinare tutte le soluzioni dell'equazione:
$$x''(t) + 4x(t) = 1 + t$$
(2) ►► Determinare tutte le soluzioni dell'equazione:
$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^t$$
(3) ►► Determinare tutte le soluzioni dell'equazione:
$$x''(t) + 9x(t) = \cos(t)$$

5. La risonanza

Consideriamo la questione su un esempio, l'equazione non omogenea

$$y'' + 9y = \cos(\gamma t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

alla quale sono state assegnate anche condizioni iniziali.

Determiniamo $\overline{y}(t) = \alpha \cos(\gamma t) + \beta \sin(\gamma t)$: sostituendo nell'equazione si ha

$$\alpha(-\gamma^2 + 9) \cos(\gamma t) + \beta(-\gamma^2 + 9) \sin(\gamma t) = \cos(\gamma t)$$

L'uguaglianza implica

$$\alpha = \frac{1}{9 - \gamma^2}, \qquad \beta = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equzione sono pertanto

$$y(t) = \frac{1}{9 - \gamma^2} \cos(\gamma t) + A \cos(3t) + B \sin(3t)$$

Per soddisfare le condizioni iniziali occorre che

$$\begin{cases} \dfrac{1}{9 - \gamma^2} + A & = 0 \\ B & = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La soluzione cercata, condizioni iniziali incluse, è pertanto

$$y(t) = \frac{1}{9 - \gamma^2} \cos(\gamma t) - \frac{1}{9 - \gamma^2} \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t)$$

Si noti come il coefficiente

$$\frac{1}{9 - \gamma^2}$$

sia tanto più grande quanto più $\gamma^2 \approx 9$: in altri termini se la forza applicata ha frequenza $\gamma \approx 3$ la soluzione $y(t)$ che ne deriva compie oscillazioni di ampiezze grandi.

A questo fenomeno si da il nome di *risonanza*: se ne parla (anche a sproposito, ponti che crollano, cristallerie che crepano, ...) spesso.

Lo si incontra, senza accorgersene, da bambini quando si riesce a far volare l'altalena, allegramente quasi senza sforzo...

5.1. Esercizi.

(1) ►► Assegnato il problema di Cauchy $y'' + 2y' + 2y = \cos(\gamma t)$, determinare per quali γ le soluzioni hanno ampiezza maggiore.
(2) ►► Assegnata la funzione $y(t) = e^{-t}\cos(t)$ determinare un problema di Cauchy che essa soddisfi.
(3) ►► Detta $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$$

- determinare i punti di massimo e di minimo relativi,
- determinare la successione dei valori di massimo e di minimo.

CAPITOLO 28

Soluzioni degli Esercizi

1. Numeri

Numeri:1.1 Le due frazioni equivalgono a

$$\frac{n(2n+1)}{(2n+1)(n+1)}, \qquad \frac{2n(n+1)}{(n+1)(2n+1)}$$

che hanno lo stesso denominatore e come numeratori rispettivamente

$$2n^2+n \qquad 2n^2+2n$$

Si riconosce pertanto che la seconda è più grande.

◀◀

Numeri:1.2 La distanza d è, per definizione, il modulo della diffrenza: pertanto

$$d = \left|\frac{123}{456} - \frac{789}{987}\right| = \frac{|123 \times 987 - 789 \times 456|}{456 \times 987} \approx 0,675$$

◀◀

Numeri:1.3

$$3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{109}{33}$$

◀◀

Numeri:2.1 Se m è un numero primo non ha fattori propri. Se non è primo allora $m = p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \ldots \times p_n^{r_n}$, tutti fattori maggiori o uguali a 2, si riconosce quindi che

$$\forall j \in [1,n] : \ p_j \le m$$

◀◀

Numeri:2.2 Se per assurdo fosse

$$p_1\,p_2\,p_3 + 1 = k\,p_1 \quad \to \quad (p_2\,p_3 - k)\,p_1 = -1$$

da cui essendo il primo membro divisibile per p_1 dovrebbe esserlo anche il secondo....

◀◀

Numeri:2.3

$$m = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)\,n\,(n+1)$$

dei tre numeri consecutivi $n-1,\ n,\ n+1$ uno sarà divisibile per 3.

◂◂

Numeri:3.1 I divisori di a^2 e b^2 sono anche divisori di a e b. I quadrati dei divisori di a e b sono anche divisori di a^2 e b^2. Quindi sussiste l'uguaglianza.

◂◂

Numeri:3.2 $m = MCD(678, 876) = 6$

$$\begin{array}{lll} 876 & = 1\times 678 & +198 \\ 678 & = 3\times 198 & +84 \\ 198 & = 2\times 84 & +30 \\ 84 & = 2\times 30 & +24 \\ 30 & = 1\times 24 & +6 \\ 24 & = 4\times 6 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 6 = 24\times 876 - 31\times 678$$

◂◂

Numeri:3.3 $123x + 321y = 18.:$ $MCD(123, 321) = 3$ $\rightarrow$ $123\times 47 - 321\times 18 = 3$ $\rightarrow$ $x_0 = 282,\ y_0 = -108$. Altre soluzioni $x = 282 + n*321,\ y = -108 - n*123$.

◂◂

Numeri:4.1 $123,456 \quad 123,457 \quad \rightarrow \quad 123,4565$

◂◂

Numeri:4.2 $\dfrac{7}{9}$ e $\dfrac{9}{7}$ $\quad\rightarrow\quad \{0.8,\ 0.9,\ \ldots,1.27,\ 1.28\}$

◂◂

Numeri:4.3 $1.\overline{3} \quad\rightarrow\quad \dfrac{4}{3} \quad\rightarrow\quad (1.\overline{3})^2 = \dfrac{16}{9}$

◂◂

Numeri: 5.1 $\sqrt{1-x^2} \quad\rightarrow\quad 1 - x^2 \geq 0 \quad\rightarrow\quad -1 \leq x \leq 1.$

◂◂

Numeri: 5.2

$$\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2} \quad\rightarrow\quad \frac{(\sqrt{2})^2}{(3+\sqrt{2})^2} = \frac{2}{11 + 6\sqrt{2}}$$

◂◂

Numeri: 5.3 $\dfrac{\sqrt{1-t}}{\sin(t)} \quad\rightarrow\quad t \leq 1,\ t \neq n\pi.$

◂◂

Numeri: 6.1 $(x^2+1)(x^2-1)=0 \quad \to \quad x^2-1=0 \quad \to \quad x=\pm 1.$

◀◀

Numeri: 6.2 $\dfrac{5^{5/2}}{5^{6/4}}=5^{5/2-6/4}=5.$

◀◀

Numeri: 6.3 $(5+3)\times 8-5\times(3+8)=64-55=9.$

◀◀

Numeri: 7.1 $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-x}=\dfrac{1-x}{1-x}=1.$

◀◀

Numeri: 7.2 $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{1-x}=-(x^2+1).$

◀◀

Numeri: 7.3

$$(1-\sqrt{x})(2+3\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\,(2-3\sqrt{x})=(1-x)(4-9x)=4-13x+9x^2$$

◀◀

Numeri: 8.1

$$\begin{cases}\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}>1\\ \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}<1\end{cases} \quad \to \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}<\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$$

◀◀

Numeri: 8.2

$$a=2+3\sqrt{2} \quad \to \quad a^2=22+12\sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{(22+12\sqrt{2})^2}=\frac{22-12\sqrt{2}}{196}$$

◀◀

Numeri: 8.3

$$a=5-3\sqrt{5} \quad \to \quad a^2-10a+10=30$$

◀◀

Numeri: 9.1 $E:=\{\dots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1,0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}:$
$x\in E \quad \to \quad -1\le x\le 1.$

◀◀

Numeri: 9.2 $E:=[-3,5]\cap[0,10] \quad \to \quad \min(E)=0,\max(E)=5$

◀◀

Numeri: 9.3

$$x \in Q_F \quad \rightarrow \quad x = f^2 \quad \rightarrow \quad x \geq 0$$

◀◀

2. Piano cartesiano

Piano cartesiano:1.1 $\left(t^2 - t + 1, t - t^2 - 1\right) x = t^2 - t + 1, \quad y = t - t^2 - 1 \quad \rightarrow$ $y = -x$ Ordinata di segno opposto a quello dell'ascissa: secondo e quarto quadrante.

◀◀

Piano cartesiano:1.2

$$Q = (-\sin(t), 2\sin(t)), \quad S = (-t^3, 2t^3)$$

hanno ascissa e ordinata di segni opposti, quindi stanno nel secondo e quarto quadrante.

◀◀

Piano cartesiano:1.3 $Q = (x^2, y^2)$ entrambe le coordinate positive: primo quadrante.

$S = (y, x)$, prima coordinata positiva, seconda negativa: quarto quadrante.

◀◀

Piano cartesiano:2.1 $A = (-3, 1)$, $B = (\sqrt{5}, 1) \quad \rightarrow \quad y = 1$

◀◀

Piano cartesiano:2.2

$$3x + 5y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (0, -1/5), \quad (-1/3, 0), \quad (1, -4/5).$$

◀◀

Piano cartesiano:2.3 $x + y + 1 = 0$ no: i punti del primo quadrante
$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \rightarrow \quad x + y \geq 0 \quad \rightarrow \quad x + y + 1 \geq 1$

◀◀

Piano cartesiano:3.1

$$3x + 5y + \sqrt{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A = (0,0),\ B = (-1,0)$$

◀◀

Piano cartesiano:3.2

◀◀

Piano cartesiano:3.3 $A = (1,2), \quad B = (-2,3), \quad C = (0,-1)$ da cui $\overline{AC} = \sqrt{10}$, $\overline{AB} = \sqrt{10}, \quad \overline{BC} = \sqrt{20}$, la disuguaglianza è evidente.

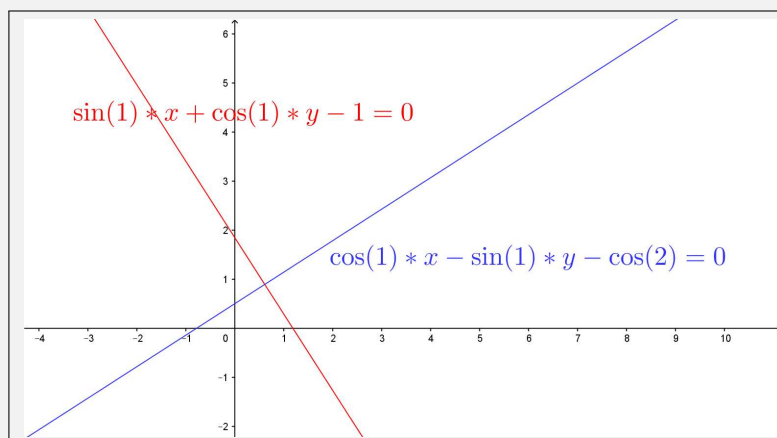



FIGURA 1. $\sin(1)x + \cos(1)y - 1 = 0, \qquad \cos(1)x - \sin(1)y - \cos(2) = 0.$

◀◀

Piano cartesiano:4.1 $C = (1, -1), r = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2.$

◀◀

Piano cartesiano:4.2

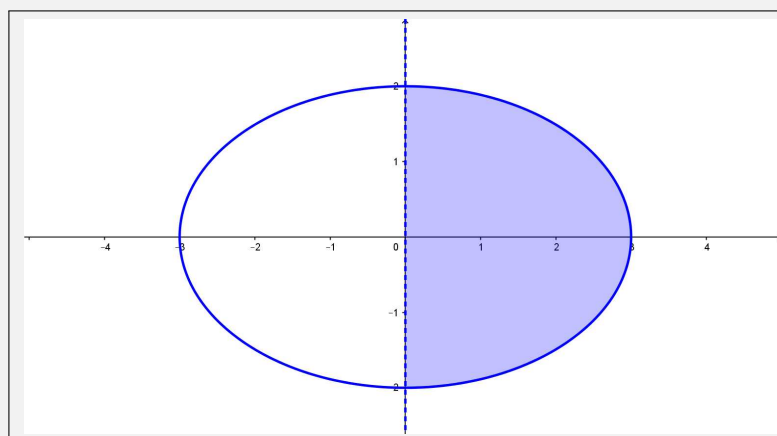



FIGURA 2. $4x^2 + 9y^2 \leq 36 \quad e \quad x \geq 0$

◀◀

Piano cartesiano:4.3

◀◀

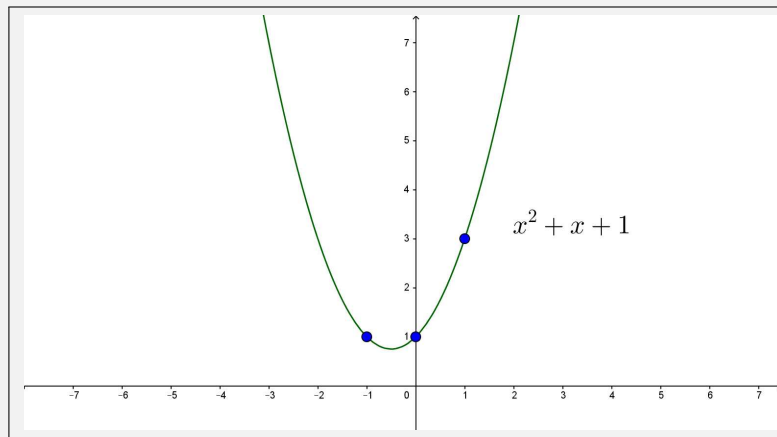



FIGURA 3. $y = x^2 + x + 1, \quad (1,3), \quad (-1,1), \quad (0,1)$

3. Sistemi lineari

Sistemi lineari : 1:1

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \to \quad x = 1,\ y = -2$$

◀◀

Sistemi lineari : 1:2

$$x = 3 - 2y \quad \to \quad 4(3-2y) - 5y = 6 \quad \to \quad y = \frac{6}{13}, \quad x = \frac{27}{13}$$

◀◀

Sistemi lineari : 1:3

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \to \quad x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$$

◀◀

Sistemi lineari : 2:1

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \det(\mathscr{A}) = -10$$

◀◀

Sistemi lineari : 2:2

$$\det(\mathscr{A}) = -2, \quad \det(\mathscr{B}) = 8$$

◀◀

Sistemi lineari : 2:3 $\quad 12(\sqrt{3} - 1)$.

◀◀

Sistemi lineari : 3:1

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{15} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{15} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{5}}{4}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{15} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

◀◀

Sistemi lineari : 3:2 Il determinante della matrice dei coefficienti vale $\lambda^2 - 1$, e si annulla quindi per $\lambda = 1$ e per $\lambda = -1$.

Per $\lambda = 1$ il sistema è indeterminato (le due equazioni coincidono).

Per $\lambda = -1$ il sistema è impossibile (le due equazioni si contraddicono).

◀◀

Sistemi lineari : 3:3 Le soluzioni sono $x_h = h$, $y_h = -h$. Il punto $(h, -h)$ appartiene al primo quadrante solo se $h = 0$.

◀◀

Sistemi lineari : 5:1

$$\mathscr{A}\,A = (2,0), \quad \mathscr{A}\,B = (1,-3), \quad \overline{\mathscr{A}\,A, \mathscr{A}\,B} = \sqrt{10}$$

◀◀

Sistemi lineari : 5:2 La matrice $\mathscr{A}$ trasforma i quattro punti $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ rispettivamente in $(0,0), (1,3), (3,7), (2,4)$. I quattro trasformati determinano un quadrilatero di area 2, uguale all'area del quadrato di partenza moltiplicato per $|\det(\mathscr{A})|$.

◀◀

Sistemi lineari : 5:3

L'insieme E è formato da 12 punti diversi, nel senso che essi si ripetono periodicamente:

0	U	$(1,0)$			
1	$\mathscr{A}^{[1]}U$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	7	$\mathscr{A}^{[7]}U$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
2	$\mathscr{A}^{[2]}U$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	8	$\mathscr{A}^{[8]}U$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3	$\mathscr{A}^{[3]}U$	$(0,1)$	9	$\mathscr{A}^{[9]}U$	$\{0,-1\}$
4	$\mathscr{A}^{[4]}U$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	10	$\mathscr{A}^{[10]}U$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
5	$\mathscr{A}^{[5]}U$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	11	$\mathscr{A}^{[11]}U$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
6	$\mathscr{A}^{[6]}U$	$(-1,0)$	12	$\mathscr{A}^{[12]}U$	$(1,0)$

Pertanto E è limitato.

◀◀

Sistemi lineari : 5.4:1 L'inversa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

◀◀

Sistemi lineari : 5.4:2

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathscr{B} = \mathscr{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

◀◀

Sistemi lineari : 5.4:3

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathscr{B} = \mathscr{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}\,.\,\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}\,.\,\mathscr{A}\,.\,\mathscr{B} = \mathscr{A}$$

$$\mathscr{A}\,.\,\mathscr{A}\,.\,\mathscr{A}\,.\,\mathscr{B} = \mathscr{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◀◀

Sistemi lineari : 6:1

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad p(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda) \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

◀◀

Sistemi lineari : 6:2

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$u_1 = (-1, 2) \quad u_2 = (0, 1)$$

◀◀

Sistemi lineari : 6:3 La matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ detta *unitaria* ha come autovettori tutti i vettori, quindi, in particolare anche i due verttori assegnati.

◀◀

4. Numeri complessi

Numeri complessi : 1:1

$$z = 3+4i \quad \to \quad |z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

◀◀

Numeri complessi : 1:2

$$z = 3\cos(4\pi/3) + 3\sin(4\pi/3)\,i \quad \to \quad \arg(z) = 4\pi/3$$

◀◀

Numeri complessi : 1:3

$$z = 5-\sqrt{3}i \quad \to \quad \overline{\overline{z}} = z = 5+\sqrt{3}i \quad \to \quad z\overline{z} = (5-\sqrt{3}i)(5+\sqrt{3}i) = 28$$

◀◀

Numeri complessi : 2:1

$$z_1 z_2 = (1-i)(1+i) = 2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = -i$$

◀◀

Numeri complessi : 2:2

$$z = i \quad \to \quad \{1, z, z^2, \dots\} = \{1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$$

L'insieme E è limitato.

◀◀

Numeri complessi : 2:3 La parte reale e la parte immaginaria degli z_n sono entrambe minori di 1 in modulo: quindi $|z_n| \leq \sqrt{1^2+1^2} \leq \sqrt{2}$.

Gli z_n formano un insieme limitato nel piano complesso.

◀◀

Numeri complessi : 3:1

$$z = e^{\ln(2)+i\pi/2} = e^{\ln(2)}\left(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)\right) = 2i$$

Ne segue $|z| = 2$, $\arg(z) = \pi/2$.

◀◀

Numeri complessi : 3:2

$$z = x+iy \quad \rightarrow \quad e^z = e^x(\cos(y)+i\sin(y))$$

e^z è un immaginario puro se $\cos(y) = 0$ e quindi per $z = x+(2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathscr{Z}$.

◀◀

Numeri complessi : 3:3 Tenuto conto che la distanza di un numero complesso dall'origine è il modulo del numero si ha:

$$|e^{1-2i}| = e, \quad |e^{-1+2i}| = e^{-1}$$

si riconosce che il secondo, e^{-1+2i} è quello più vicino all'origine.

◀◀

5. Successioni

Successioni : 1:1
I numeri a_n che formano la succsione sono tutti positivi e minori di 1, cioè $0 < a_n < 1$ quindi la successione è limitata.

◀◀

Successioni : 1:2

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{\cos(0\pi/4)}{1+0} &&= 1 \\ a_1 &= \tfrac{\cos(1\pi/4)}{1+1} &&= \tfrac{\sqrt{2}}{4} \\ a_2 &= \tfrac{\cos(2\pi/4)}{1+2} &&= 0 \\ a_3 &= \tfrac{\cos(3\pi/4)}{1+3} &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_4 &= \tfrac{\cos(4\pi/4)}{1+4} &&= -\tfrac{1}{5} \\ a_6 &= \tfrac{\cos(6\pi/4)}{1+6} &&= 0 \\ a_7 &= \tfrac{\cos(7\pi/4)}{1+7} &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

◀◀

Successioni : 1:3

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^{1} (-1)^k k = -1 & a_5 &= \sum_{k=1}^{5} (-1)^k k = -3 \\ a_2 &= \sum_{k=1}^{2} (-1)^k k = 1 & a_6 &= \sum_{k=1}^{6} (-1)^k k = 3 \\ a_3 &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^k k = -2 & a_7 &= \sum_{k=1}^{7} (-1)^k k = -4 \\ a_4 &= \sum_{k=1}^{4} (-1)^k k = 2 & a_8 &= \sum_{k=1}^{8} (-1)^k k = 4 \end{aligned}$$

◀◀

Successioni : 2:1
$a_n = 1 + \dfrac{1}{1+n^2} \quad \to \quad |a_n - 1| = \dfrac{1}{1+n^2}$ Tenuto presente che la frazione a secondo membro è infinitesima si riconosce che 1 è limite della $\{a_\}$.

Affinchè $|a_n - 1| \leq 0.1$ basta che $\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{10}$ ovvero basta che $1+n^2 \geq 10$ cosa che accade per $n \geq 3$.

◀◀

Successioni : 2:2
$a_n = \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Tenuto conto che $2/3 < 1$ si riconosce che $\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\}$ è infinitesima, cioè la sucvcessione $\{a_n\}$ ha limite $\ell = 0$.

$|a_n - \ell| \leq 0.1 \leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0.1$ cosa che accade se $n \log(3/2) \geq \log(10) = 2$, ovvero per $n \geq 2/\log(3/2)$.

◀◀

Successioni : 2:3
$a_n = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ successione evidentemente infinitesima.
Quindi $b_n = (-1)^n a_n \quad \to \quad |b_n| = a_n$ è infinitesima anch'essa... e quindi è infinitesima anche la $\{b_n\}$ stessa.

◀◀

Successioni : 3:1

$$a_n = \sqrt{n} - n \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{\sqrt{n}+n} = -\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 3:2

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0 \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 3:3

$$a_n = n - \frac{n^2}{1+n} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1 \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n a_n \quad \text{non} \quad \text{esiste} \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 7:1 $\qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - \sin(k)),\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \sin(1) \\ a_2 &= 2 - \sin(1) - \sin(2) \\ a_3 &= 3 - \sin(1) - \sin(2) - \sin(3) \\ a_4 &= 4 - \sin(1) - \sin(2) - \sin(3) - \sin(4) \\ a_5 &= 5 - \sin(1) - \sin(2) - \sin(3) - \sin(4) - \sin(5) \end{aligned}$$

La successione è monotona crescente infatti, per ogni n, a_{n+1} si ottiene aggiungendo ad a_n un addendo in più, $1 - \sin(n+1)$ certamente non negativo e quindi $a_n \leq a_{n+1}$.

◀◀

Successioni : 7:2

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{n+2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \to \quad a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}$$

I due fattori a numeratore crescono, quello a denominatore cala, quindi...è crescente.

◀◀

Successioni : 7:3

$$a_n = (-1)^n \frac{2^n}{1+3^n} \quad \to \quad |a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1$$

è limitata.

◀◀

Successioni : 8:1

$$|a_2 - e| \le |a_2 - b_2| = \tfrac{9}{8} \qquad = 1.125$$

$$|a_4 - e| \le |a_4 - b_4| = \tfrac{625}{1024} \qquad \approx 0.610$$

$$|a_{10} - e| \le |a_{10} - b_{10}| = \tfrac{25937424601}{100000000000} \qquad \approx 0.259$$

◀◀

Successioni : 8:2

$$\left(1+\frac{3}{n}\right) = \frac{n+3}{n+2}\,\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n+1}{n}$$

$$\left(1+\frac{3}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

I tre fattori a numeratore tendono tutti e tre a e, mentre i due a denominatotre tendono entrambi a 1.

◀◀

Successioni : 8:3

$$a_n = \frac{e^n}{1+e^n} = \frac{1}{\frac{1}{e^n}+1}$$

Il numeratore è 1 e il denominatore ha limite 1.

◀◀

Successioni : 8:4 $\quad a_n = 4 - 3\left(\dfrac{1}{2^n}\right)^n$:

- $a_n \in [5/2, 4]$ è limitata.
- $\left(\frac{1}{2^n}\right)^n$ è decrescente, quindi a_n è crescente,

quindi a_n è convergente ($a_n \to 4$)

◀◀

Successioni : 8:5 $\quad a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \quad \to \quad 0 \le a_n \le 1$: è limitata.

◀◀

Successioni : 8:6 $\quad a_n = (-1)^n n \quad \to \quad |b_n| = \dfrac{1}{n}$ è convergente ($b_n \to 0$).

◀◀

Successioni : 9:1

$$b_n = a_n - 2 \quad \to \quad a_n = b_n + 2 \quad \to \quad b_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(b_n + 2) - 1$$

Ne segue $b_1 = -1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$

◀◀

Successioni : 9:2 $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$

$$\begin{array}{llll} a_1 = \frac{1}{2} & & & \\ a_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = \frac{1}{2} & a_4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = \frac{1}{2} \\ a_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = \frac{1}{2} & a_5 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = \frac{1}{2} \end{array}$$

Ovviamente $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

◀◀

Successioni : 9:3
La successione $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n},$ è decrescente e limitata: quindi è convergente.
Detto ℓ il limite $a_{n+1} = \sqrt{a_n} \quad \to \quad \ell = \sqrt{\ell} \quad \to \quad \ell = 1$

◀◀

Successioni : 11:1

$$a_1 = 0,\ a_2 = 10,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} a_2 = 10 & = 10 & a_1 = 0 & = 0 \\ a_4 = \frac{15}{2} & = 7.5 & a_3 = 5 & = 5 \\ a_6 = \frac{55}{8} & = 6.875 & a_5 = \frac{25}{4} & = 6.25 \\ a_8 = \frac{215}{32} & = 6.71875 & a_7 = \frac{105}{16} & = 6.5625 \\ a_{10} = \frac{855}{128} & = 6.67969 & a_9 = \frac{425}{64} & = 6.64063 \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 11:2

$$\alpha_n = \frac{20}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 10, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Quindi la sucvcessione assegnata verifica la stessa relazione della precedente e le stesse condizioni iniziali: coincide quindi con essa.

◀◀

Successioni : 11:3

$$\rho^{n+2} = 3\rho^{n+1} - 2\rho^n \quad \to \quad \rho^2 = 3\rho - 2 \quad \to \quad \rho_1 = -2,\ \rho_2 = -1$$

◀◀

Successioni : 12:1

$$a_n = 1 + \frac{1}{1+n^2} \quad \to \quad |a_n - 1| = \frac{1}{1+n^2} \to 0 \quad \to \quad \ell = 1$$

$$|a_n - 1| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{10} \leftrightarrow n \geq 3$$

◀◀

Successioni : 12:2

$$|a_n| = \left| (-1)^n \frac{2^n}{1+3^n} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \leq 1$$

◀◀

Successioni : 12:3

$$a_n = \frac{2^n}{3^n} \to 0, \quad \forall n \geq 6 : \ |a_n - 0| \leq \frac{1}{10}$$

◀◀

Successioni : 12:4

$$a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \to \quad |b_n| = a_n \to 0$$

◀◀

Successioni : 12:5

$$a_n = \sqrt{n} - n \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 12:6

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0 \end{cases}$$

◀◀

Successioni : 12:7

$$a_n = \frac{2^n}{1+2^n} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{-n}} = 1$$

◀◀

Successioni : 12:8

vedi esercizio ▶▶

◀◀

Successioni : 12:9 Sia $a_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$:

- $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ è limitata, quindi lo è anche a_n
- $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ è decrescente, quindi a_n è crescente

a_n limitata e monotona è convergente.

◀◀

Successioni : 12:10

$$a_n = (-1)^n n \quad \to \quad |b_n| = \frac{1}{|(-1)^n n|} = \frac{1}{n}$$

◀◀

Successioni : 12:11 $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

◀◀

Successioni : 12:12

$$a_1 = 0,\ a_2 = 10,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \to \quad \begin{array}{ll} a_1 & = 0. \\ a_2 & = 10. \\ a_3 & = 5. \\ a_4 & = 7.5 \\ a_5 & = 6.25 \end{array}$$

◀◀

Successioni : 12:13

$$\alpha_n = \frac{20}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \to \quad a_1 = 0,\ a_2 = 10$$

e

$$\frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} = \frac{20}{3}\left(1 + (-1)^n\left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = a_n$$

◀◀

Successioni : 12:14 $\rho^{n+2} = 3\rho^{n+1} - 2\rho^n \quad \to \quad \rho^2 = 3\rho - 2 \quad \to \quad \rho_1 = 2,\ \rho_2 = 1$

◀◀

Successioni : 12:15

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 2a_n^2, \quad \to \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{2}$$

◀◀

Successioni : 12:16

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = a_n - 2 \leftrightarrow a_n = b_n + 2 \leftrightarrow b_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(b_n + 2) + 1 \quad \rightarrow \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

◀◀

6. Statistica

Statistica: 1:1 I multip'li di 2 sono 100 : 2, quelli di 3 sono 100 : 3 = 33, ecc.

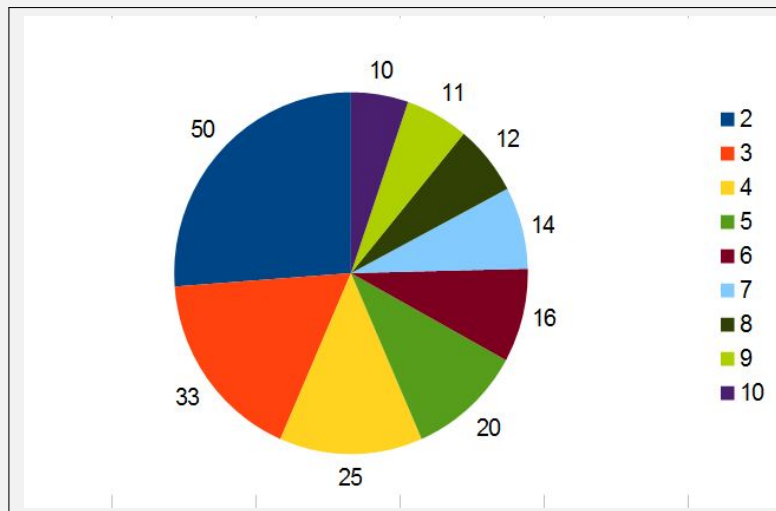



FIGURA 4. Numeri divisibili per 2, per 3, ecc.

◀◀

Statistica: 1:2 Vedi Figura 5, pagina 366.

◀◀

Statistica: 1:3 Vedi Figura 6, pagina 366.

◀◀

Statistica: 4:1

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{10} v_i}{10}, \quad \overline{m} = m \pm \frac{1}{10}$$

◀◀

Statistica: 4:2

$$m_{110} = \frac{110}{30} m_{30}$$

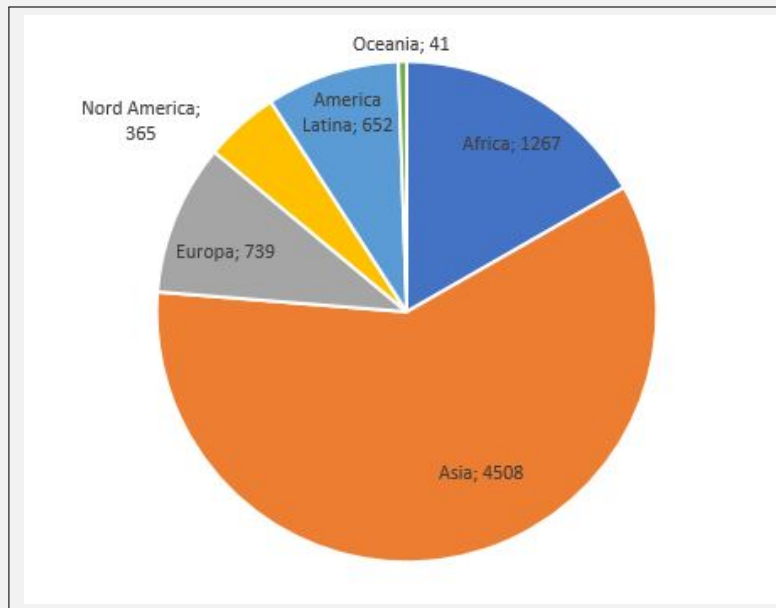



FIGURA 5. Popolazione mondiale in milioni

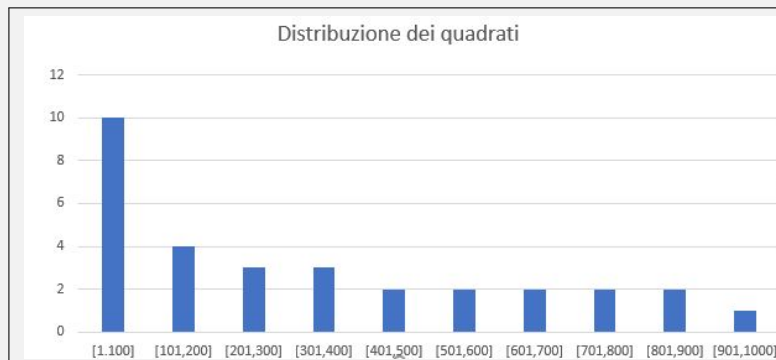



FIGURA 6. Distribuzione dei quadrati perfetti

Statistica: 4:3

$$S := \{2,4,1,6,3,7,4,9,1,0\} \quad \to \quad m = 3.7 \quad \to \quad \overline{S} = \{2-m, 4-m, \dots, 0-m\}$$

Statistica: 5:1 La moda è la classe $[1,100]$ che ha frequenza 50.

Statistica: 5:2 I cubi perfertti che appartengono ai 10 intervalli sono rispettivamente 4, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

La moda è la classe $[1,100]$ che ha frequenza 4.

◀◀

Statistica: 5:3 I resti possibili sono i numeri $\{0,1,2,\dots,14\}$ le frequenze diverse da zero sono

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(4) = 3,\ f(6) = 2,\ f(9) = 1,\ f(10) = 2$$

◀◀

Statistica: 6:1

$$A = \{0,1,8\}\ m_A = 3, Me_A = 1, \quad B = \{0,9,0\}\ m_B = 3, ME_B = 9$$

◀◀

Statistica: 6:2

$$m = Me$$

◀◀

Statistica: 6:3

$$Me(\rho S) = \rho\, Me(S)$$

◀◀

Statistica: 7:1

$$S := \{1,2,3,\dots,10\}\ m = 5.5,\ \sigma = 2.87$$

Statistica normalizzata: -1.56, -1.22, -0.87, -0.52, -0.17, 0.17, $0.52.0.87$, 1.22, 1.56.

◀◀

Statistica: 7:2

$$\sigma(2S) = 2\sigma(S)$$

◀◀

Statistica: 7:3

$$S := \{2,\ 4,\ 6,\ \dots,\ 100\}\ E(S) = 51,\ E(S^2) = 3434,\ Var(S) = 833$$

◀◀

7. Calcolo combinatorio

Calcolo combinatorio: 1:1 $n = 9, \quad k = 3, \quad D_{9,3} = 9 \times 8 \times 7 = 504.$

◀◀

Calcolo combinatorio: 1:2 $n = 3 \times 3 = 9, \quad k = 9, D_{9,9} = 9! = 362880$
$n = 7 \times 6 = 42, \quad k = 42, D_{42,42} = 42! = 1,4 * 10^{51}$

◀◀

Calcolo combinatorio: 1:3 **matematica**: 10 lettere, una, la *a*, ripetuta tre volte, la *m* e la *t* ripetute due volte.

Quindi il numero di permutazioni è

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!} = 151200$$

◀◀

Calcolo combinatorio: 3:1 I ministri sono uno per ognuno dei 27 stati dell'Unione: $n = 27, \quad k = 2, \quad C_{27,2} = \binom{27}{2} = 351$ strette di mano.

◀◀

Calcolo combinatorio: 3:2 $n = 90, \quad k = 3, \quad C_{90,3} = \binom{90}{3} = 117480.$

◀◀

Calcolo combinatorio: 3:3 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$

◀◀

Calcolo combinatorio: 4:1 $n = 10, \quad k = 3, \quad DR_{10,3} = 10^3.$

◀◀

Calcolo combinatorio: 4:2 $n = 3, \quad k = 4, \quad CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15.$

◀◀

Calcolo combinatorio: 4:3 $DR_{22,2} \times DR_{10,3} \times DR_{22,2} = 22^2 \times 10^3 \times 22^2 = 234256000$, si possono quindi targare oltre 234 milioni di vetture...!

◀◀

8. La probabilità

Probabilita: 1:1

$$p = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

◀◀

Probabilita: 1:2

$$p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

◀◀

Probabilita: 1:3

$$p = \left(\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

◀◀

Probabilita: 2:1 $p(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

◀◀

Probabilita: 2:2 36 possibili prodotti, dei quali 27 sono pari, quindi $p = 27/36$.

◀◀

Probabilita: 2:3 216 possibili cadute, 160 di esse danno una somma ≤ 12, e quindi 56 danno una somma superiore, che pertanto ha probabilità $p = 56/216$.

◀◀

Probabilita: 3:1

$$p(n) = 0.6 = \frac{n}{10+n} \quad \rightarrow \quad n = 15$$

◀◀

Probabilita: 3:2

$$\frac{r}{r+b+v} = 0.40, \ \frac{b}{r+b+v} = 0.35, \ \frac{v}{r+b+v} = 0.25, \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad r = 40k, \ b = 35k, \ v = 25k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

◀◀

Probabilita: 3:3

$$p(\{1,2,3\}) = \frac{\binom{90}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0,0026 \approx \%0.2$$

◀◀

Probabilita: 4:1

$$p(0)+p(1)+p(2)+p(3) = \frac{1}{2^3}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i} = \frac{1}{2^3}(1+1)^3 = 1$$

◀◀

Probabilita: 4:2

$$p(r) = \frac{30}{75}, \ p(b) = \frac{20}{75}, \ p(r \cup b) = \frac{30+20}{75}, = \frac{2}{3}$$

◀◀

Probabilita: 4:3

$$p(r \cup c \cup f) = \frac{12}{40} = 0.3$$

◀◀

Probabilita: 5:1

$$p(6) = \frac{1}{6}$$

◀◀

Probabilita: 5:2

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

◀◀

Probabilita: 5:3

$$p(T \cup \{2,4,6\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

◀◀

Probabilita: 6:1 $p(k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \binom{5}{k} \quad \rightarrow$

0	$\frac{1}{32}$	3	$\frac{5}{16}$
1	$\frac{5}{32}$	4	$\frac{5}{32}$
2	$\frac{5}{16}$	5	$\frac{1}{32}$

◀◀

Probabilita: 6:2 $p(k) = \binom{5}{k} \frac{1}{4^k} \frac{3^{5-k}}{4^{5-k}} \quad \rightarrow$

0	$\frac{243}{1024}$	3	$\frac{45}{512}$
1	$\frac{405}{1024}$	4	$\frac{15}{1024}$
2	$\frac{135}{512}$	5	$\frac{1}{1024}$

◀◀

Probabilita: 6:3

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^{5} k\, p(k) = \frac{5}{4}$$

$$V = \sum_{k=0}^{5} (k - frac54)^2\, p(k) = \frac{15}{16}$$

◀◀

9. Limiti

Limiti: 1:1 $\dfrac{5+7x^2}{1+x^2} = \dfrac{5/x^2+7}{1/x^2+1} \rightarrow 7.$

◀◀

Limiti: 1:2 $\left|\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2} \rightarrow 0 =$

◀◀

Limiti: 1:3 $1 + \dfrac{x}{1+x} = 1 + \dfrac{1}{1/x+1} \rightarrow 1+1 = 2$

◀◀

Limiti: 2:1 $f(x) = \dfrac{3x+x^3}{1+x+x^2+2x^3} = \dfrac{3/x^2+1}{1/x^3+1/x^2+1/x+2} \to \dfrac{1}{2}.$

◀◀

Limiti: 2:2 $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} \to 1.$

◀◀

Limiti: 2:3 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2} \nexists.$

◀◀

Limiti: 3:1 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-3x^3+1) = \lim\limits_{x\to\infty} x^4(1-3/x+1/x^4) = +\infty.$

◀◀

Limiti: 3:2 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4}{e^{-x}} \le \dfrac{x^4}{x^6/6!} \to 0.$

◀◀

Limiti: 3:3 $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\,\log(x-1) = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{1/2}\log(t) = 0.$

◀◀

10. Polinomi,...

Polinomi: 1:1 $f(x) = 3x^2+1$ è pari, $g(x) = 2x^3-1$ non è nè pari nè dispari, $g(x)+g(-x) \equiv -2$ è costante, quindi anche pari.

◀◀

Polinomi: 1:2 $f(x) = 1-x, \quad g(x) = f(x)+x(x-1)(x-2).$

◀◀

Polinomi: 1:3

$$\sum_{k=-3}^{3} f(k) = (-9+5)+(-6+5)+(-3+5)+5+(3+5)+(6+5)+(9+5) = 35$$

◀◀

Polinomi: 2:1 vedi Figura 7.

◀◀

Polinomi: 2:2 vedi Figura 8.

◀◀

Polinomi: 2:3 vedi Figura 9.

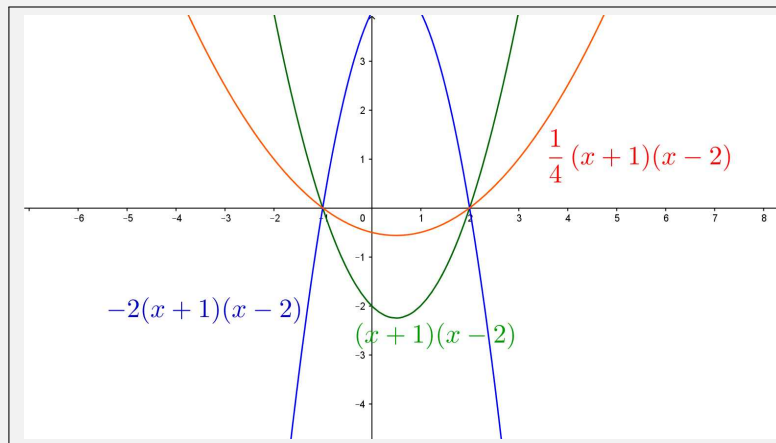



FIGURA 7. $f(x) = \lambda(x+1)(x-2)$

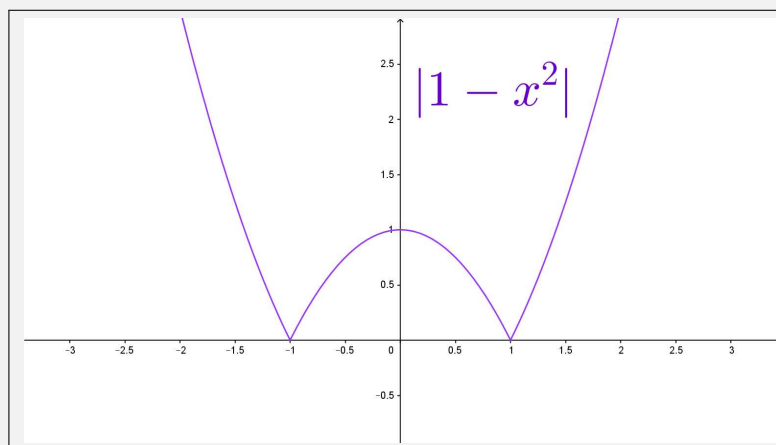



FIGURA 8. $|1-x^2|$

Polinomi: 4:1

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2+x}{1+x^2}, \\ g(x) = 1+x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f[g(x)] = \dfrac{2+(1+x)}{1+(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{2+2x+x^2} \\ \\ g[f(x)] = 1 + \dfrac{2+x}{1+x^2} = \dfrac{3+x+x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

Polinomi: 4:2 $f(x) = 3x^2, x_0 = 1/10 \quad \to \quad E = \{f^{(k)}(x_0)\} = \{\frac{3}{100}, \frac{3^3}{10^4}, \frac{3^7}{10^8}, \dots\}$
$E = \{\dfrac{3^{2^k-1}}{10^{2^k}}\}$. $E = \{\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{2^k-1}\} \subset (0, 0.1)$ è limitato.

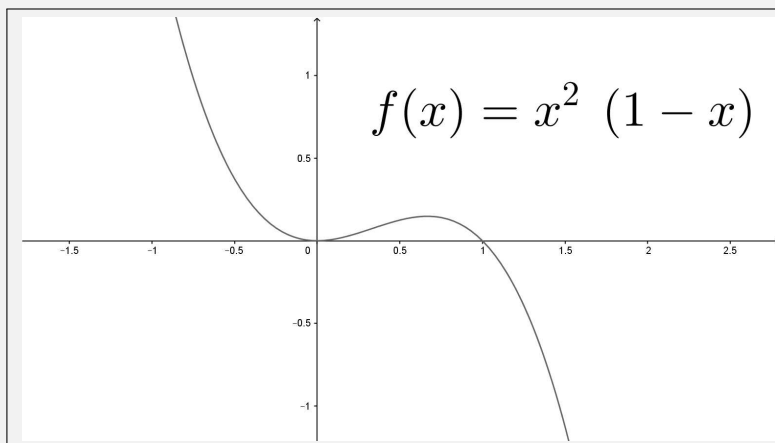



FIGURA 9. $f(x) = x^2(1-x)$

◀◀

Polinomi: 4:3 $f[g(x)] = a(mx+p)+b = g[f(x)] = m(ax+b)+p \quad \to \quad ap+b = mb+p$

Quattro valori possibili sono, ad esempio, $a = 2$, $b = 3/2$, $m = 3$, $p = 3$.

◀◀

Polinomi: 5:1 $1+(1-x^2)^2 = k \quad \to \quad (1-x)^2 = k-1 \quad \to \quad x = 1 \pm \sqrt{k-1}$.
L'equazione ha soluzioni per $k \geq 1$.

◀◀

Polinomi: 5:2 $f(x) = x^3+1 \quad \to \quad x^3+1 = y \quad \to \quad x = \sqrt[3]{y-1} \quad \to$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

◀◀

Polinomi: 5:3 $f(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad \to \quad \dfrac{1}{1+x} = y \quad \to \quad x = \dfrac{1}{y} - 1$ l'equazione ha soluzione per $y \neq 0$.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

◀◀

Polinomi: 6:1 $P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = -1, \quad P(3) = 4 \quad \to \quad P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.

$$\begin{cases} P(0) = 1 & \to & d & = 1 \\ P(1) = 2 & \to & a+b+c+d & = 2 \\ P(2) = -1 & \to & 8a+4b+2c+d & = -1 \\ P(3) = 4 & \to & 27a+9b+3c+d & = 4 \end{cases} \quad P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x + 1$$

◂◂

Polinomi: 6:2 $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx$.

◂◂

Polinomi: 6:3

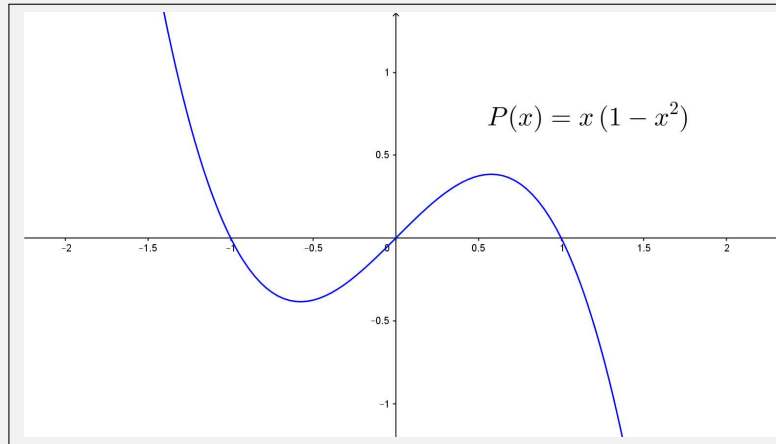



FIGURA 10. $P(x) = x(1-x^2)$

◂◂

Polinomi: 7:1 $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $Q(x) = x^2 + x + 1 \quad \rightarrow$

$$P(x) = (x^2 + x + 1)\,q(x) + R(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} q(x) = x \\ R(x) = 1 \end{cases}$$

◂◂

Polinomi: 7:2 $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$

◂◂

Polinomi: 7:3 $f(x) = \dfrac{3+2x}{1+x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f[g(x)] = \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{3x^2+2x}{x^2+1}, \qquad g[f(x)] = \frac{1+x^2}{3+2x}$$

◂◂

Polinomi: 8:1 $\dfrac{1+x}{x^2-5x+6} = \dfrac{1+x}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2}$

$$A(x-2) + B(x-3) = 1 + x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A + B &= 1 \\ -2A - 3B &= 1 \end{cases}$$

$$\frac{1+x}{x^2-5x+6}=\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

◀◀

Polinomi: 8:2 $\frac{1+x}{1-x^2}=\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{\cancel{1+x}}{(1-x)\cancel{(1+x)}}=\frac{1}{1-x}$

◀◀

Polinomi: 8:3 $\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}$

$$A(1-x)(1+x^2)+B(1+x)(1+x^2)+(Cx+d)(1-x)(1+x)\equiv 1$$

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}$$

◀◀

Esponenziali: 1:1

$$\frac{6x^{-3}y^2}{12x^{-4}y^5}=\frac{\left(2x^{2/3}\right)^3}{\left(4x^{-1/3}\right)^2}=\frac{\left(x^3y^{-1}\right)^2}{\left(xy^2\right)^{-2}}$$

◀◀

Esponenziali: 1:2 $S(t)=500\times e^{0.055\,t}:S(5)=500\times e^{0.055\,5}=658,\quad S(10)=500\times e^{0.055\,10}=867$

◀◀

Esponenziali: 1:3

$$pOH=-\log_{10}(1.04\times 10^{-5})=4.98,\quad pOH+ph=14\quad\rightarrow\quad pH=9.01$$

◀◀

Logaritmi: 2:1

$$\pi^2\ =\pi\times\pi\approx 3.14\times 3.14\approx 9,86$$

$$\pi^{-1}\ =\frac{1}{\pi}\approx\frac{1}{3.14}=0.32$$

$$\pi^e\ \in[3.14^2,3.14^3]\approx[9.86,30,96]\qquad\rightarrow\qquad\pi^e\approx 20.41$$

$$e^\pi\ \approx 2.71^{3.14}\in[2.71^3,2.71^4]\qquad\rightarrow\qquad e^\pi\approx 36.92$$

I valori proposti si riferiscono semplicemente al valor medio degli intervalli osservati.

◀◀

Logaritmi: 2:2 Calcolare i logaritmi in base 10 dei valori calcolati nell'esercizio precedente.

$$\log_{10}(\pi^2) = 2\,\log_{10}(\pi) \approx 0,9942, \quad \log_{10}(\pi^{-1}) = -\,\log_{10}(\pi) \approx -0,4971,$$
$$\log_{10}(\pi^e) = e\,\log_{10}(\pi) \approx 1,3514, \quad \log_{10}(e^\pi) = \pi\,\log_{10}(e) = \approx 1,3644$$

◀◀

Logaritmi: 2:3 Disegnare il grafico delle tre funzioni $2x$, e^{2x}, $\log(2x)$

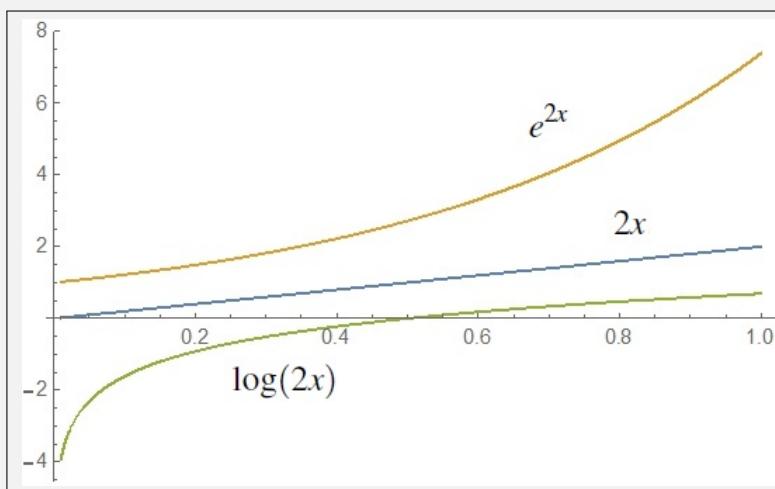



FIGURA 11. $2x$, e^{2x}, $\log(2x)$

◀◀

Logaritmi: 2.5:1

$$k = A\,e^{-\frac{E_q}{RT}} \quad \rightarrow \quad \ln(k) = \ln(A) - \frac{E_q}{RT}$$

◀◀

Logaritmi: 2.5:2

$$A(t) = 500\,e^{0,055\,t}, \quad B(t) = 750\,e^{0.04\,t} : \ln(A(t)) = \ln(B(t)) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0.015\,t = \ln(750) - \ln(500) \quad \rightarrow \quad t \approx 27.031$$

◀◀

Logaritmi: 2.5:3

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^x = 2 & \rightarrow \quad x = \ln(2) \\ e^x = 3 & \rightarrow \quad x = \ln(3) \end{cases}$$

◀◀

11. Funzioni goniometriche

Funzioni goniometriche: 4:1

$$\sum_{k=0}^{4} \sin(k\pi/4) = \sin(0) + \sin(\pi/4) + \sin(\pi/2) + \sin 3\pi/4) + \sin(\pi) = 1 + \sqrt{2}$$

◀◀

Funzioni goniometriche: 4:2

$$\sum_{k=0}^{9} \cos(k\pi) = \cos(0) + \cos(\pi) + \cdots + \cos(9\pi) = 1 - 1 + \cdots - 1 = -1$$

◀◀

Funzioni goniometriche: 4:3

$3\cos^2(x) + 2\sin^2(x) + \cos(x) = 2 \leftrightarrow \cos^2(x) + 2 + \cos(x) = 2 \leftrightarrow \cos(x)\,(\cos(x) + 1) = 0$

Da cui $\cos(x) = 0$ o $\cos(x) = -1$ e quindi $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 3\pi/2$ e, naturalmente tutti i numeri che differiscono da essi per multipli di 2π.

◀◀

12. Limiti

Limiti: 1:1

◀◀

Limiti: 1:2

◀◀

Limiti: 1:3

◀◀

Limiti: 2:1

◀◀

Limiti: 2:2

◀◀

Limiti: 2:3

◀◀

Limiti: 3:1

◀◀

Limiti: 3:2

◀◀

Limiti: 3:3

◀◀

13. Funzioni continue

Funzioni continue: 1:1

$$x \in [0,2]: \quad |x^3 - 1| = |x-1|\,|x^2+x+1|\,|x-1| \le 7\,|x-1|$$

pertanto

$$|x-1| \le \frac{0.1}{7} \quad \to \quad |x^3-1| \le 0.1$$

◀◀

Funzioni continue: 1:2 La funzione parte intera è discontinua sugli interi, quindi $f(x) = [3x+1]$ è discontinua se $3x+1$ 1è un intero, ovvero se $3x$ è intero, ovvero se $x = n/3$ con n intero.

◀◀

Funzioni continue: 1:3

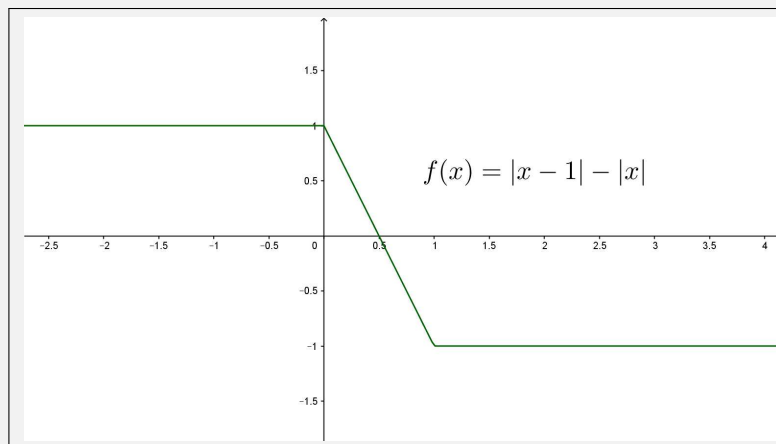



FIGURA 12. $f(x) = |x-1| - |x|$

◀◀

Funzioni continue: 2:1 $f(x) = 10 - x^3 \ge 0 \quad \to \quad 10 \ge x^3 \quad \to \quad \sqrt[3]{10} \ge x$: sicuramente basta che x non si allontani da 0 per più di $\sqrt[3]{10}$.

◀◀

Funzioni continue: 2:2 $f(x) = 1 + \text{sign}(x) > 0 \quad \to \quad x \geq 0$: non esiste un allontanamento di x dallo 0 che garantisca che $f(x)$ rimanga positiva. La f data non è continua in $x_0 = 0$.

◀◀

Funzioni continue: 2:3 $d(x) = g(x) - f(x) = 2x + 1 - x^2$, tale differenza $d(x)$ è una funzione continua e si ha $d(1) = 2$.

$$|d(x) - d(1)| = |d(x) - 2| = |x^2 - 2x + 1| = (x-1)^2$$

Quindi

$$|x-1| < \sqrt{2} \quad \to \quad |d(x) - 2| < 2 \quad \to \quad d(x) > 0 \quad \to \quad g(x) > f(x)$$

◀◀

Funzioni continue: 3:1

$$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| = 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right|$$

Tenuto conto che $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq 1$ si ha dalla precedente

$$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

e quindi

$$|x_1 - x_2| \leq 0.5 \quad \to \quad |\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq 0.5$$

◀◀

Funzioni continue: 3:2 $f(x) = 1 + x^2 \quad \to \quad f(n+1) - f(n) = 2n + 1$:

$$\begin{array}{llll} f(1) - f(0) & = 1 & f(6) - f(5) & = 11 \\ f(2) - f(1) & = 3 & f(7) - f(6) & = 13 \\ f(3) - f(2) & = 5 & f(8) - f(7) & = 15 \\ f(4) - f(3) & = 7 & f(9) - f(8) & = 17 \\ f(5) - f(4) & = 9 & f(10) - f(9) & = 19 \end{array}$$

◀◀

Funzioni continue: 3:3

Le pendenze nel grafico sono limitate, e raggiungono i valori massimi in valore assoluto in corrispondenza di ± 0.5. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è uniformemente continua. Grafico a pagina 380.

◀◀

Funzioni continue: 4:1 $f(x) = \dfrac{\sqrt{16 + x^2}}{1 + x^2}, \quad f(0) = 4, \quad f(3) = 0.5.$

Il teorema dei valori intermedi garantisce che

$$\forall k \in [0.5, 4] \; \exists c_k \in [0, 3] \quad f(c_k) = k$$

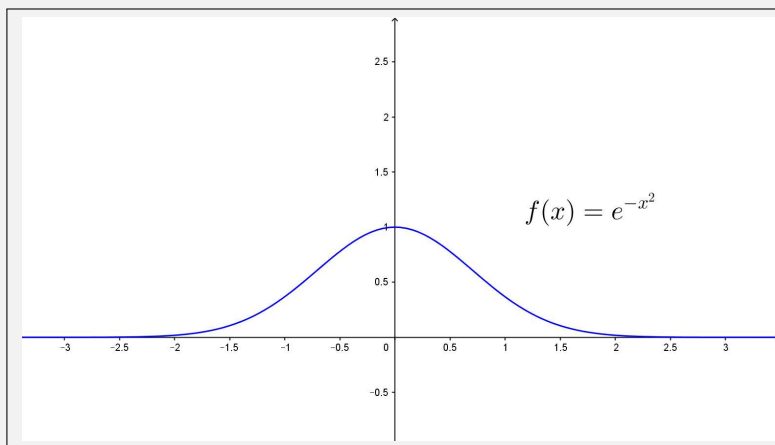



FIGURA 13. $f(x) = e^{-x^2}$

◀◀

Funzioni continue: 4:2

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\pi/2} \tan(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x\to +\pi/2} \tan(x) = +\infty \end{cases} \quad \to \quad \forall k \in \mathbb{R}\ \exists c_k \in (-\pi/2, \pi/2) \quad f(c_k) = k$$

La soluzione è $c_k = \arctan(k)$.

◀◀

Funzioni continue: 4:3

$$f(x) = x(1-x), \quad f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(0.5) = 0.25 \notin [f(0), f(1)]$$

◀◀

Funzioni continue: 5:1 Dividendo quattro volte $[0,1]$ a metà si arriva a intervallini di lunghezza $1/16$: la sequenza delle scelte è la seguente $[0,1] \to [0.5,1] \to [0.5,0.75] \to [0.625,0.75] \to [0.625,0.6875]$.

◀◀

Funzioni continue: 5:2 Dividendo quattro volte $[-1,0]$ a metà si arriva a intervallini di lunghezza $1/16$: la sequenza delle scelte è la seguente $[-1,0] \to [-1,-0.5] \to [-0.75,-0.5] \to [-0.63,-0.5] \to [-0.63,-0.56]$.

◀◀

Funzioni continue: 5:3 Dividendo quattro volte $[1,2]$ a metà si arriva a intervallini di lunghezza minore di 0.1: la sequenza delle scelte è la seguente $[1,2] \to [1,1.5] \to [1.25,1.5] \to [1.38,1.5] \to [1.38,1.44]$.

◀◀

Funzioni continue: 6:1 $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}, \quad \to \quad f(x) = |x|$

◀◀

Funzioni continue: 6:2 $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)} \quad \to \quad \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \forall n \neq 0 : \nexists \lim_{x\to n\pi} f(x).$

◀◀

Funzioni continue: 6:3 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \to \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

◀◀

Funzioni continue: 7:1 $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2} \quad \to \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

◀◀

Funzioni continue: 7:2 $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = 1 - e^{1-x^2} : M_f = f(0) = 1, \quad m_g = g(0) = 1 - e.$

◀◀

Funzioni continue: 7:3 $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad \exists m_f, \exists M_f$

◀◀

14. Derivate

Derivate: 2:1 $f(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad \to \quad \dfrac{f(1+0.5) - f(1)}{0.5} = \dfrac{\frac{1}{1+(1+0.5)} - \frac{1}{1+1}}{0.5} = 0.2$

◀◀

Derivate: 2:2 $f(x) = 1 + x^3, \quad x_0 = 1, \Delta = 0.5 \quad \to$
$f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = 2.375, \quad df = 1.1875$

◀◀

Derivate: 2:3 $f(x) = 17x^{13} - 13x^{17} \quad \to \quad f'(x) = 13 * 17(x^{12} - x^{16})$
$\to \quad f'(1) = 0$

◀◀

Derivate: 3:1 $f(x) = x(1-x^2) \quad \to \quad y = f(1) + f'(1)(x-1) \quad \to \quad y = -2(x-1)$

◀◀

Derivate: 3:2 $f(x) = x(1-x^2) \quad \to \quad f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - 3x^2 = 0 \quad \to \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

◀◀

Derivate: 3:3 $f(x) = x(1-x^2) \quad \to \quad f'(x) = 1 \quad \to \quad x = 0$

◀◀

Derivate: 4:1 $f(x)=\sqrt{|x|} \quad \to \quad \dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ Non esiste il limite per $h \to 0$.

◀◀

Derivate: 4:2

$$f(x)=\sqrt{|\sin(x)|}: \quad \frac{\sqrt{|\sin(n\pi+h)|}-\sqrt{|\sin(n\pi)|}}{h}=$$

$$\frac{\sqrt{|\sin(h)|}}{h}=\frac{1}{\sqrt{|h|}}\sqrt{\frac{|\sin(h)|}{|h|}}\approx\frac{1}{\sqrt{|h|}}$$

Non esiste il limite per $h \to 0$.

◀◀

Derivate: 4:3

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0^-}\dfrac{h^2}{h}=0 \\ \\ \lim_{h\to 0^+}\dfrac{h^2+ah}{h}=a \end{cases}$$

f è derivabile nell'origine se e solo se $a=0$ e, in tal caso si ha $f'(0)=0$.

◀◀

Derivate: 5:1

$$f(x)=\frac{1+x}{1+2x} \quad \to \quad f'(x)=-\frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$f'(1)=-\frac{1}{9}, \quad f'(2)=-\frac{1}{25}, \quad f'(3)=-\frac{1}{49}$$

◀◀

Derivate: 5:2

$$f(x)=(1+2x)^3\,(3-2x)^2$$

$$f'(x)=2(2x+1)^2\left(20x^2-44x+21\right) \quad \to \quad f'(0)=42$$

◀◀

Derivate: 5:3

$$f'(x)=-\frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3-3x^2-2x-1}{(x^4+1)^2} \quad \to \quad f'(-1)=1$$

◀◀

Derivate: 6:1

$f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) = \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \equiv 1 \quad \to \quad f'(x) \equiv 0$

◀◀

Derivate: 6:2 $\quad f(x) = \cos(x)\tan(x) = \dfrac{\cancel{\cos(x)}\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}} = \sin(x) \quad \to \quad f'(x) = \cos(x).$

◀◀

Derivate: 6:3 $\quad f(x) = e^x + e^{-x} \quad \to \quad f'(x) = e^x - e^{-x}.$

◀◀

Derivate: 8:1

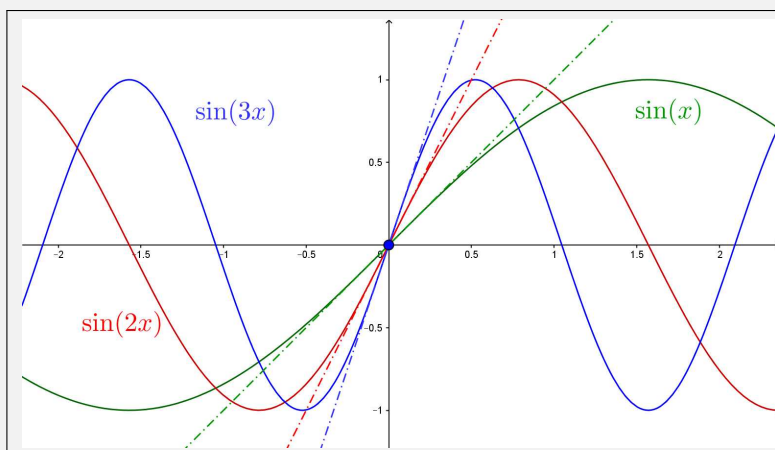



FIGURA 14. $y = x, y = 2x, y = 3x$

◀◀

Derivate: 8:2 $\quad f(x) = x e^{-x^2} \quad \to \quad f'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) \quad \to \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

◀◀

Derivate: 8:3 $\quad f(x) = \dfrac{3+x}{2x+1},\ f(0) = 3 \quad \to \quad f^{-1}(3) = \dfrac{1}{f'(0)} = -\dfrac{1}{5}$

◀◀

15. Massimi e/o minimi locali interni

Massimi e/o minimi: 1:1

$$f(0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ 1 - x^2 \leq 1 \quad \to \quad 1 = \max f$$
$$f'(x) = -2x, \quad f'(0) = 0$$

Il grafico è quello di una parabola rivolta verso il basso.

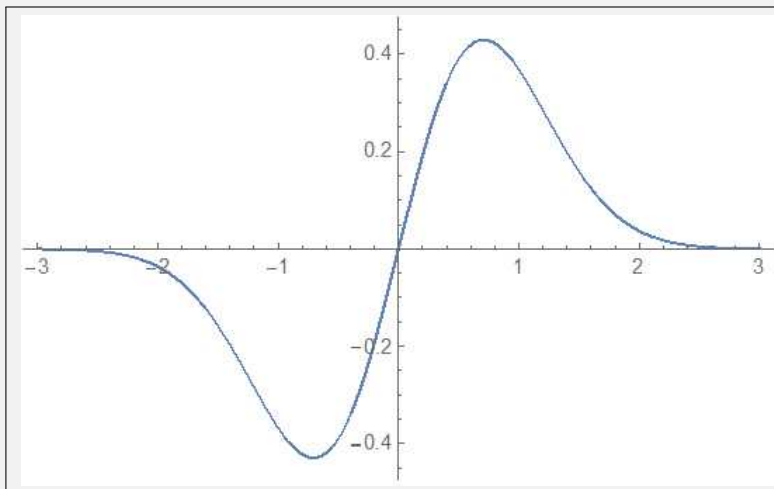



FIGURA 15. $f(x) = xe^{-x^2}$

◀◀

Massimi e/o minimi: 1:2

$$\forall x < 0: \; 1 - x^3 > 1, \quad \forall x > 0: \; 1 - x^3 < 1$$

quindi $1 = f(0)$ non è il massimo.

$$f'(x) = -3x^2, \quad f'(0) = 0$$

La retta tangente in $x_0 = 0$ è la retta orizzontale $y = 1$.

◀◀

Massimi e/o minimi: 1:3

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; \cos^2(x) \leq 1 \quad \to \quad 1 - \cos^{(}x) \geq 0 \quad \to \quad \sqrt{1 - \cos^2(x)} \geq 0$$

quindi $0 = f0)$ è il valore minimo.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} \quad \to \quad f(0) = 0$$

◀◀

Massimi e/o minimi: 2:1

$$\begin{cases} x < 0 & f(x) = -x^3 & f'(x) = -3x^2 \\ x = 0 & f(0) = 0 & f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2|h|}{h} = 0 \\ x > 0 & f(x) = x^3 & f'(x) = 3x^2 \end{cases}$$

◀◀

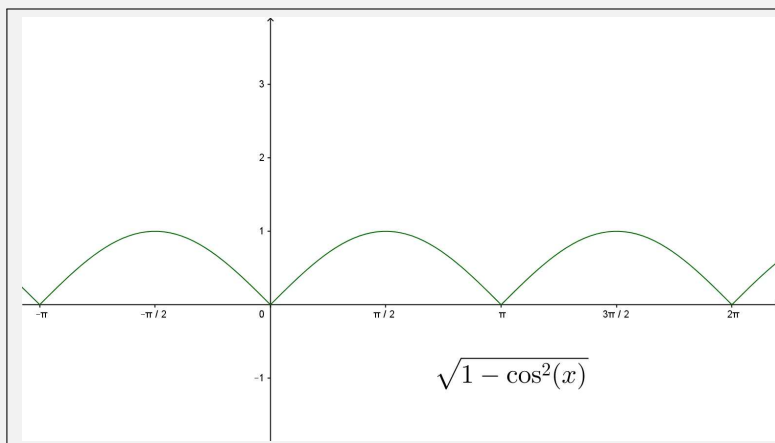



FIGURA 16. $\sqrt{1-\cos^2(x)}$

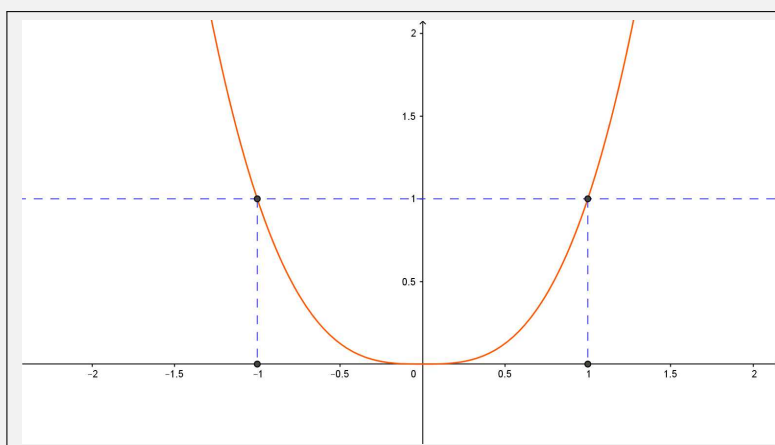



FIGURA 17. $x^2\,|x|$

Massimi e/o minimi: 2:2

$$f(x)=x(x-1)(e^{x^2}+e^{-x^2}) \quad \to \quad \begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=0 \end{cases} \quad \to \quad \exists c\in[0,1]:\ f'(c)=0$$

◀◀

Massimi e/o minimi: 2:3 $f(x)$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$: infatti

$$\begin{cases} x<0 & f(x)=x(1+x) & \to & f'(x)=1+2x \\ x=0 & f(0)=0 & \to & \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=1 \\ x>0 & f(x)=\sin(x) & \to & f'(x)=\cos(x) \end{cases}$$

$$f(-1)=0,\quad f(\pi)=0 \quad \to \quad \exists c\in[-1,\pi]:\ f'(c)=0$$

◀◀

Massimi e/o minimi: 2:1

$$f(x) = x\,e^{-x} \quad \to \quad f'(x) = (1-x)\,e^{-x} \quad \to \quad x_0 = 1$$

Il punto $x_0 = 1$ è l'unico punto stazionario: $f(1) = 1/e$ è il massimo.

◀◀

Massimi e/o minimi: 2:2

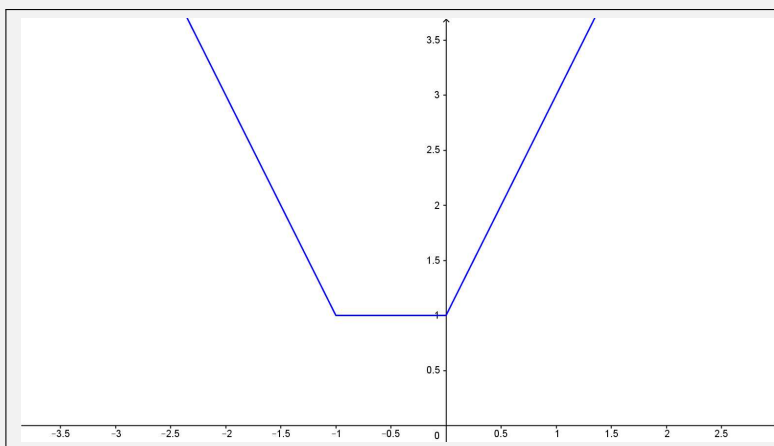



FIGURA 18. $|x| + |x+1|$

I punti dell'intervallo $[-1, 0]$ sono tutti punti di minimo: la funzione vale in tutti tali panti il valore 1 che è il minimo.

◀◀

Massimi e/o minimi: 2:3

$$f(x) = e^{|1-x^2|}: \quad f(-1) = f(1) = 1, \quad \textit{minimo}$$

◀◀

16. I teoremi del Calcolo

Detta $f(x) = x^2\,|x|$ riconoscere che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, che $f(-1) = f(1)$ e che quindi la derivata f' si annulla in (almeno) un punto.

◀◀

Detta $f(x) = x\,(x-1)\,(e^{x^2} + e^{-x^2})$ riconoscere che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette almeno una radice $x_0 \in [0, 1]$.

◀◀

Detta

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x) & se \quad x \leq 0 \\ \sin(x) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

riconoscere che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette almeno una radice $x_0 \in [-1, \pi]$.

◀◀

I teoremi del Calcolo: 2:1

$$f(n+1) - f(n) = \{(n+1) - n\} f'(\xi_n) \quad \to \quad f(n+1) - f(n) = 2\,\xi_n$$

Si ha quindi

$$2n + 1 = 2\,\xi_n \quad \to \quad \xi_n = n + \frac{1}{2}$$

◀◀

I teoremi del Calcolo:2:2

$$f(1) - f(-2) = (1 - (-2))\, f'(c) \quad \to \quad -6 = 3(1 - 3c^2): \; c = -1$$

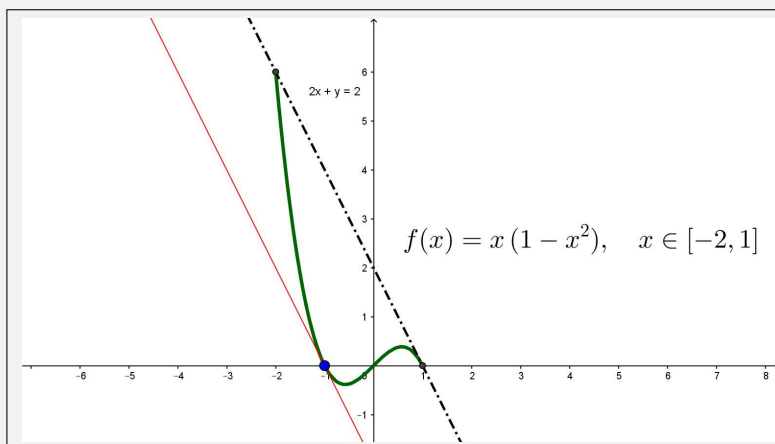



FIGURA 19. $x(1-x^2)$, $x \in [-2, 1]$

◀◀

I teoremi del Calcolo: 2:3

$$\forall x \in [0, 10]: \; |f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| = 1 + x\, f'(c) \leq 1 + 2x$$

◀◀

I teoremi del Calcolo: 3:1

$$f'(x) = 1 + e^{-x} \geq 1 \quad \to \quad f(x) \nearrow$$

◀◀

I teoremi del Calcolo:3:2

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x)^2} \quad x \le 0 \quad \to \quad f(x) \nearrow$$

◀◀

I teoremi del Calcolo: 3:3 La funzione $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$ ha derivata

$$f'(x) = 3\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x > 1 \quad \to \quad f'(x) \searrow$$

quindi la successione $f(n)$ è monotona decrescente.

◀◀

I teoremi del Calcolo: 4:1

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

◀◀

I teoremi del Calcolo:4:2

$$\frac{\tan'(x)}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

◀◀

I teoremi del Calcolo: 4:3

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)} = \frac{2n+1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Il valore maggiore è 3, raggiunto per $n = 1$.

◀◀

17. Funzioni convesse

Funzioni convesse: 1:1 Posto $e^{0.1} = a$ si ha

$$2a^n \le a^{n-1} + a^{n+1} \Leftrightarrow 2 \le \frac{1+a^2}{a} \Leftrightarrow 2a \le 1 + a^2$$

◀◀

Funzioni convesse: 1:2 Il risultato è quanto previsto dalla 1.5 di pagina 222 applicato alla funzione converssa x^2.

◀◀

Funzioni convesse: 1:3 Se f è concava allora

$$f\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}(n+1)\right) \ge \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}f(n+1)$$

da cui, rifedrito alla $f(x) = \sqrt{x}$, concava in $[0, +\infty)$ si ha

$$\sqrt{n+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\} \quad \to \quad \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+\frac{1}{2}}$$

◀◀

18. Il teorema di Cauchy e la regola di Höpital

Teorema di Cauchy: 1:1

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{15}{3} = \frac{4c^3}{2c} \quad \to \quad 5 = 2c^2 \quad \to \quad c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

◀◀

Teorema di Cauchy: 1:2

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{1}{\pi/4} = \frac{3c^2}{\frac{1}{1+c^2}} \quad \to \quad \frac{4}{\pi} = 3c^2\,(1+c^2)$$

Da cui

$$c = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{3(16+3\pi)}{\pi}}-3\right)}$$

◀◀

Teorema di Cauchy: 1:3

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2/2} = \frac{\sin(c)}{c} \leq 1 \quad \to \quad 1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

◀◀

Regola di Höpital: 2:1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-1}{\pi x} = \lim_{c\to 0}\frac{\pi\, e^{\pi c}}{\pi} = 1$$

◀◀

Regola di Höpital: 2:2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\,e^{3x}}{3\,x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9\,e^{3x}}{6\,x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{27\,e^{3x}}{6} = +\infty$$

◀◀

Regola di Höpital: 2:3

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-\alpha\,x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0$$

◀◀

19. I poliniomi di Taylor

I poliniomi di Taylor: 1:1

$$T_1(x;0) = f(0) + f'(0)x = 3 + \frac{1}{6}x$$

◀◀

I poliniomi di Taylor:1:2

$$T_2(x;0) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

◀◀

I poliniomi di Taylor: 1:3

$$T_3(x;0) = x - \frac{1}{3!}x^3$$

◀◀

I poliniomi di Taylor: 2:1

$$T_2(x;1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -1 - 2x + 4x^2$$

$$f(2) - T_2(2;1) = 15 - 10 = \frac{1}{3!}f'''(c)(2-1)^3 = 1$$

◀◀

I poliniomi di Taylor:2:2

$$|f(5) - T_2(5;0)| = \frac{1}{3!}\frac{3}{8}(1+c)^{-5/2}5^3 \leq \frac{375}{8}$$

◀◀

I poliniomi di Taylor: 2:3

$$T_2(x;0) = 1 + x + x^2 \quad \to \quad f(0.5) - T_2(0.5;0) = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

◀◀

I poliniomi di Taylor: 3:1

$$|e^x - T_3(x;0)| = \left|\frac{e^c}{4!}x^4\right| \leq \frac{e}{4!} \approx 0.113262$$

◀◀

I poliniomi di Taylor:3:2

◀◀

$$|\sin(x) - T_5(x;0)| = \left|\frac{\sin^{[6]}(c)}{6!}x^6\right| \leq \frac{(\pi/2)^6}{6!} \approx 0.0208635$$

I poliniomi di Taylor: 3:3

$$|\cos(x) - T_4(x;0)| = \left|\frac{\cos^{[5]}(c)}{5!}x^5\right| \leq \frac{(\pi/2)^5}{5!} \approx 0.0796926$$

◀◀

20. Interpolazione

Interpolazione : 1:1

$$P(x) = 1 + (e-1)x \quad |\ln(x) - P(x)| = \frac{1}{2}|x||x-e|\frac{1}{c^2}$$

◀◀

Interpolazione :1:2

$$P(x) = 10 + \frac{2}{44}(x-100) \quad |\sqrt{x} - P(x)| = \frac{1}{2}|x-100||x-144|\frac{3}{8}c^{-5/2} \leq \frac{3}{8}\frac{1}{10^5}22^2 \approx 0.001815$$

◀◀

Interpolazione : 1:3

$$P(x) = 1 + \frac{9}{10\ln(10)}x, \quad \forall x \in [0, \log(10)] : \ |e^{-x} - P(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\log(10)}{2}\right)^2$$

◀◀

Interpolazione : 2:1

$$P(x) = f(0)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + f(1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + f(2)\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = 1 + x - x^2$$

Ovviamente il miglior polinomio di secondo grado che approssimi $1+x-x^2$ è . . . $1+x-x^2$ stesso !

◀◀

Interpolazione :2:2

$$P(x) = \frac{x(x-\pi)}{\pi/2(\pi/2-\pi)} = \frac{1}{\pi^2}\left(\pi x - 4x^2\right)$$

◀◀

Interpolazione : 2:3

$$P(x) = 2\frac{x(x-9)}{4(4-9)} + 3\frac{x(x-4)}{9(9-4)} = \frac{1}{30}\left(19x - x^2\right)$$

◀◀

Interpolazione : 3:1

$$y = \frac{2}{3}$$

Interpolazione :3:2

$$y = x + \frac{1}{3}$$

21. Modelli analitici fondamentali

22. Integrazione

Integrazione : 1:1

$$\frac{1}{2} g t^2 \quad \to \quad \frac{1}{2} g 5^2 \approx 122.5m.$$

Integrazione :1:2 Area = $2 + 1/2$.

Integrazione : 1:3 Area del quarto di cerchio: $\dfrac{\pi}{4}$.

Integrazione : 3:1

$$\left(e^{-x^2}\right)' = 2x(e^{-x^2} \quad \to \quad \int 5xe^{-x^2}\, dx = -\frac{5}{2} e^{-x^2}$$

Integrazione :3:2

$$\int (\sin(3x) + \cos(2x))\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Integrazione : 3:3

$$\left(\log(3+4x^2)\right)' = \frac{8x}{3+4x^2} \quad \to \quad \int \frac{2x}{3+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\log(3+4x^2)$$

Integrazione : 4:1

$$\int_0^1 (1+x+x^2)\, dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Integrazione :4:2

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)\Big|_0^{\pi} = 0$$

◀◀

Integrazione : 4:3

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x}\,dx = \log(2+x)|_{-1}^{2} = \log(4)$$

◀◀

Integrazione : 6:1

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{4} \sin(kx)\right) dx = \sum_{k=1}^{4} \int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx = \sum_{k=1}^{4} \frac{2}{k}$$

◀◀

Integrazione :6:2

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

◀◀

Integrazione : 6:3

$$F(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t \leq 1 \\ 1+2(t-1) & \text{se} \quad t > 1 \end{cases}$$

◀◀

Integrazione : 7:1

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)|_0^{\pi} = 2$$

◀◀

Integrazione :7:2

$$\int_{-1}^{2} |x(1-x^2)|\,dx = \int_{-1}^{0} -x(1-x^2)\,dx + \int_0^1 x(1-x^2)\,dx + \int_1^2 -x(1-x^2)\,dx = \frac{11}{4}$$

◀◀

Integrazione : 7:3

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log(2)$$

◀◀

Integrazione : 8:1

$$m_f = \frac{1}{4}\int_0^4 (1+x)\,dx = 3$$

◀◀

Integrazione :8:2

$$m_f = \frac{1}{6}\int_0^6 (1+x+x^2+x^3)\,dx = 70$$

◀◀

Integrazione : 8:3

$$\frac{1}{1}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{1/3}\int_0^{1/3} x^2\,dx = \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{1/2}\int_0^{1/2} x^2\,dx = \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{1/3}\int_{1/3}^{2/3} x^2\,dx = \frac{7}{27}$$

$$\frac{1}{1/2}\int_{1/2}^{1} x^2\,dx = \frac{7}{12} \qquad \frac{1}{1/3}\int_{2/3}^{1} x^2\,dx = \frac{19}{27}$$

◀◀

Integrazione : 9:1

$$\int_0^4 x^2\,dx \approx \frac{4-0}{6}\left(0^2+4\times 2^2+4^2\right) = \frac{64}{3}$$

Il risultato è esatto perchè la f 1è essa stessa un polinomio di secondo grado.

◀◀

Integrazione :9:2

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+0^2}+4\times\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+1^2}\right) = 0.783333$$

Il valotre esatto è $\pi/4 \approx 0.785398$.

◀◀

Integrazione : 9:3

$$\int_0^8 \sqrt{9+x^2}\,dx \approx \frac{8}{6}\left(\sqrt{9}+4\times\sqrt{9+4^2}+\sqrt{9+8^2}\right) = \frac{4}{3}\left(23+\sqrt{73}\right) \approx 42.059$$

Il valore fornito da `http://www.wolframalpha.com` è 41.859.

◀◀

23. Metodi di integrazione

Metodi di integrazione : 3:1 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|)|_{-2}^{-1} = -\ln(2)$

◀◀

Metodi di integrazione : 3:2

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$\ln(5 - \ln(4) - \ln(4) + \ln(3) = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$$

◀◀

Metodi di integrazione : 3:3

$$\int_1^2 \frac{1+x}{x^2}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$\left(-\frac{1}{x} + \ln(x)\right)\Big|_1^2 = \ln(2) + \frac{1}{2}$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 4:1

$$\frac{d}{dx} \int_0^\pi (x-t)\sin(t)\, dt = \int_0^\pi \sin(t)\, dt = 2$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 4:2

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 (x+t)^2 e^t\, dt = 2\int_0^1 (x+t)\, e^t\, dt =$$

$$= 2x \int_0^1 e^t\, dt + 2\int_0^1 t\, e^t\, dt = 2(e-1)x + 2$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 4:3

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^1 \sin(x-t)\, e^{-t^2}\, dt + \int_0^1 \sin(x-t)\, e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 -\sin(x-t)\, e^{-t^2}\, dt + \int_0^1 \sin(x-t)\, e^{-t^2}\, dt = 0$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 5:1

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2} + e^{-x^2} = 2\, e^{-x^2}$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 5:2

$$F(x)=\int_0^x \sin^3(t)\,dt \quad\to\quad F'(x)=\sin^3(x): \quad x\in[2n\pi,\,(2n+1)\,\pi] \quad\to\quad F(x)\nearrow$$

◀◀

Derivata sotto il segno : 5:3

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$
$$=\sqrt{1+x^2}-\int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_0^x e^{t-x}\sqrt{1+t^2}\,dt=\sqrt{1+x^2}$$

◀◀

24. Integrali impropri

Integrali impropri : 2:1

$$\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx: \qquad \frac{2x}{(1+x^2)^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^M \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx=\left.\frac{-1}{(1+x^2)}\right|_0^M=1-\frac{1}{1+M^2} \quad\to\quad \int_0^{+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx=1$$

◀◀

Integrali impropri : 2:2

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx: \qquad \frac{1}{1+x^2+x^4}\leq\frac{1}{1+x^2}$$

◀◀

Integrali impropri : 2:3

$$\int_1^M \frac{x-1}{x^3}\,dx=\int_1^M x^{-2}\,dx-\int_1^M x^{-3}\,dx \quad \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}$$

◀◀

Integrali impropri : 3:1

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=\left.-2\sqrt{1-x}\right|_0^{\varepsilon}=-2\sqrt{1-\varepsilon}+2 \quad \underset{\varepsilon\to 1}{\longrightarrow} \quad 2$$

.

◀◀

Integrali impropri : 3:2

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx : \quad \left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

.

◀◀

Integrali impropri : 3:3

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx : \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{|1-x|^{0.5}}$$

.

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(b) \quad \underset{b\to 1}{\longrightarrow} \quad \pi/2$$

.

◀◀

25. Serie

Serie: 2:1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 0.5^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$

◀◀

Serie: 2:2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3.$

◀◀

Serie: 2:3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^3}\,\frac{3^n}{5^n} = \frac{3}{5^3}\,\frac{5}{2} = \frac{6}{25}$

◀◀

Serie: 3:1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$

◀◀

Serie: 3:2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} = e^{\sqrt{2}}.$

◀◀

Serie: 3:3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8.$

◀◀

Serie: 4:1 $\alpha > 1, \quad \beta > 1.$

◀◀

Serie: 4:2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}} \quad \rightarrow \quad \alpha > 2$

◀◀

Serie: 4:3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} \quad \rightarrow \quad \alpha - 1/2 > 1 \quad \rightarrow \quad \alpha > 3/2$

◀◀

Serie: 5:1 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n} \quad \rightarrow \quad \frac{(n+1)^2 x^{2(n+1)}}{n^2 x^{2n}} = x^2 \left(\frac{n+1}{n}\right) < x^2$. La serie converge per $x^2 < 1$ ovvero per $-1 < x < 1$.

◀◀

Serie: 5:2 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^{\alpha} : \quad \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^{\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \rightarrow \quad \alpha > 1$

◀◀

Serie: 5:3 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)^{\alpha} : \quad \frac{1}{1+n+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \rightarrow \quad \alpha > 1/2$

◀◀

Serie: 6:1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2\sin(n)+\sin^2(n^2)}{1+n^2} : \quad \frac{1+2\sin(n)+\sin^2(n^2)}{1+n^2} < \frac{3}{1+n^2}$$

◀◀

Serie: 6:2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} : \quad \left|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \rightarrow \quad \alpha > 1$$

◀◀

Serie: 6:3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{1+n^3} : \quad \left|\frac{1+(-1)^n n}{1+n^3}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}$$

◀◀

26. Equazioni differenziali primo ordine

Eq. differenziali: 3:1 $3x'(t) - 5x(t) = 0 \quad \rightarrow \quad x'(t) = -\frac{5}{3}x(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = c\,e^{-\frac{5}{3}t}$

◀◀

Eq. differenziali: 3:2

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - 1 \\ x(0) &= 1 \end{cases} \quad \to \quad x(t) = c\,e^t + 1 \quad \to \quad x(t) = 1$$

◀◀

Eq. differenziali: 3:3 $x'(t) = -0.5\,x(t) \quad \to \quad x(t) = x(0)\,e^{-\frac{1}{2}t} \quad \to \quad e^{-\frac{1}{2}\tau} = \dfrac{1}{2} \quad \to \quad \tau = 2\log(2)$

◀◀

Eq. differenziali: 4:1 $x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \quad \to \quad \left(\dfrac{1}{x(t)}\right)' = -\dfrac{1}{x(t)} + 1 \quad \to \quad \{x(t) = \frac{1}{ce^{-t}+1}$

◀◀

Eq. differenziali: 4:2

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \\ x(0) = 2 \end{cases} \quad \to \quad x(t) = \frac{1}{-\frac{1}{2}\,e^{-t} + 1}$$

◀◀

Eq. differenziali: 4:3

$$x(t) = \frac{1}{-\frac{1}{2}\,e^{-t} + 1}, \qquad x''(t) = \frac{2e^t\,(2e^t + 1)}{(2e^t - 1)^3}$$

convessa per $t > -\log(2)$.

◀◀

Eq. differenziali: 5:1

$$x'(t) = e^{-x(t)}\left(3t^2 + 2t + 1\right) \quad \to \quad e^x dx = \left(3t^2 + 2t + 1\right) dt \quad \to$$

$$\to \quad e^x = t^3 + t^2 + t + c \quad \to \quad x(t) = k\log(t^3 + t^2 + t)$$

◀◀

Eq. differenziali: 5:2

$$x'(t) = 3\sqrt{x(t)}\,t^2 \quad \to \quad x^{-1/2}dx = 3t^2 dt \quad \to \quad 2\sqrt{x} = t^3 + c \quad \to \quad x(t) = \left(\frac{1}{2}(t^3 + c)\right)^2$$

◀◀

Eq. differenziali: 5:3

$$x'(t) = \frac{t^2}{x^2(t)} \quad \to \quad x^2\,dx = t^2 dt \quad \to \quad x^3 = t^3 + c \quad \to \quad x(t) = \sqrt[3]{t^3 + c}$$

◀◀

27. Cinetica chimica

Cinetica chimica: 6:1

$$[A]'(t) = -0.01\,[A](t),\ [A](0) = 4 \quad \to \quad [A](t) = 4\,e^{-0.01\,t}$$
$$[A](5) = 4\,e^{-0.05\,t} \approx 3.80492, \quad [A](10) = 4\,e^{-0.1\,,t} \approx 3.61935$$

◀◀

Cinetica chimica: 6:2

$$[A]'(t) = -0.5\,[A]^2(t),\ [A](0) = 10 \quad \to \quad [A](t) = \frac{10}{1+5\,t}$$
$$[A](5) = \frac{10}{1+25} \approx 0.384615, \quad [A](10) = \frac{10}{1+50} \approx 0.196078$$

◀◀

Cinetica chimica: 6:3

$$x'(t) = 0.05\,(10-x(t))\,(100-x(t)), x(0) = 0 \quad \to \quad \frac{100-x}{10-x} = 10e^{4.5\,t}$$
$$x(t) = 100\,\frac{1-e^{4.5\,t}}{1-10\,e^{-4.5\,t}} \quad \to \quad [A](t) = 10 - 100\,\frac{1-e^{-4.5\,t}}{1-10\,e^{4.5\,t}}$$
$$[A](5) \approx 1.5 * 10^{-9}, \quad a(19) \approx 0$$

◀◀

28. Equazioni differenziali secondo ordine

Equazioni differenziali : 2:1

$$x''(t) + (\sqrt{2}+\sqrt{3})\,x'(t) + \sqrt{6}x(t) = 0 \quad \to \quad x(t) \;=\; \alpha\,e^{-\sqrt{2}\,t} \;+\; \beta\,e^{-\sqrt{3}\,t}$$

◀◀

Equazioni differenziali : 2:2

$$e^{-t}\sin(3t), \qquad e^{-t}\cos(3t) \quad \to \quad x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 0$$

◀◀

Equazioni differenziali : 2:3

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0 \quad \to \quad \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -3$$

Le soluzioni sono $x(t) = (\alpha + \beta t)\,e^{-3t}$

◀◀

Equazioni differenziali : 3:1

$$x''(t) + 4x(t) = 0, \quad \to \quad x(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\,\sin(2t) \quad \to \quad x(t) = \cos(t)$$

◀◀

Equazioni differenziali : 3:2

$x''(t)+5x'(t)+6x(t)=0, \quad \rightarrow \quad x(t)=\alpha\, e^{-2t}+\beta\, e^{-3t} \quad \rightarrow \quad x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$

◀◀

Equazioni differenziali : 3:3

$$x''(t)+2x'(t)+x(t)=0, \quad \rightarrow \quad x(t)=e^{-t}(\alpha+\beta\, t) \quad \rightarrow \quad x(t)=t\, e^{-t}$$

◀◀

Equazioni differenziali : 4:1

$$x''(t)+x(t)=1+t \quad \rightarrow \quad x(t)=\alpha\cos(t)+\beta\sin(t)+\frac{1}{4}(1+t)$$

◀◀

Equazioni differenziali : 4:2

$$x''(t)+5x'(t)+6x(t)=e^{t} \quad \rightarrow \quad x(t)=\alpha e^{-2t}+\beta e^{-3t}+\frac{1}{12}e^{t}$$

◀◀

Equazioni differenziali : 4:3

$$x''(t)+9x(t)=\cos(t) \quad \rightarrow \quad x(t)=\alpha\cos(3t)+\beta\sin(3t)+\frac{1}{8}\cos(t)$$

◀◀

Equazioni differenziali : 5:1 $y''+2y'+2y=\cos(\gamma t), \quad \rightarrow \quad \overline{y(t)}=A\cos(\gamma t)+B\sin(\gamma t)$

$$\overline{y(t)}=\frac{1}{2+\gamma^2}\big((2-\gamma^2)\cos(\gamma t)+2\gamma sin(\gamma t)\big)$$

Le soluzioni hanno ampiezza massima se $\gamma=0$.

◀◀

Equazioni differenziali : 5:2 $y(t)=e^{-t}\cos(t), \quad \rightarrow \quad y''+2y'+2y=0$

◀◀

Equazioni differenziali : 5:3 $y''+2y'+2y=0, y(0)=1, y'(0)=0 \quad \rightarrow \quad y(t)=e^{-t}\cos(t)$

◀◀

Parte 2

Esercizi 2015

Esercizi 2015

1. Induzione, disuguaglianze, insiemi numerici

ESERCIZIO : 1.1. *Provare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2,$$

Soluzione:

La formula proposta nell'esercizio contiene un parametro $n \in \mathbb{N}$: si tratta quindi di una famiglia (infinita) di formule

- quella per $n = 0$,
- quella per $n = 1$,
- ecc. ecc.

Provare la validitá di tutte tali formule *per induzione* significa:

- provare che la prima, quella per $n = 0$, è vera,
- provare che se è vera la formula per un ***qualsiasi*** grado n è, di conseguenza, vera anche quella per il grado $n+1$ successivo.

Il *meccanismo dell'induzione* conduce quindi ovviamente a che

- essendo vera la prima formula è vera anche la seconda,
- essendo vera la seconda formula è vera anche la terza,
- ecc. ecc.

fino a riconoscere che sono sicuramente vere tutte.

$$\begin{cases} 0: & \sum_{k=0}^{0}(2k+1)=(0+1)^2 & \\ n_0: & \textit{ammesso che} & \sum_{k=0}^{n_0}(2k+1)=(n_0+1)^2 \\ n_0+1: & \textit{occorre riconoscere che} & \sum_{k=0}^{n_0+1}(2k+1)=\{(n_0+1)+1\}^2 \end{cases}$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{n_0+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n_0}(2k+1)+2(n_0+1)+1=(n_0+1)^2+2n_0+3=\{(n_0+1)+1\}^2$$

ESERCIZIO : 1.2. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che*

- *n^2-n è divisibile per 2,*
- *n^3-n è divisibile per 3.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, n^4-n è divisibile per 4 ?

Soluzione:

- $n^2-n=n(n-1)$ si esprime come il prodotto di due numeri consecutivi, quindi prodotto di un numero pari per un numero dispari: prodotto quindi pari.
- $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1)$ si esprime come prodotto di tre numeri consecutivi. Comunque si prendano tre numeri consecutivi uno di essi è multiplo di 3.
  Quindi tale prodotto è divisibile per 3.
- n^4-n non è sempre divisibile per 4, basta provare $n=2$: $n^4-n=14$ numero non divisibile per 4.

ESERCIZIO : 1.3. *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni*

$$x-2|x|+2>0, \qquad \begin{cases} |x|\leq 2 \\ |x-1|\leq 1 \end{cases}.$$

Soluzione:

Prima disuguaglianza:

$$x-2|x|+2>0 \to \left(\begin{cases} x+2x+2>0 \\ x<0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x-2x+2>0 \\ x>0 \end{cases}\right)$$

$$x-2|x|+2>0 \to \left(\begin{cases} 3x>-2 \\ x<0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x<2 \\ x>0 \end{cases}\right)$$

$$x-2|x|+2>0 \to x \in (-2/3,\, 0] \cup [0,\, 2)$$

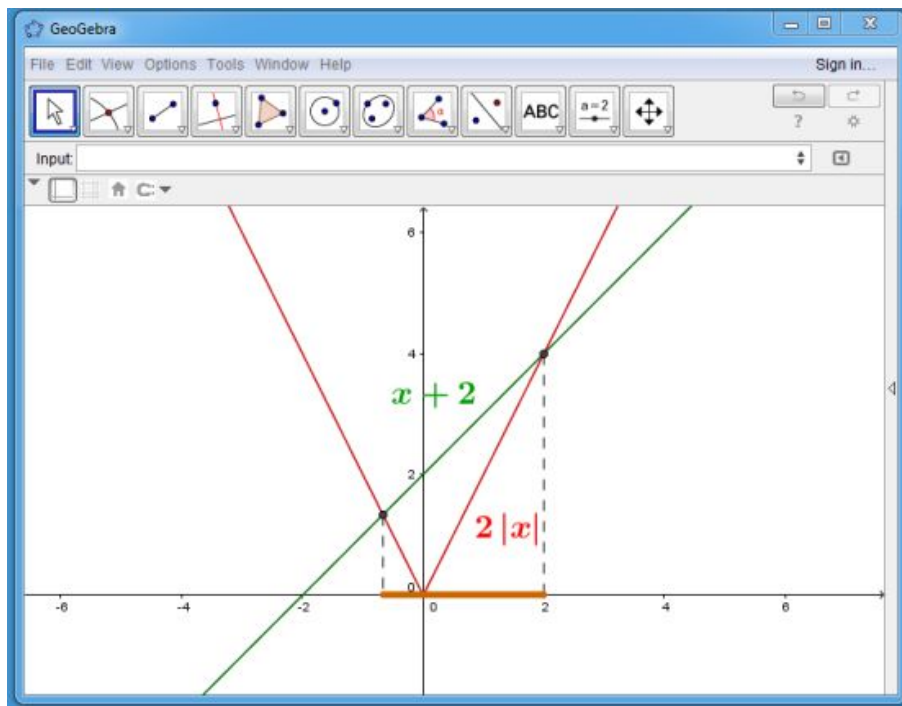



FIGURA 20. $x+2>2|x|$

Seconda disuguaglianza:

$$\begin{cases} |x|\leq 2 \\ |x-1|\leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases} \rightarrow \quad 0\leq x\leq 2$$

ESERCIZIO : 1.4. *Dire quale dei seguenti insiemi è un intervallo e determinarne gli estremi:*

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,|x^2+2x|<1\},\quad B=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,\frac{x^2-1}{x^2+1}<\frac{1}{2}\right\},\quad A\cap B,$$

$$C=\{0\}\cup\left\{\frac{2}{n^2+1},\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Quale dei precedenti insiemi è limitato?

Soluzione:

$A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,|x^2+2x|<1\}$

$$A = \{-1 < x^2 + 2x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$A = \{x \neq -1\} \cap \{-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}\} = (-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1+\sqrt{2})$$

$$\inf(A) = -1-\sqrt{2}, \quad \sup(A) = -1+\sqrt{2}$$

A, unione di due intervalli aperti è limitato ma non è un intervallo.

$\boxed{B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\}}$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < \frac{1}{2}(x^2+1)\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3)\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$\inf(B) = -\sqrt{3}, \quad \sup(B) = \sqrt{3}$$

B è un intervallo aperto, limitato.

$\boxed{A \cap B}$

$$A \cap B = (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -1+\sqrt{2})$$

$$\inf(A \cap B) = -\sqrt{3}, \quad \sup(A \cap B) = -1+\sqrt{2}$$

$A \cap B$ è limitato ma non è un intervallo.

$\boxed{C = \{0\} \cup \left\{\frac{2}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}}$

$$C = \left\{0, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{2}{101}, \dots, \frac{2}{1000001}, \dots\right\}$$

C non è un intervallo ma una successione di numeri isolati uno dall'altro.

C è limitato: ovviamente limitato inferiormente perchè formato tutto da numeri non negativi, limitato anche superiormente perchè tutti i numeri $\frac{2}{n^2+1} \leq \frac{2}{1} = 2$.

$\min(C) = 0, \quad \max(C) = 2.$

ESERCIZIO : 1.5. *Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono*

$$\{0\} \cup \{1\}, \quad (-\infty, 0] \cup [1, 2], \quad [-1, 1] \cap [0, +\infty), \quad \mathbb{N},$$

Soluzione:

$\{0\} \cup \{1\}$ è un insieme finito (due elementi soltanto) quindi è limitato.

$(-\infty, 0] \cup [1, 2] \supset (-\infty, 0]$ contiene una semiretta, è illimitato.

$[-1, 1] \cap [0, +\infty) \subset [-1, 1]$ è contenuto in un intervallo, quindi è limitato.

$\mathbb{N}$, insieme dei naturali non è superiormente limitato, quindi non è limitato.

ESERCIZIO : 1.6. *Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\},$$
$$A \cup B, \quad A \cap B,$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 1 \geq |x^2 + 1| - |x^2|\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\},$$
$$C \cup D, \quad C \cap D.$$

Soluzione:

$A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ è un insieme illimitato e non è un intervallo.

$B = [-2, 2]$ è un intervallo chiuso e limitato.

$A \cup B = (-\infty, +\infty)$ è tutta la retta reale, intervallo non limitato.

$A \cap B = [-2, -1] \cup [1, 2]$ è un insieme limitato formato da due intervalli.

$C = \{2x^2 - 1 \geq |x^2 + 1| - |x^2|\} = \{2x^2 - 1 \geq x^2 + 1 - x^2\} = \{2x^2 \geq 2\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ avendo tenuto conto che i quadrati sono sempre non negativi e quindi $|x^2 + 1| = x^2 + 1$, $|x^2| = x^2$.

C, formato da due semirette, non è un intervallo e non è limitato.

$D = [1, 3]$ è un intervallo chiuso e limitato.

$C \cup D = C$ è insieme non limitato.

$C \cap D = [1, 3]$ è un intervallo chiuso e limitato.

ESERCIZIO : 1.7. *Dire per ciascuno dei seguenti insiemi se è limitato superiormente [inferiormente] e, in caso affermativo, calcolarne l'estremo superiore [inferiore], indicando se si tratta di massimo [rispettivamente minimo]*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x + 2| > 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - 1| \leq 3\}, \quad C = \mathbb{N} \cap \left(-\frac{10}{3}, 5\right),$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ |x + 2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\}.$$

Soluzione:

$A = (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ insieme non limitato nè inferiormente nè superiormente.

$B = [-2, 4]$ intervallo chiuso e limitato $\min(B) = -2$, $\max(B) = 4$.

$C = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ insieme finito, limitato. $\min(C) = -3$, $\max(C) = 5$.

$D = [-6,2] \cap \{(-\infty,1) \cup (4,+\infty)\} = [-6,1]$ intervallo chiuso e limitato. $\min(D) = -6$, $\max(D) = 1$.

ESERCIZIO : 1.8. *Per quali $x, y \in R$ vale la relazione $|x+y| = |x|+|y|$?*

Soluzione:

La relazione vale per

- $x \geq 0,\ y \geq 0$,
- $x \leq 0,\ y \leq 0$.

Mentre non vale se x ed y sono uno positivo e uno negativo.

ESERCIZIO : 1.9. *Usando il postulato di Archimede verificare che per ogni $x > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 < 1/n < x$.*

Soluzione:

Essendo $x > 0$

$$0 < \frac{1}{n} < x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < n$$

La seconda disuguaglianza equivale al fatto che $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente.

2. Funzioni, domini, grafici, composte

ESERCIZIO : 2.1. *Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti*

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}, \qquad \frac{10^x}{2\cos x-1}, \quad \frac{10^x}{\cos x-2}$$

$$\frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}}, \quad \sin(\pi x^2), \qquad \tan(\pi x^2)$$

Soluzione:

L'insieme di definizione della funzione f è l'insieme dei numeri x sui quali il calcolo $f(x)$ è eseguibile: così, ad esempio, se $f(x)$ include frazioni l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei denominatori presenti si annulli.

Analogamente se $f(x)$ include radici quadrate l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei radicandi sia negativo.

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4} \quad \rightarrow \quad x^4-5x^2+4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad (x \neq \pm 2) \cap (x \neq \pm 1)$$

$$\frac{10^x}{2\cos x-1} \quad \rightarrow \quad 2\cos x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, , \ldots$$

$$\frac{10^x}{\cos x-2} \quad \rightarrow \quad \cos x - 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

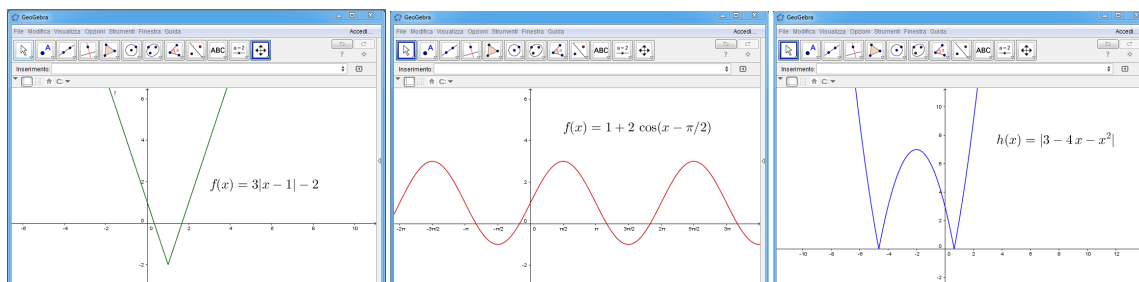
$$\frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}} \quad \rightarrow \quad |x+6|\sqrt{x^2+2x-15} \neq 0 \quad \rightarrow \quad (x \neq -6) \cap \{(x \leq -5) \cup (x \geq 3)\}$$

$$\sin(\pi x^2) \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(\pi x^2) \quad \rightarrow \quad x^2 \neq \frac{2k+1}{2} \quad \rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

ESERCIZIO : 2.2. *Disegnare i grafici delle funzioni seguenti*

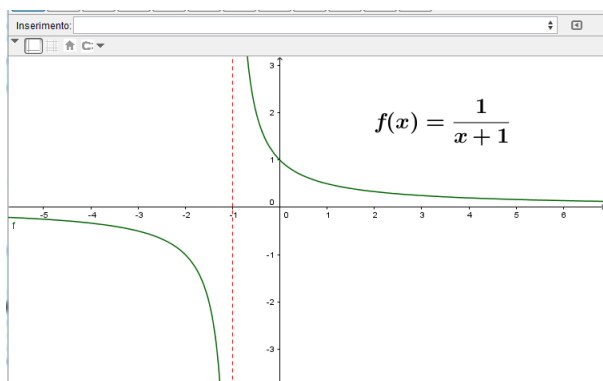
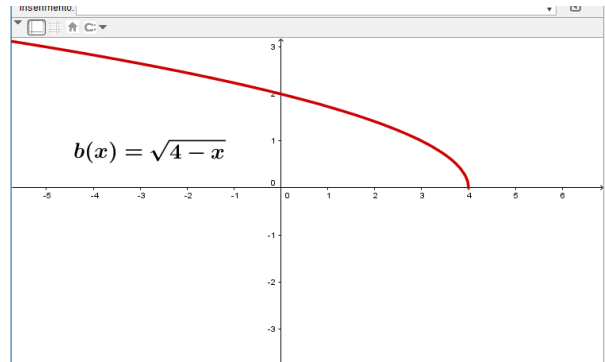
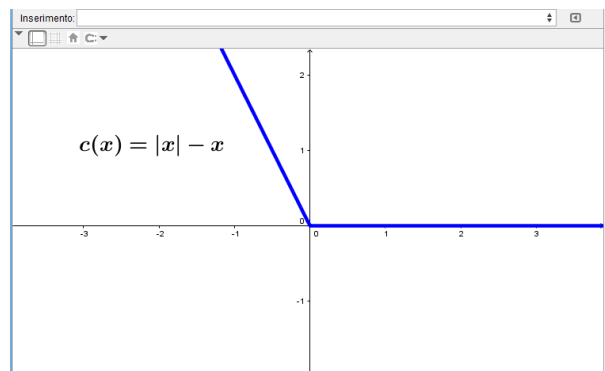
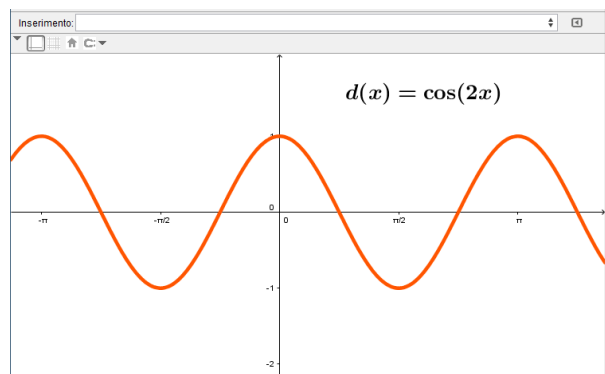
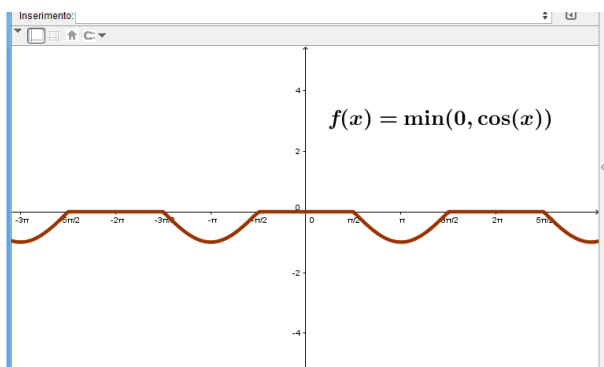
$$f(x) = 3|x-1|-2, \qquad g(x) = 1+2\cos(x-\frac{\pi}{2}), \qquad h(x) = |3-4x-x^2|.$$

Soluzione:

ESERCIZIO : 2.3. *Per ciascuna delle seguenti funzioni*

$$a(x) := \frac{1}{x+1}, \; b(x) := \sqrt{4-x}, \; c(x) := |x|-x, \; d(x) := \cos(2x), \; f(x) := \min\{0, \cos x\},$$

- *determinare il dominio di definizione;*
- *disegnarne approssimativamente il grafico;*
- *dire se si tratta di funzione periodica.*

Soluzione:

(1) $a(x) := \frac{1}{x+1}$, $\quad D = \{x \neq -1\}$, non periodica:

(2) $b(x) := \sqrt{4-x}, \quad D = \{x \leq 4\}$, non periodica :

(3) $c(x) := |x| - x, \quad D = \mathbb{R}$, non periodica

(4) $d(x) := \cos(2x), \quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = \pi$

(5) $f(x) := \min\{0, \cos x\}, \quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$

ESERCIZIO : 2.4. *Scrivere la funzione composta $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ nei seguenti casi:*

i: $f(x) = x+1, \qquad g(x) = x^2 - 2x;$
ii: $f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$

Soluzione:

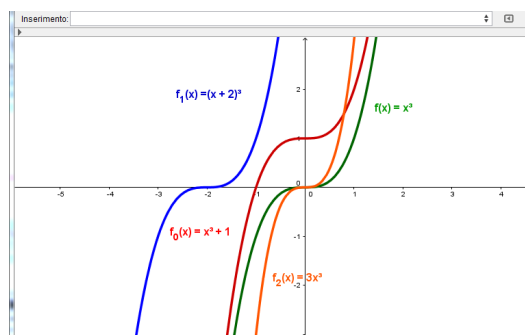
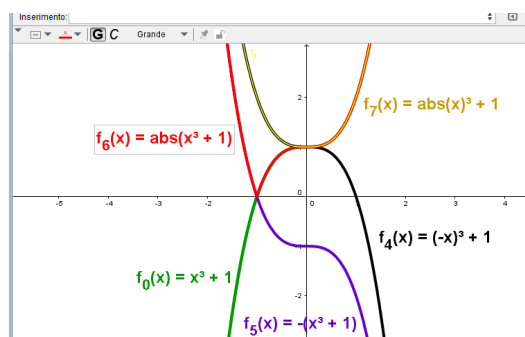
i: $f \circ g : x \mapsto (x^2 - 2x) + 1, \qquad g \circ f : x \mapsto (x+1)^2 - 2(x+1)$
ii: $f \circ g : x \mapsto (\sqrt{x})^2 = x, \qquad g \circ f : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$

ESERCIZIO : 2.5. *Data la funzione $f(x) = x^3$, disegnare il grafico di*

$$f_0(x) = f(x)+1, \quad f_1(x) = f(x+2), \quad f_2(x) = 3f(x), \quad f_3(x) = f(3x),$$
$$f_4(x) = f_0(-x) \quad f_5(x) = -f_0(x), \quad f_6(x) = |f_0(x)|, \quad f_7(x) = f_0(|x|).$$

[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

Soluzione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f_0(x) &= f(x)+1 && = x^3+1, \\
f_1(x) &= f(x+2) && = (x+2)^3, \\
f_2(x) &= 3f(x) && = 3x^3, \\
f_3(x) &= f(3x) && = 3^3x^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x)+1 && = x^3+1, \\
f_4(x) &= f_0(-x) && = (-x)^3+1, \\
f_5(x) &= -f_0(x) && = -x^3-1, \\
f_7(x) &= f_0(|x|) && = |x|^3+1.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO : 2.6. *Provare che la funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ è limitata e dire se è iniettiva. [Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]*

Soluzione:

$$0 \leq (|x|-1)^2 \quad \to \quad 2|x| < x^2+1 \quad \to \quad \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$$

$$\frac{2a}{a^2+1} = \frac{2b}{b^2+1} \quad \to \quad ab(b-a) = (b-a) \quad \to \quad ab = 1 \quad \to \quad f(a) = f(1/a)$$

ESERCIZIO : 2.7. *Determinare il dominio D di $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ e dire se $f : D \to \mathbb{R}$ è limitata, se è iniettiva, se è suriettiva. [Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]*

Soluzione:

Il dominio è $\mathbb{R}/\{0\}$.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ non è limitata per via dei termini x e $\frac{1}{x}$. Esaminiamo quando riesce $f(a) = f(b)$;

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \quad \to \quad a - b = \frac{a-b}{ab}$$

scelto $b = 1/a$, $a \neq 1$ riesce

$$a \neq 1/a, \; f(a) = f(1/a)$$

pertanto la funzione non è iniettiva.

L'immagine di f non contiene lo zero:

$$f(x) = 0 \quad \to \quad x + \frac{1}{x} = 0 \quad \to \quad \frac{x^2+1}{x} = 0$$

tanto basta a riconoscere che l'immagine di f non coincide con tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO : 2.8. *Provare che: se f e g sono limitate $\Rightarrow$ $f+g$ e $f \cdot g$ sono limitate.*

Soluzione:

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq N \quad \to \quad |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M+N$$

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq N \quad \to \quad |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot N$$

ESERCIZIO : 2.9. *Provare che: se f e g sono crescenti $\Rightarrow$ $f+g$ è crescente ma $f-g$ in generale non lo è. Pensate che $f \cdot g$ sia monotona?*

Soluzione:

- somma: $x_1 < x_2 \quad \to \quad f(x_1)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_2)$
- differenza: il risultato non vale come prova il seguente contresempio

$$f(x) = x, \, g(x) = 2x, \qquad f(x) - g(x) = -x$$

Il prodotto di due funzioni crescenti puï¿$\frac{1}{2}$ essere non crescente come risulta dal contresempio

$$f(x) = g(x) = x, \qquad f(x) \cdot g(x) = x^2.$$

3. Limiti di successioni

ESERCIZIO : 3.1. *Mostrare* **usando la definizione** *la validità di*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+3n} = 0,$$

Soluzione:

L'esercizio richiede di provare che comunque si prenda $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che

$$\left| \frac{n+2}{n^2+3n} - 0 \right| < \varepsilon$$

per tutti gli $n > n_\varepsilon$.

Studiamo per quali n ï¿½ soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{n+2}{n^2+3n} < \varepsilon$$

Ci sono due strade:

- quella algebrica standard $n+2 < \varepsilon n^2 + 3\varepsilon n$,
- quella di valutare quanto sia grande il numero $\dfrac{n+2}{n^2+3n}$ tramite qualche sua evidente stima.

La prima strada conduce alla disuguaglianza

$$\varepsilon n^2 + (3\varepsilon - 1)n - 2 > 0 \quad \to \quad n > \frac{1-3\varepsilon+\sqrt{(1-3\varepsilon)^2+8\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

La parte intera della frazione a destra fornisce il valore soglia n_ε cercato.

La seconda strada si basa sulla catena di evidenti disuguaglianze seguenti

$$\frac{n+2}{n^2+3n} < \frac{n+2}{n^2} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

dalla quale è evidente che

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

e quindi anche

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad \frac{n+2}{n^2+3n} < \varepsilon$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Si noti come nella definizione di limite si chieda l'esistenza di*

"un n_ε"

intendendo ovviamente che se c'è una soglia utile saranno utili anche tutte quelle maggiori....

Nell'esercizio considerato probabilmente la soglia ottenuta con la prima strada è piú bassa di quella indicata nella seconda.

Un problema che si potrebbe ulteriormente considerare potrebbe essere quello di determinare per ogni $\varepsilon > 0$ la soglia n_ε piú bassa, la migliore...

ESERCIZIO : 3.2. *Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni*

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}, \quad (-1)^n+2, \quad n+(-1)^n, \quad \frac{n^2+n\sin(n)}{2n^2+3n+1}, \quad \frac{3^n+n}{n^3+1},$$

$$n^2 2^{-n}, \quad \frac{3^n}{2^n+4^n}, \quad \frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}, \quad \frac{3^n}{n^{100}}, \quad \frac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3},$$

$$\frac{3^n+n}{4^n+n^2\sin(n)}, \quad \frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}, \quad \frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}, \quad \sqrt{n^2+n}-n$$

$$\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}, \quad \frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}, \quad \frac{\ln n-2^n+\sin(n)}{n^3-n!}, \quad \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1},$$

Soluzione:

$$\boxed{\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}}$$

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2} = \frac{3/n+2/n^3+1/n^4}{4+3/n+2/n^4} \to \frac{0}{4} = 0$$

$$\boxed{(-1)^n+2,}$$

$$\{1, 3, 1, 3, 1, \dots\}$$

Non converge.

$$\boxed{n+(-1)^n,}$$

$$\{1,2,3,4,5,6,\dots\}+\{-1,1,-1,1,-1,1,\dots\} = \{0,3,2,5,4,7,6,9,8,\dots\}$$

Diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{n^2+n\,\sin(n)}{2n^2+3n+1},}$$

$$\frac{n^2+n\,\sin(n)}{2n^2+3n+1}=\frac{1+\sin(n)/n}{2+3/n+1/n^2}\to\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{3^n+n}{n^3+1}}$$

Tenuto conto (formula del binomio di Newton[1]) che

$$3^n=(1+2)^n=1+2n+2^2\,\frac{n(n-1)}{2!}+2^3\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+2^4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\dots$$

riesce anche

$$3^n>2^4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

da cui

$$\frac{3^n}{n^3}>2^4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!\,n^3}=\frac{2}{3}\,n\,(1-1/n)\,(1-2/n)\,(1-3/n)$$

implica che $\dfrac{3^n}{n^3}$ diverge a $+\infty$.

Pertanto

$$\frac{3^n+n}{n^3+1}=\frac{3^n/n^3+1/n^2}{1+1/n^3}>\frac{3^n/n^3}{1+1}>\frac{1}{3}n\,(1-1/n)\,(1-2/n)\,(1-3/n)$$

e quindi anche $\dfrac{3^n+n}{n^3+1}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{n^2\,2^{-n},}$$

$$n^2\,2^{-n}=\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}}\to 0$$

Il risultato dipende dal fatto che $\dfrac{2^n}{n^2}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{3^n}{2^n+4^n},}$$

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_binomiale

$$\frac{3^n}{2^n+4^n} = \frac{\frac{3^n}{4^n}}{\frac{2^n}{4^n}+1} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} \to \frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{\frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}}$$

$$\left|\frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2} \to 0$$

$\boxed{\dfrac{3^n}{n^{100}}}$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}}}{\dfrac{3^n}{n^{100}}} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}} \quad \to \quad 3$$

Tenuto presente che il rapporto ha un limite maggiore di 1 si riconosce che $\dfrac{3^n}{n^{100}}$ diverge a $+\infty$.

A titolo di esempio si considerino le seguenti tabelle che riportano i valori della successione $\{a_n\}$ rispettivamente per $n \in [1,15]$, $n \in [586,600]$e $n \in [651,665]$:

n	a_n
1	3.
2	7.099748146989106^{-30}
3	5.238878087203109^{-47}
4	5.040642375067525^{-59}
5	3.0803909585545973^{-68}
6	1.115841449757663^{-75}
7	6.761526922493312^{-82}
8	3.2208562225818384^{-87}
9	7.410377775395764^{-92}
10	5.9049^{-96}
11	1.2854798874799832^{-99}
12	6.416976544852991^{-103}
13	6.430445779388154^{-106}
14	1.166524859202569^{-108}
15	3.52933526191323^{-111}

n	a_n
586	635.761
587	1608.3
588	4069.73
589	10301.2
590	26081.9
591	66056.2
592	167345.
593	424067.
594	1.07493×10^6
595	2.72552×10^6
596	6.91261×10^6
597	1.7537×10^7
598	4.45033×10^7
599	1.12966×10^8
600	2.86832×10^8

n	a_n
651	1.76945×10^{29}
652	4.55301×10^{29}
653	1.17182×10^{30}
654	3.01666×10^{30}
655	7.76769×10^{30}
656	2.00059×10^{31}
657	5.1538×10^{31}
658	1.32799×10^{32}
659	3.42267×10^{32}
660	8.82337×10^{32}
661	2.27512×10^{33}
662	5.86775×10^{33}
663	1.5137×10^{34}
664	3.90576×10^{34}
665	1.00802×10^{35}

$\boxed{\dfrac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3}}$

$$\frac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3} = \frac{4-1/n+4/n^2}{2+3/n^4} \to \frac{4}{2} = 2$$

$\boxed{\dfrac{3^n+n}{4^n+n^2\sin(n)}}$

$$\frac{3^n+n}{4^n+n^2\sin(n)}=\frac{\dfrac{3^n}{4^n}+\dfrac{n}{4^n}}{1+\dfrac{\sin(n)}{4^n/n^2}}\ \to\ \frac{0}{1}=0$$

$$\boxed{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1+2n}{n+n^2}=-\frac{1/n^2+2/n}{1/n+1}\ \to\ -\frac{0}{1}=0$$

$$\boxed{\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}}$$

$$\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}=-\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=-\frac{1+1/n+1/n^2}{1+1/n}\ \to\ -\frac{1}{1}=-1$$

$$\boxed{\sqrt{n^2+n}-n}$$

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}\ \to\ \frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}}$$

$$\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}=\frac{2n+1/n+1/n^2}{4+3/n+2/n^2}$$

Tenuto presente che il numeratore diverge a $+\infty$ mentre il denominatore converge a 4 se ne deduce che $\dfrac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}}$$

$$\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}=\frac{1-n^2/3^n}{2^n/3^n+n^5/3^n}$$

Tenuto presente che il numeratore converge a 1 mentre il denominatore, formato tutto da numeri positivi, tende a 0 se ne deduce che $\dfrac{3^n-n^2}{2^n+n^5}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{\log(n) - 2^n + \sin(n)}{n^3 - n!}}$$

$$\frac{\log(n) - 2^n + \sin(n)}{n^3 - n!} = \frac{\log(n)/n! - 2^n/n! + \sin(n)/n!}{n^3/n! - 1}$$

Tenuto presente che

$$\frac{\log(n)}{n!} \to 0, \quad \frac{2^n}{n!} \to 0, \quad \frac{\sin(n)}{n!} \to 0, \quad \frac{n^3}{n!} \to 0$$

se ne deduce che $\dfrac{\log(n) - 2^n + \sin(n)}{n^3 - n!} \to 0.$

$$\boxed{\frac{\sqrt{n^2 - n + 1} - 2n}{n+1}}$$

$$\frac{\sqrt{n^2 - n + 1} - 2n}{n+1} = \frac{\sqrt{1 - 1/n + 1/n^2} - 2}{1 + 1/n} \to \frac{1-2}{1} = -1$$

ESERCIZIO : 3.3. *Sia a_n una successione convergente al numero reale L. Fare un esempio di un caso in cui $1/a_n$ non tende ad $1/L$."*

Soluzione:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} a_n = L\right\} \text{ AND } \{L \neq 0\} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

Quindi l'unica possibilità è quella di $L = 0$.

Esempi:

- $\{a_n = 1/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ diverge a $+\infty$,
- $\{a_n = (-1)^n/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$ non è neanche regolare.

ESERCIZIO : 3.4. *Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n a_n + 1}{n^2 + 2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Soluzione:

Sia $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq M$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}}$$

$$\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \leq M\frac{1}{n+1} \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n}$$

L'ipotesi $\{a_n\}$ limitata non consente di prevedere nulla sulla $\{n\,a_n\}$:

- se ad esempio fosse $a_n = (-1)^n$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe non regolare,
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n$ la successione $\{n\,a_n\}$, fatta di tutti 1 sarebbe convergente a 1
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n^2$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe convergente a zero.
- ecc. ecc.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2}}$$

$$\left|\frac{n\,a_n+1}{n^2+2}\right| \leq \left(\frac{|a_n|}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq \left(\frac{M}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}}$$

$$\left|\frac{n^3}{a_n}\right| > \frac{n^3}{M}$$

disuguaglianza che implica che $\{\left|\frac{n^3}{a_n}\right|\}$ è divergente.

ESERCIZIO : 3.5. *Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A\,n + B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna?*

Soluzione:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \geq a_n \quad \rightarrow \quad (n+1)^2 + A\,(n+1) + B \geq n^2 + A\,n + B$$

che svolti i conti produce

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ 2n + 1 + A \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3 + A \geq 0 \quad \rightarrow \quad A \geq -3$$

Quindi le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ sono strettamente crescenti per $A \geq -3$: il valore di B non influisce sul carattere di monotonia della successione in alcun modo.

Basta riflettere sul grafico della funzione $f(x) = x^2 + Ax + B$ per riconoscere che al crescere di x, a destra dell'ascissa $x_V = -A/2$ del vertice V della parabola i valori di $f(x)$ aumentano.

Quindi, qualunque siano A e B le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ sono sempre definitivamente strettamente crescenti.

Quindi le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ non sono mai decrescenti.

ESERCIZIO : 3.6. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

i. *dimostrare che la successione è a termini positivi;*

ii. *mostrare che la successione è monotona decrescente;*

iii. *calcolare il limite di a_n per $n \to \infty$.*

Soluzione:

- Il primo termine $a_0 = 2$ è maggiore di $\sqrt{2}$: inoltre

$$a_n > \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a_{n+1} > \sqrt{2}$$

Infatti

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{a_n^2+2}{2a_n}-\sqrt{2}=\frac{a_n^2-2a_n\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{2a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}>0$$

- La successione $\{a_n\}$ è decrescente: infatti $\sqrt{2}<a_1<a_0$ e

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)<a_n \Leftrightarrow \frac{2}{a_n}<a_n \Leftrightarrow 2<a_n^2$$

- La successione $\{a_n\}$ **limitata e decrescente** è quindi convergente: detto ℓ il suo limite devono riuscire soddisfatte le seguenti proprietà
  - $a_n \geq \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \ell \geq \sqrt{2}$
  - $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\ell$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{2}{\ell}\right)$

  da cui

$$\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{2}{\ell}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\ell}=\ell \quad \rightarrow \quad \ell^2=2$$

  Sapendo del resto che $\ell \geq \sqrt{2}$ si deduce che

$$\ell=\sqrt{2}$$

ESERCIZIO : 3.7. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=2a_n+1.$$

i. *Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;*

ii. *dimostrare che la successione a_n è divergente;*

iii. *determinare la forma esplicita di a_n.*

Soluzione:

- La successione è formata da tutti numeri positivi; infatti $a_1=1$ è positivo e, se a_n è positivo allora $a_{n+1}=2a_n+1>1$ è anch'esso positivo.

  É inoltre evidente che, essendo tutti gli a_n positivi riesce anche

$$a_{n+1}=2a_n+1>a_n+1>a_n$$

  e quindi si tratta di una successione crescente.

- Riesce inoltre $a_n \geq n$ infatti $a_1 \geq 1$ e se $a_n \geq n$ allora $a_{n+1} = 2a_n + 1 \geq 2n+1 > n+1$, da cui per induzione è provato che $a_n \geq n$ e quindi che la successione $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty$.
- Consideriamo i primi termini

$$\begin{array}{lll} a_1 & = 1 & = 1 \\ a_2 & = 2a_1 + 1 & = 2 + 1 \\ a_3 & = 2a_2 + 1 & = 2^2 + 2 + 1 \\ a_4 & = 2a_3 + 1 & = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ \dots & & \\ a_n & = 2a_{n-1} + 1 & = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \end{array}$$

Per provare che la formula

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

sia vera occorre dimostrarla per induzione:

- per $n = 1$ la formula è giusta,
- se è vera per l'ordine n, cioè se $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ allora

$$a_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

che riconosce come la formula sia valida anche per l'ordine $n+1$ successivo.

Quindi la formula è vera per ogni n.

La formula può essere scritta in modo utile ricordando la nota espressione della somma

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

che nel caso $r = 2$ produce

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

4. Serie, funzioni continue

ESERCIZIO : 4.1. *Discutere il carattere delle seguenti serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{2^n+n!}$$

Soluzione:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$: Denotiamo con $a_n = \frac{1}{2^n}$ il termine generico: si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 1/2$, convergente con somma

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}$ i termini $\frac{n+1}{3n+8}$ non hanno limite zero, quindi la serie non ï¿½ convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n}$ i termini verificano la disuguaglianza

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; 0 \le \frac{1}{n^3+n^2+n} \le \frac{1}{n^3}$$

e pertanto costituiscono una serie convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ I termini a_n verificano definitivamente la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2} < 1$$

Quindi i termini della serie sono definitivamente minori di quelli di una serie geometrica convergente: quindi la serie ï¿½ convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}$ I termini a_n verificano la relazione

$$a_n < \frac{n!}{n^n}$$

e i termini $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$ formano una serie convergente in quanto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \frac{1}{e} < 1$$

e quindi sono addendi definitivamente maggiorati da una serie geometrica convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n + n^3}{2^n + n!}}$ Tenuto presente che riesce definitivamente

$$\frac{4^n + n^3}{2^n + n!} \leq \frac{4^n + 4^n}{n!} = 2\frac{4^n}{n!}$$

i termini sono maggiorati dai termini della serie esponenziale che ï¿½ convergente, si riconosce che la serie assegnata ï¿½ convergente.

ESERCIZIO : 4.2. *Studiare la convergenza assoluta delle serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{3^n + 1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Soluzione:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{3^n + 1}}$

$$\left|\frac{(-1)^n n}{3^n + 1}\right| = \frac{n}{3^n + 1} \leq \frac{n}{3^n}$$

Tenuto presente che gli addendi a_n di quest'ultima verificano la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1$$

si riconosce che la serie assegnata ï¿½ assolutamente convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}$

$$\left|\cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

si riconosce che i termini sono maggiorati, in modulo, dai termini di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{2}$ convergente: quindi la serie assegnata ï¿½ assolutamente convergente.

ESERCIZIO : 4.3. *Date $\{a_n\}$ una successione limitata e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è assolutamente convergente.*

Soluzione:

Poichï¿½ esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ allora

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M|b_n|$$

Pertanto i termini della serie $\sum_n a_n b_n$ sono maggiorati in modulo da quelli di una serie convergente: pertanto la serie dei prodotti assegnata ï¿½ assolutamente convergente.

ESERCIZIO : 4.4. *Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente, dimostrare che anche $\sum_n a_n^2$ é assolutamente convergente.*

Soluzione:

La serie $\sum_n |a_n|$ ï¿½ convergente, quindi

$$|a_n| \to 0 \Rightarrow |a_n^2| = |a_n|^2 \leq |a_n|$$

La serie dei quadrati ha quindi i termini maggiorati da quelli di una serie convergente quindi la serie dei quadrati ï¿½ convergente.

ESERCIZIO : 4.5. *Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni $\sqrt{x^2 - x^3}$, $\quad \mathrm{sgn}(x)$, $\quad x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$.*

Soluzione:

$\boxed{\sqrt{x^2 - x^3}}$ É definita per $x^2 - x^3 \geq 0$ quindi $x^2(1 - x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.

É continua in tutto il suo insieme di definizione.

$\boxed{\mathrm{sgn}(x)}$ É definita in tutto $\mathbb{R}$ ma ï¿½ continua solo per $x \neq 0$.

$\boxed{x\,\mathrm{sgn}(\sin x)}$ É definita in tutto $\mathbb{R}$ ma ï¿½ continua solo per $x \neq k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ESERCIZIO : 4.6. *In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$*

$$f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}}$$ Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(a(x-2) = -2a = f(0) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(2x + x^2 + 6) = 6 \end{cases}$$

la funzione ï¿½ continua in $x = 0$ se e solo se $-2a = 6$ ovvero $a = -3$. In tutti gli altri punti $x \neq 0$ la funzione ï¿½ continua perchï¿½ coincide con funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$.

$$\boxed{h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}}$$

Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

limiti sinistro e destro diversi, si conclude che non esiste alcun valore di a per il quale la funzione $h(x)$ assegnata sia continua.

ESERCIZIO : 4.7. *Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{3x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \cos(x)$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{4x}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}=9\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}=\frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\left(2\,\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=-2$$

$$\forall n:\cos(2n\pi)=1,\ \cos(2n\pi+\pi/2)=0\quad\to\quad\lim_{x\to+\infty}\cos(x)\quad non\,esiste$$

ESERCIZIO : 4.8. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$*

$$\sqrt{x^2-3x}-x,\qquad\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\qquad\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\,.$$

Soluzione:

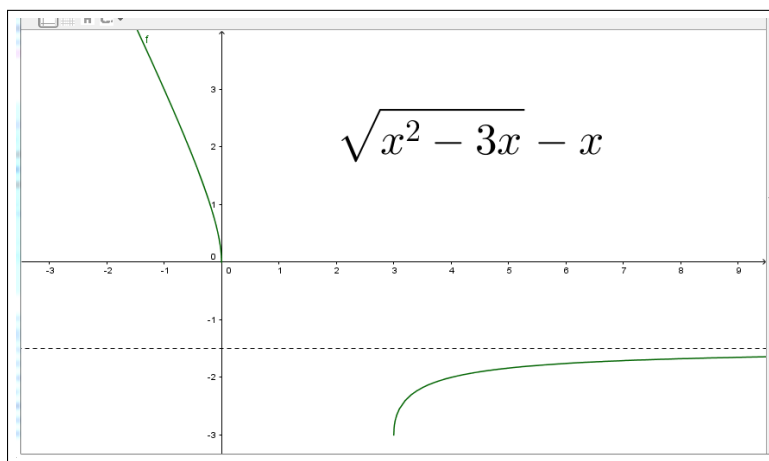



FIGURA 21. $\sqrt{x^2-3x}-x$

$$\sqrt{x^2-3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2-3x}-x)\cdot(\sqrt{x^2-3x}+x)}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}=-3\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x}+1}=$$

$$=-3\cdot\frac{1}{\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-3/x}+1}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=-\dfrac{3}{2}\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=+\infty\end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{|x|}\,\frac{1}{\sqrt{1+4/x^2}}\quad\to\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=-1\end{cases}$$

$$\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)=\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2+3}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\right)=\ln(2)$$

ESERCIZIO : 4.9. *Sia $f(x)=x(x-e^{-x})$: dimostrare che l'equazione $f(x)=1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo* $[0,2]$.

Soluzione:

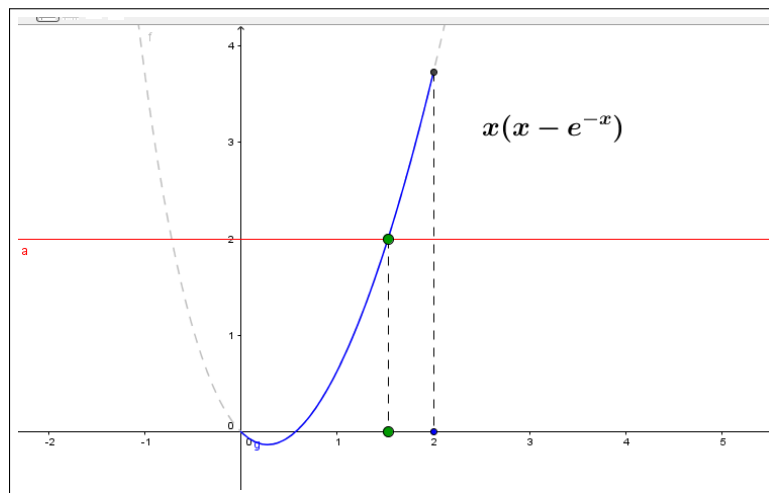



FIGURA 22. Esercizio 9: $f(x)=x(x-e^{-x})$, $x\in[0,2]$

$f(x) = x(x - e^{-x})$ ï¿½ continua in $[0,2]$: $f(0) = 0$, $f(2) = 2(2 - e^{-2}) > 2$ (avendo tenuto conto che $e^{-2} < 1$) pertanto per il teorema dei valori intermedi l'equazione $f(x) = \eta$ ha soluzioni $x \in [0,2]$ per ogni $\eta \in [0,2]$, quindi in particolare ha soluzione l'equazione $f(x) = 1$.

ESERCIZIO : 4.10. *Si determini l'immagine delle funzioni* $\arctan(e^x)$ *e* $e^{|x-1|}$ *per* $x \in (-1,2]$*, e si dica se si tratta di funzioni iniettive.*

Soluzione:

$\arctan(e^x)$

Le funzioni $\arctan(x)$ e e^x sono entrambe continue monotone strettamente crescenti, quindi anche la funzione composta $\arctan(e^x)$ ï¿½ continua monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$: si tratta quindi di una funzione iniettiva.

L'immagine ï¿½ pertanto l'intervallo

$$\left(\lim_{x\to -1} \arctan(e^x), \lim_{x\to +2} \arctan(e^x)\right] = \left(\arctan(e^{-1}), \arctan(e^2)\right]$$

$e^{|x-1|}$

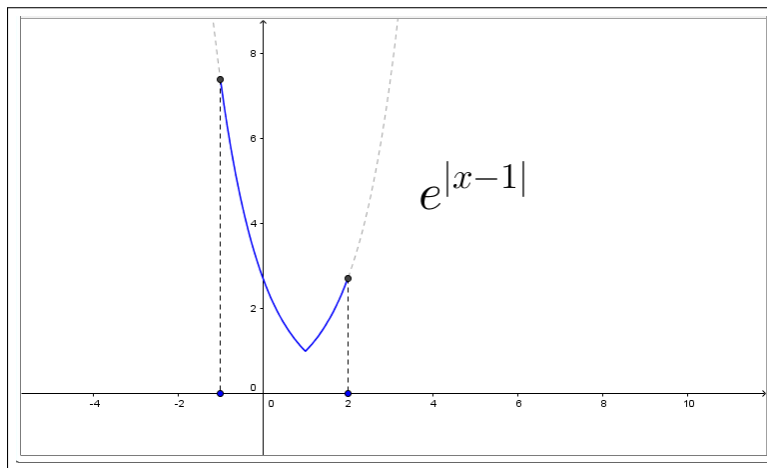



FIGURA 23. $e^{|x-1|}$ $x \in [-1,2]$

Tenuto conto che l'immagine della funzione $|x-1|$ continua in $(-1,2]$ ï¿½ l'intervallo $[0,2]$ e che si tratta di una funzione non iniettiva (ad esempio $|0-1| =$

$|2-1|$) e tenuto conto che l'esponenziale e^x ï¿½ una funzione continua monotona strettamente crescente si riconosce che:

- la funzione $e^{|x-1|}$ non ï¿½ iniettiva (ad esempio $e^{|0-1|} = e^{|2-1|}$),
- ha immagine l'intervallo $[e^0, e^2] = [1, e^2]$.

ESERCIZIO : 4.11. *(impegnativo) Sia $p(x)$ un polinomio di grado pari con coefficiente di grado massimo positivo: mostrare che $p(x)$ ha minimo.*

Soluzione:

L'affermazione ï¿½ ben nota se $p(x) = ax^2 + bx + c$: il grafico, essendo $a > 0$, ha la ben nota forma della parabola rivolta verso l'alto. Il minimo ï¿½ $p(-b/2a)$ ordinata del "*vertice*" della parabola.

In generale se $p(x) = a x^{2m} + \dots$ ï¿½ di grado pari con $a > 0$ non solo si ha $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$ ma la derivata $p'(x) = 2m a x^{2m-1} + \dots$ ï¿½ un polinomio di grado dispari

$$a > 0 \to \lim_{x\to-\infty} p'(x) = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} p'(x) = +\infty$$

Esiste quindi M tale che

$$x \leq -M \to p'(x) < 0, \qquad M \leq x \to p'(x) > 0$$

ne segue pertanto che $p(x)$ ï¿½ decrescente sull'intervallo $(-\infty, M)$ e crescente su quello $(M, +\infty)$ da cui segue

$$x \leq -M \to p(x) \geq p(-M), \qquad M \leq x \to p(M) \leq p(x)$$

Sia $m = p(x_m)$ il minimo di $p(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $-M \leq x \leq M$: ï¿½ facile riconoscere che tale valore ï¿½ il minimo di $p(x)$:

$$\begin{array}{lll} x \leq -M & \to p(-M) & \leq p(x) \\ -M \leq x \leq M & \to p(x_m) & \leq p(x) \\ M \leq x & \to p(M) & \leq p(x) \end{array}$$

Tenuto presente che $p(x_m) \leq p(-M), \ p(x_m) \leq p(M)$ riesce

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x_m) \leq p(x)$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Il risultato ottenuto si puï¿½ generalizzare ad ogni funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ che diverga a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$: la dimostrazione di tale risultato, meno semplice, si serve del teorema di Bolzano che riconosce la possibilitï¿½ di estrarre da ogni successione $\{x_1, x_2, \dots\}$ limitata una sottosuccessione convergente.*

ESERCIZIO : 4.12. *(impegnativo) Sia $f : I \to I$ continua in $I = [a,b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. [Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $f(x) - x$ in $[a,b]$.]*

Soluzione:

Tenuto conto che $\forall x \in [a,b] : f(x) \in [a,b]$ riesce

$$f(a) - a \geq 0, \quad f(b) - b \leq 0$$

cioè , posto $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\varphi(a) \geq 0, \quad \varphi(b) \leq 0$$

quindi, per il teorema d'esistenza degli zeri esiste $\overline{x} \in [a,b]$ in cui $\varphi(\overline{x}) = 0$ e quindi

$$\exists \overline{x} \in [a,b] : f(\overline{x}) = \overline{x}$$

5. Massimi e minimi, derivate

ESERCIZIO : 5.1. *Dire se esistono massimo e minimo della funzione* $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ *in* $[2, 11]$. *Cosa si può dire in* $\mathbb{R}$? *Rispondere alle stesso domande nel caso*
$f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$.

Soluzione:

$f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ in $[2, 11]$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2, 11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.

Tenuto presente che

$$f'(x) = 7x^6 - 4\pi x^3 = x^3(7x^3 - 4\pi)$$

è positiva per $x \geq 2$ si riconosce che $f(x)$ è crescente in $[2, 11]$ e pertanto

$$\min_{x \in [2,11]} f(x) = f(2), \qquad \max_{x \in [2,11]} f(x) = f(11)$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ di grado dispari non ha nè minimo nè massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$ in $[2, 11]$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2, 11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.

Tenuto presente che

$$f'(x) = 6x^5 - 10\sqrt{2}x^4 = x^4(6x - 10\sqrt{2}), \qquad f'\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right) = 0$$

si riconosce che $f'(x)$ è negativa per $2 < x < \frac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva per $\frac{10\sqrt{2}}{6} < x < 11$. Quindi $f(x)$ è decrescente nel primo tratto e crescente nel secondo: si ha pertanto

$$\min_{x\in[2,11]} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\max_{x\in[2,11]} f(x) = \max\{f(2), f(11)\}$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$ di grado pari ha minimo ma non ha massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

Tenuto presente che $f'(x)$ è negativa a sinistra di $\frac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva a destra, cioè $f(x)$ è decrescente a sinistra di $\frac{10\sqrt{2}}{6}$ e crescente a destra, si riconosce che

$$\min_{x\in R} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

ESERCIZIO : 5.2. *Utilizzando le regole per prodotto e rapporto, calcolare le derivate prime di*

$$e^x \sin x, \qquad \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad \frac{\cos x}{1+\sin x}, \qquad x\ln x, \qquad x\arctan x.$$

Soluzione:

$$f(x) = u(x)\cdot v(x) \qquad \to \qquad f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$
\begin{array}{lll}
f(x) & \to & f'(x) \\
e^x \cdot \sin(x) & \to & e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) \\
\dfrac{x+1}{x^2+1} & \to & \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
\dfrac{\cos x}{1+\sin(x)} & \to & \dfrac{(-\sin(x)) \cdot (1+\sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\
x \ln(x) & \to & 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} \\
x \arctan(x) & \to & 1 \cdot \arctan(x) + x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}
\end{array}
$$

ESERCIZIO : 5.3. *Utilizzando la regole di derivazione di funzione composta, calcolare la derivata prima di*

$$\cos(1-x^2), \qquad \ln(1+e^{x^2}), \qquad \sin(\sqrt{x^2+1}), \qquad \arctan(e^{-x^2}).$$

Soluzione:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) & \rightarrow & f'(x) \\
\cos(1-x^2) & \rightarrow & 2x\sin(1-x^2) \\
\ln(1+e^{x^2}) & \rightarrow & \dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} \\
\sin(\sqrt{x^2+1}) & \rightarrow & \cos(\sqrt{x^2+1})\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\arctan(e^{-x^2}) & \rightarrow & \dfrac{-2xe^{-x^2}}{1+(e^{-x^2})^2}
\end{array}$$

ESERCIZIO : 5.4. *Utilizzando le regole di derivazione, calcolare nell'insieme sono definite, le derivate di*

$$x(1-x^2), \qquad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \qquad \frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \qquad x(\ln x+\sin x), \qquad (x^2+1)\arctan x.$$

Soluzione:

$$f(x) \quad \to \quad f'(x)$$

$$x(1-x^2) \quad \to \quad 1\cdot(1-x^2)+x(-2x)$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \quad \to \quad \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2}$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \quad \to \quad \frac{(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$= -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$\frac{1+\cos^2(x)}{2\sin(x)} \quad \to \quad \frac{-2\cos(x)\sin(x)\cdot(2\sin(x))-(1+\cos^2(x))\cdot(2\cos(x))}{(2\sin(x))^2}$$

$$x(\ln(x)+\sin(x)) \quad \to \quad 1\cdot(\ln(x)+\sin(x))+x\left(\frac{1}{x}+\cos(x)\right)$$

$$(x^2+1)\arctan(x) \quad \to \quad 2x\arctan(x)+\frac{x^2+1}{1+x^2}$$

$$= 2x\arctan(x)+1$$

ESERCIZIO : 5.5. *Dire quale delle seguenti funzioni è derivabile in $x=0$*

$$|x|\,\sin x, \qquad |x|\,(x^2+1), \qquad \sqrt{x}\,\sin x, \qquad (x^2+1)\sqrt{x}.$$

Soluzione:

$$\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to \; f'(0) \\[2ex]
|x|\,\sin x & \dfrac{|h|\sin(h)}{h} & = |h|\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to \; 0 \\[2ex]
|x|\,(x^2+1) & \dfrac{|h|(h^2+1)}{h} & = h|h| + \dfrac{|h|}{h} & \to \; \textit{non converge} \\[2ex]
\sqrt{x}\,\sin x & \dfrac{\sqrt{h}\sin(h)}{h} & = \sqrt{h}\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to \; 0 \\[2ex]
(x^2+1)\sqrt{x} & \dfrac{(h^2+1)\sqrt{h}}{h} & = h\sqrt{h} + \dfrac{1}{\sqrt{h}} & \to \; \textit{non converge}
\end{array}$$

ESERCIZIO : 5.6. *Supponendo κ, T, b costanti assegnate, ricavare dalle seguenti equazioni di stato*

$$pV = \kappa T, \qquad\qquad p(V - nb) - \kappa T = 0$$

il volume V come funzione della pressione p. Usare tali espressioni per determinare le derivate $\dfrac{dV}{dp}$.

Soluzione:

$$\begin{array}{lll}
pV = \kappa T & \to \; V = \dfrac{\kappa T}{p} & \to \; \dfrac{dV}{dp} = -\dfrac{\kappa T}{p^2} \\[2ex]
p(V-nb) - \kappa T = 0 & \to \; V = nb + \dfrac{\kappa T}{p} & \to \; \dfrac{dV}{dp} = -\dfrac{\kappa T}{p^2}
\end{array}$$

ESERCIZIO : 5.7. *Studiare la continuità e derivabilità in $x = 0$ delle funzioni*

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \qquad e \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La derivata della funzione g è continua in 0?

Soluzione:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to \quad f'(0) \\
x\sin(1/x) & \dfrac{h\sin(1/h)}{h} & = \sin(1/h) & \to \quad \textit{non converge} \\
x^2\sin(1/x) & \dfrac{h^2\sin(1/h)}{h} & = h\sin(1/h) & \to \quad 0
\end{array}
$$

$$
g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases} \quad \to \quad g'(x) \text{ non é continua in } x = 0
$$

ESERCIZIO : 5.8. *In $x_0 = 0$, studiare la continuità, la derivabilità, l'esistenza della derivata seconda di*

$$
f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}
$$

Soluzione:

$$
f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases}
$$

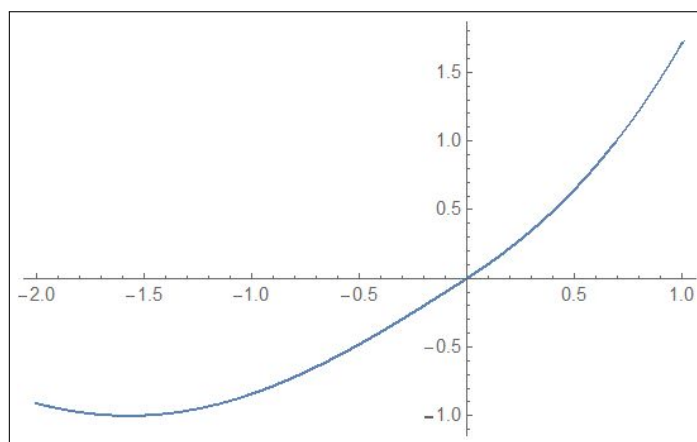



FIGURA 24. Esercizio 8 $f(x)$

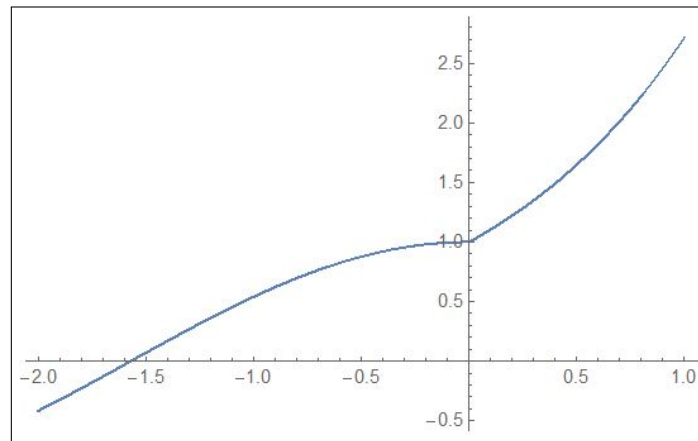



FIGURA 25. Esercizio 8 $f'(x)$

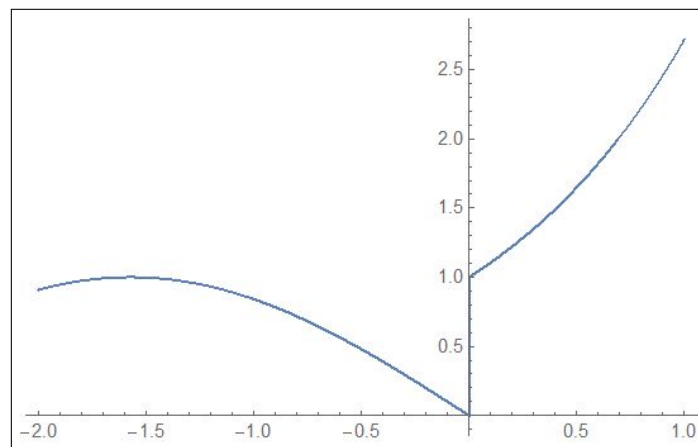



FIGURA 26. Esercizio 8 $f''(x)$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h)}{h}=1 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h}=1 \end{array}\right. \quad \to \quad f'(0)=1$$

si riconosce che esiste la derivata prima di $f(x)$ in $x=0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x<0$ che per $x>0$ $f(x)$ è ovviamente derivabile si ha che:

$$f'(x) := \begin{cases} \cos(x) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ e^x & x>0, \end{cases}$$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x = 0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\begin{array}{lll} \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\cos(h)-1}{h}, & \to & 0 \\ \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{e^h-1}{h}, & \to & 1 \end{array}$$

I due limiti sono diversi, quindi la derivata seconda non esiste in $x = 0$.

Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

$$g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}$$

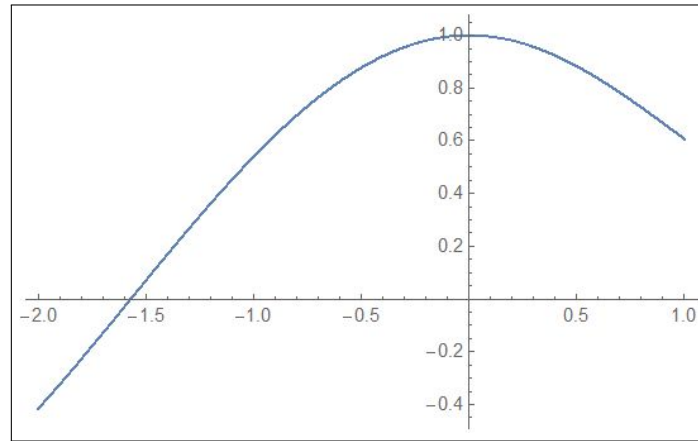



FIGURA 27. Esercizio 8 $g(x)$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^-} \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0 \\ \lim_{h\to 0^+} \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{e^{-h^2/2}-1}{h} = 0 \end{array}\right. \quad \to \quad g'(0) = 0$$

si riconosce che esiste la derivata prima di $g(x)$ in $x = 0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x < 0$ che per $x > 0$ $g(x)$ ï¿$\frac{1}{2}$ ovviamente derivabile si ha che:

$$g'(x) := \begin{cases} -\sin(x) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -xe^{-x^2/2} & x > 0, \end{cases}$$

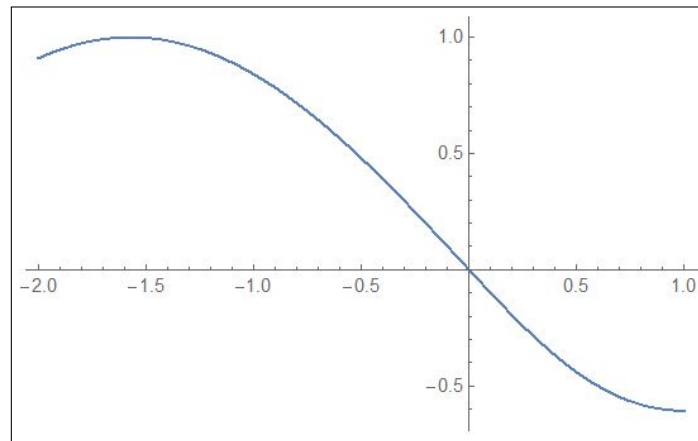



FIGURA 28. Esercizio 8 $g'(x)$

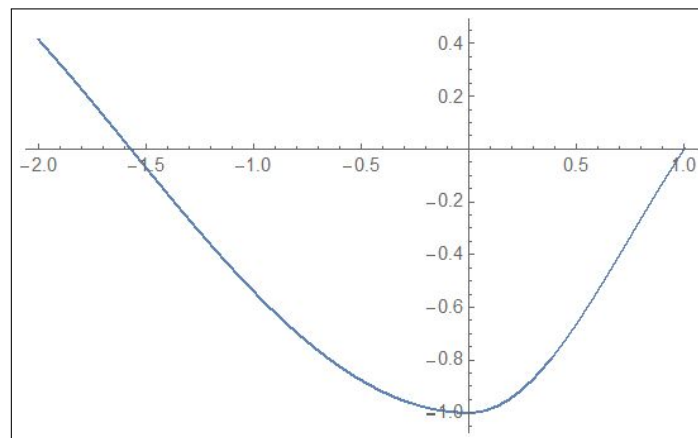



FIGURA 29. Esercizio 8 $g''(x)$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x = 0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sin(h)}{h}, \qquad \to \quad -1$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-he^{-h^2/2}}{h}, \qquad \to \quad -1$$

I due limiti sono uguali, quindi la derivata seconda esiste in $x = 0$ e vale -1.

Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

OSSERVAZIONE 5.1. *Il grafico della funzione $f(x)$ dell'Esercizio 8 appare del tutto regolare: non si notano nè punti angolosi nè cuspidi.*

Nulla lascia presumere la non esistenza della derivata seconda come invece si prevede guardando il grafico di $f'(x)$ che mostra in $x = 0$ un punto angoloso, e come si vede, in modo particolarmente esplicito guardando il grafico di $f''(x)$ per $x \neq 0$.

Conclusione: *la nostra sensibilità visiva guardando una curva non distingue eventuali discontinuità a livello di derivata seconda. Una conclusione analoga può farsi pensando alla curvatura: l'occhio non avverte discontinuità della curvatura e non riconosce eventuali irregolarità collegate a tali discontinuità.*

Ben diversa è l'attenzione progettuale nel disegno dei raccordi autostradali, nei quali occorre per motivi di sicurezza, variare le curvature (quindi le derivate seconde) con continuità.

ESERCIZIO : 5.9. *Sia $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$ definita in $x \in \mathbb{R}$.*

- *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1, f(1))$ e $(-2, f(-2))$.*
- *Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0, f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$.*

Soluzione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
$\sqrt{1+4x^2}$	$\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}$	1	$\sqrt{5}$	$\dfrac{8}{2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}+\dfrac{8}{2\sqrt{5}}(x-1)$
		-2	$\sqrt{17}$	$\dfrac{-16}{2\sqrt{17}}$	$\sqrt{17}+\dfrac{-16}{2\sqrt{17}}(x+2)$

La retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $f'(x_0)$ pertanto:

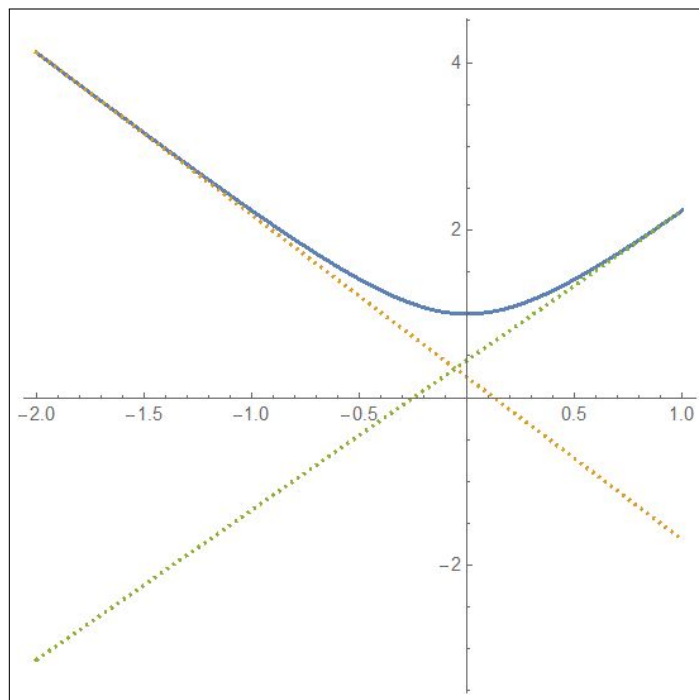



FIGURA 30. Esercizio 9 $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$

- retta orizzontale $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0$
- retta parallela alla $y = x \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \quad \rightarrow \quad x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
- retta parallela alla $y = -x \Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \quad \rightarrow \quad x_0 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

ESERCIZIO : 5.10. *Fissati $a, b > 0$, la funzione $U(R) := aR^{-12} - bR^{-6}$ definita per $R > 0$ prende il nome di* **potenziale di Lennard–Jones**.
Determinare la derivata U', gli intervalli in cui U è monotona, il minimo di U in $(0, +\infty)$.

Soluzione:

$$U'(R) = -12\,a\,R^{-13} + 6\,b\,R^{-7} = \frac{6}{R^7}\left(b - \frac{2a}{R^6}\right)$$

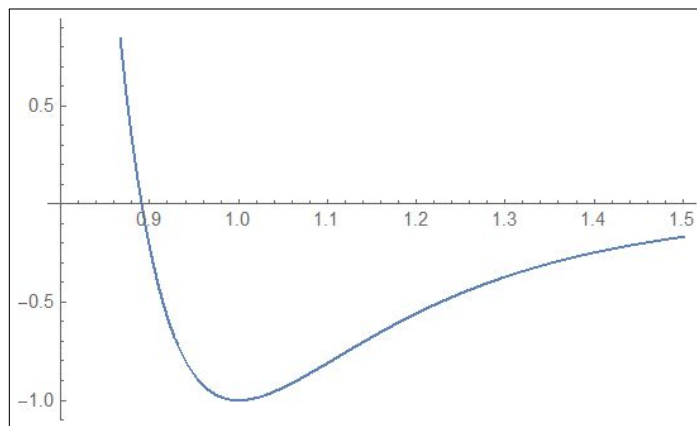



FIGURA 31. Esercizio 10 $U(R) = \frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{R^6}$

Nell'intervallo $\left(0, \sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}\right)$ la derivata è negativa mentre in $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}, \infty\right)$ è positiva.

Quindi nel primo intervallo $U(R)$ è decrescente e nel secondo è crescente.

Il minimo è raggiunto nel punto $R_0 = \sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}$ e vale $-\dfrac{b^2}{4a}$.

ESERCIZIO : 5.11. *Sia $\omega > 0$. Dimostrare che tutte le funzioni della forma $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ verificano la relazione $f'' + \omega^2 f = 0$.*

Soluzione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\cos(\omega x) && +b\sin(\omega x) \\
f'(x) &= -a\,\omega\sin(\omega x) && +b\,\omega\cos(\omega x) \\
f''(x) &= -a\,\omega^2\cos(\omega x) && -b\,\omega^2\sin(\omega x) \quad = -\,\omega^2 f(x)
\end{aligned}$$

6. Lagrange, Hopital, Taylor

ESERCIZIO : 6.1. *Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.*

Soluzione:

Tenuto conto che $f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e che

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 4) + e^x(2x - 2) = e^x\left\{x^2 + 2\right\} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si riconosce (Teorema di Lagrange) che $f(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO : 6.2. *Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati*

$$f(x) = \frac{x - x^2}{2 + x^2} \quad in\ [0,1] \qquad g(x) = (x^2 - 1)\,e^x \quad in\ [-1,1] \qquad h(x) = 2x(1 - x^2) \quad in\ [0,1].$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = \frac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0,1]}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x)(2 + x^2) - (x - x^2)(2x)}{(2 + x^2)^2} = -\frac{x^2 + 4x - 2}{(2 + x^2)^2}$$

Tenuto conto che

$$x^2 + 4x - 2 < 0 \quad \text{per } -2 - \sqrt{6} < x < -2 + \sqrt{6} \approx 0,4$$

Quindi

$$f'(x) > 0\ \forall x \in [0, -2 + \sqrt{6}), \qquad f'(x) < 0\ \forall x \in (-2 + \sqrt{6}, 1]$$

Pertanto, abbreviando con $\uparrow$, $\downarrow$ le parole *crescente* e *decrescente*,

$$f(x) \uparrow\ \forall x \in [0, -2 + \sqrt{6}), \qquad f(x) \downarrow\ \forall x \in (-2 + \sqrt{6}, 1]$$

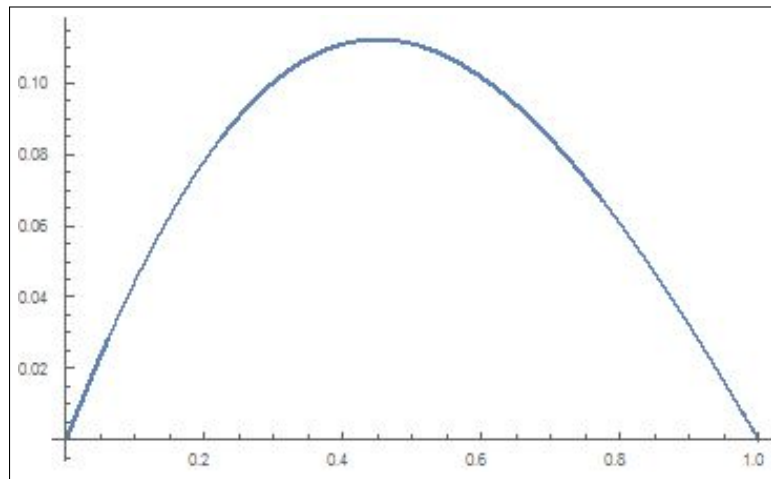



FIGURA 32. $f(x) = \dfrac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0, 1]$

Quindi

$$\max_{x \in [0,1]} f(x) = f(-2 + \sqrt{6}) \approx 0.11, \qquad \min_{x \in [0,1]} f(x) = \min\{f(0), f(1)\} = 0$$

$\boxed{g(x) = (x^2 - 1)\, e^x \quad \text{in } [-1, 1]}$

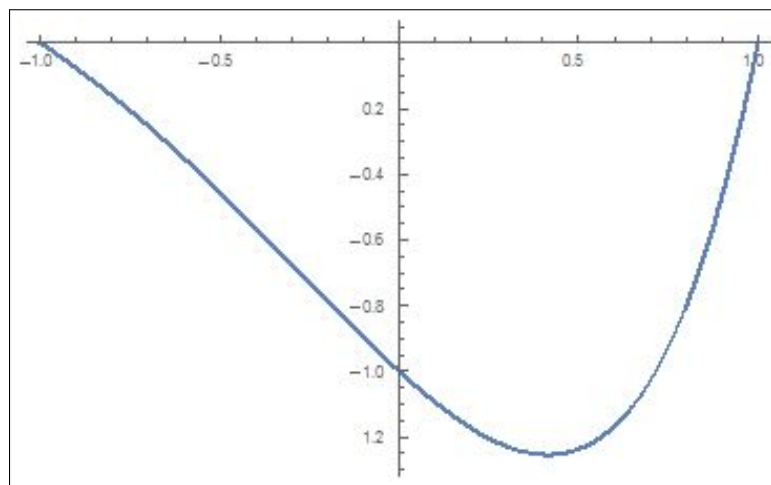



FIGURA 33. $g(x) = (x^2 - 1)\, e^x \quad \text{in } [-1, 1]$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 1) \cdot e^x \; = \; (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} x^2+2x-1>0 & x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},+\infty), \\ x^2+2x-1<0 & x\in(-1-\sqrt{2},\,-1+\sqrt{2}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{llllll} x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f'(x)<0 & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to & f'(x)>0 \\ x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f(x)\downarrow & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to & f(x)\uparrow \end{array}$$

Quindi

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1+\sqrt{2}) \approx -1.25, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x) = \max\{f(-1), f(1)\} = 0$$

$$\boxed{h(x) = 2x(1-x^2) \quad \text{in } [0,1]}$$

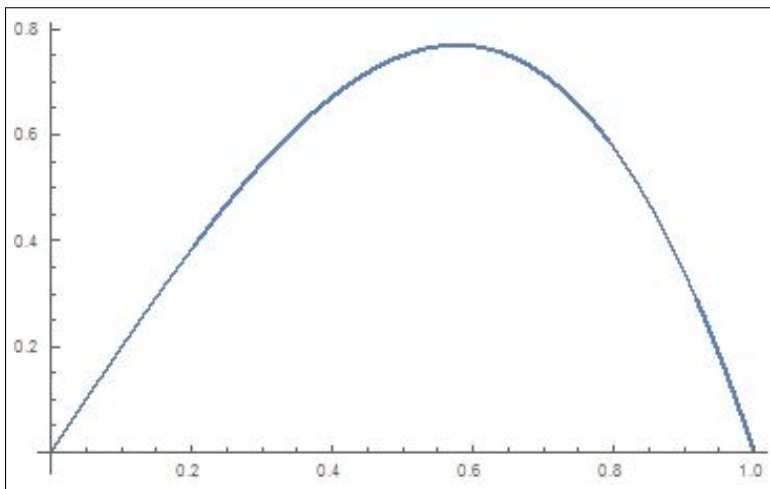



FIGURA 34. $h(x) = 2x(1-x^2) \quad \text{in } [0,1]$

$$f'(x) = 2(1-x^2) + 2x(-2x) = 2-6x^2$$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} 2-6x^2>0 & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty), \\ 2-6x^2<0 & x\in(-\sqrt{1/3},\,+\sqrt{1/3}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{llllll} x\in(-\sqrt{1/3},+\sqrt{1/3}) & \to & f'(x)>0 & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty) & \to & f'(x)<0 \\ x\in(0,\,\sqrt{1/3}) & \to & f(x)\uparrow & x\in(\sqrt{1/3},\,1] & \to & f(x)\downarrow \end{array}$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx 0.77, \qquad \min_{x\in[0,1]} f(x) = \min\{f(0), f(1)\} = 0$$

ESERCIZIO : 6.3. *Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ riesce*

$$\left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| \leq |x-y|, \qquad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|, \qquad \left|e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\,|x-y|$$

Soluzione:

$\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$	$\sin^2(x) - \sin^2(y) = (x-y)\,\sin(2\xi)$
$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) - \arctan(y) = (x-y)\,\frac{1}{1+\xi^2}$
$\left(e^{-x^2/2}\right)' = -x\,e^{-x^2/2}$	$e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2} = (x-y)\left(-\xi\,e^{-\xi^2/2}\right)$

Osservate le seguenti maggiorazioni per le tre derivate prime

$$|\sin(2x)| \leq 1, \qquad \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq 1, \qquad \left|-x\,e^{-x^2/2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

si riconoscono le tre stime

$$\begin{aligned}
\left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| &\leq |x-y|, \\
|\arctan(x) - \arctan(y)| &\leq |x-y|, \\
\left|e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2}\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}}\,|x-y|
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 6.1. *Le stime delle derivate usate, stime che hanno giustificato le stime basate sul Teorema di Lagrange dell'Esercizio indicano che i grafici delle due funzioni* $\sin^2(x)$, $\arctan(x)$,

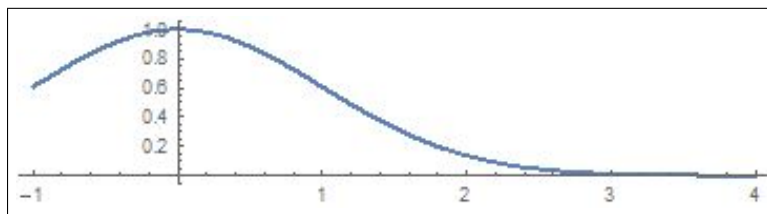



FIGURA 35. $e^{-x^2/2}$

hanno pendenze *limitate a non piú di* 45^0, *mentre la terza* $e^{-x^2/2}$ *ha* pendenze *limitate a non piú di* 30^0.

OSSERVAZIONE 6.2. *La stima* $\left|-xe^{-x^2/2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ *utilizzata sopra non è banale e può essere riconosciuta studiando il grafico della funzione* $f(x) = xe^{-x^2/2}$*:*

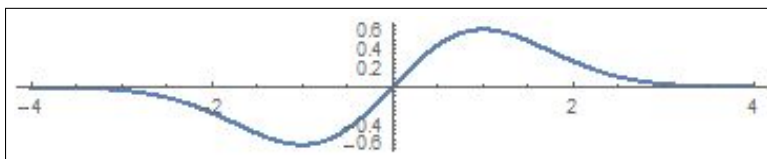



FIGURA 36. $f(x) = xe^{-x^2/2}$

- *si tratta di una funzione dispari,*
- *i limiti per* $x \to \pm\infty$ *sono zero,*
- *la derivata indica che* $f(x)$ *è crescente per* $x \in (-1,1)$ *e decrescente fuori di tale intervallo,*
- *quindi* $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$, $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(1)$

Ne segue pertanto $|f(x)| \leq f(1) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

ESERCIZIO : 6.4. *La probabilità che una molecola di massa m in un gas a temperatura T abbia velocità v è data dalla* **distribuzione di Maxwell–Boltzmann**[2]

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

dove k è la costante di Boltzmann. Trovare la velocità v_* *di massima probabilità.*

Soluzione:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}} \left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2}$$

[2] https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_di_Maxwell-Boltzmann

Posto

$$b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad a = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{b}, \quad x = \frac{v}{b}$$

riesce

$$f(x) = ax^2 e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$$

funzione crescente per $x \in [0,1]$ e decrescente per $x > 1$.
Il valore massimo si raggiunge pertanto nel punto stazionario $x_0 = 1$.

La velocità cha ha la probabilitá maggiore è pertanto $|v_0| = b$.

ESERCIZIO : 6.5. *Determinare tra i rettangoli di perimetro p assegnato quello di area massima. Ripetere l'esercizio per i triangoli rettangoli.*

Soluzione:

Rettangolo

Sia $2p > 0$ il perimetro assegnato: i due lati del rettangolo sono pertanto $x \in (0, p)$ e $p - x \in (0, p)$.

L'area è

$$a(x) = x(p-x), \quad \rightarrow \quad a'(x) = p - 2x$$

Il massimo si raggiunge evidentemente nel punto $x_0 = p/2$, scelta che indica come tra i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato il quadrato sia quello di area massima.

Triangolo rettangolo

Sia $p > 0$ il perimetro assegnato: i due cateti del triangolo rettangolo siano $x \in [0, p/2]$ ed $y \in [0, p/2]$, il terzo lato, l'ipotenusa, è naturalmente $\sqrt{x^2+y^2}$.

I due valori x ed y non sono indipendenti dal momento che deve valere la relazione pitagorica

$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = p \quad \rightarrow \quad y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)}$$

L'area è

$$a(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{px(p-2x)}{4(p-x)} \quad \rightarrow \quad a'(x) = \frac{p\left(p^2 - 4px + 2x^2\right)}{4(p-x)^2}$$

$$a'(x) > 0\,\forall x \in [0, \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p), \qquad a'(x) < 0\,\forall x \in [\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p,\, p/2)$$

Il triangolo rettangolo di perimetro p e area massima è pertanto il triangolo rettangolo isoscele che ha i cateti

$$x_0 = y_0 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p$$

Pertanto

$$\max_{x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p} a(x) = a\left(p(1-1/\sqrt{2})\right) = \frac{1}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)p^2 \approx 0.043\,p^2$$

ESERCIZIO : 6.6. *Dire per quali $a > 0$, la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-3x^2}}{1+ax}$ non ha né massimi, né minimi relativi.*

Soluzione:

Basta studiare per quali $a > 0$ la funzione $f(x)$ non ha punti stazionari:

$$f'(x) = -\frac{e^{-3x^2}\left(6ax^2+a+6x\right)}{(ax+1)^2}$$

É facile riconoscere che

$$6ax^2+a+6x \neq 0 \qquad \forall a > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pertanto per tali valori la funzione $f(x)$ non ha nè massimi nè minimi relativi.

ESERCIZIO : 6.7. *Individuare il minimo assoluto e tutti i punti di minimo assoluto delle funzioni*

$$f(x) = |x-1|+|x+1|, \qquad g(x) = |x-1|+|x|+|x+1|, \qquad h(x) = \sum_{k=-3}^{3}|x-k|$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = |x-1|+|x+1|}$$

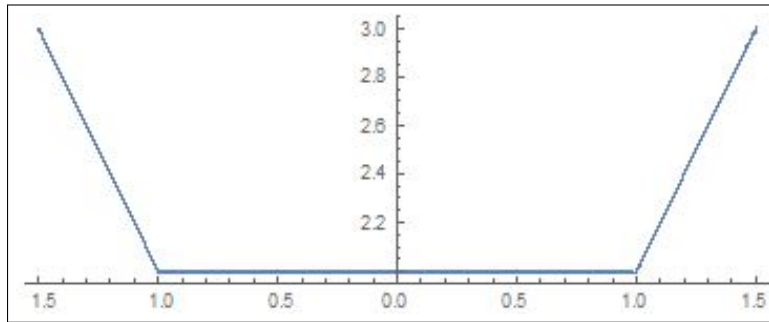



FIGURA 37. Esercizio 7: $f(x) = |x-1| + |x+1|$

I due addendi hanno espressione algebrica diversa a seconda che $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x-x-1 & -2x & \text{se}\, x < -1 \\ 1-x+x+1 & 2 & \text{se}\, -1 < x < 1 \\ x-1+x+1 & 2x & \text{se}\, 1 < x \end{cases}$$

Quindi il minimo vale 2 ed è assunto in corrispondenza di tutti i punti $x_0 \in [-1, 1]$.

$$\boxed{g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|}$$

Tenuto presente che $g(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}:\ g(x) \geq 0$$

si riconosce che esiste $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.

Tenuto presente che $g(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $g(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

Pertanto

$$\min_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \min\{g(-1), g(0), g(1)\} = \min\{3, 2, 3\} = 2$$

$$\boxed{h(x) = \sum_{k=-3}^{3} |x-k|}$$

Tenuto presente che $h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}:\ h(x) \geq 0$$

si riconosce che esiste $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} h(x)$.

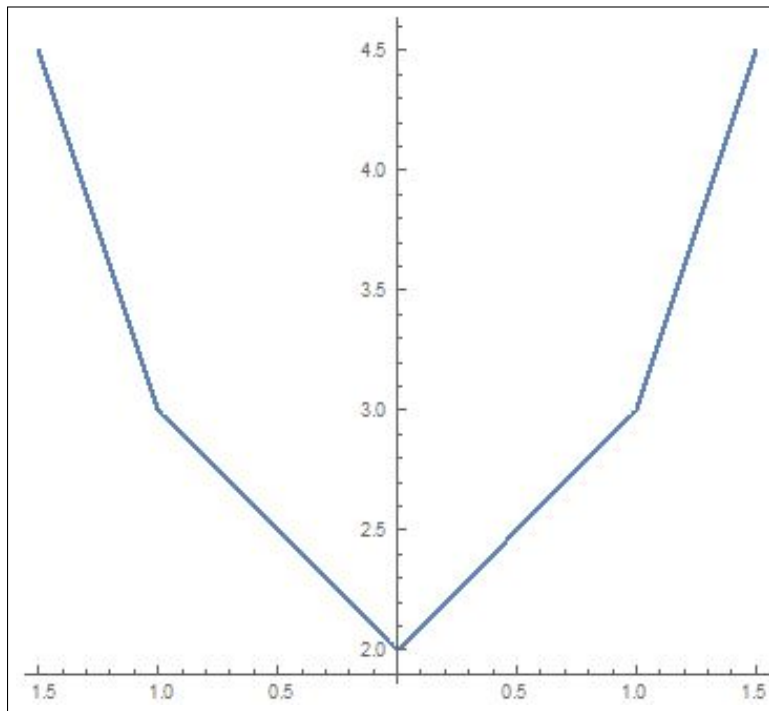



FIGURA 38. Esercizio 7: $g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$

Tenuto presente che $h(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $h(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \cdots \quad x_3 = 3$$

Pertanto

$$\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) \; = \; \min\{h(-3), \cdots, h(3)\} = h(0) = 12$$

ESERCIZIO : 6.8. *Calcolare servendosi del Teorema di de l'Hôpital i limiti:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x \sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} \right),$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x) + \sin(x)}{2x} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6xe^{3x^2}}{\sin(2x)+2xcos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{3x^2}}{\dfrac{\sin(2x)}{2x}+cos(2x)}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x\cdot\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2(x)-1}{\tan(x)+x/\cos^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)\sin(x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2(x)}{x}}{\cos(x)\dfrac{\sin(x)}{x}+1}=0$$

ESERCIZIO : 6.9. *Scrivere i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni, con punti iniziali e ordini assegnati,*

i. $f(x)=x-\sin x,\quad x_0=0,\ n=5,$ **ii.** $f(x)=e^x-\cos(2\pi x),\quad x_0=1,\ n=4,$

iii. $f(x)=\arctan x,\quad x_0=0,\ n=2,$ **iv.** $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=2,\ n=2,$

v. $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=0,\ n=3,$ **vi.** $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=2,\ n=3$

Soluzione:

$f(x)=x-\sin x,\ x_0=0,\ n=5$

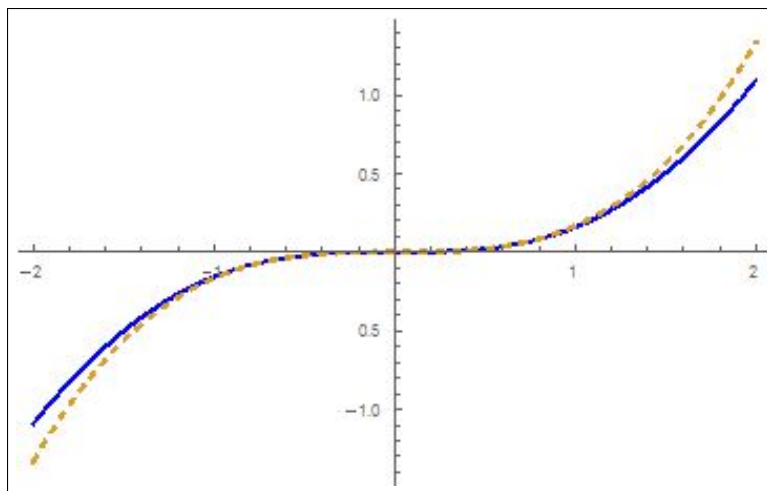



FIGURA 39. $f(x)=x-\sin x, x_0=0, n=5$

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ f''(0) & = & 0 \\ f^{[3]}(0) & = & 1 \\ f^{[4]}(0) & = & 0 \\ f^{[5]}(0) & = & -1 \end{cases} \quad \to \quad T_5(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5$$

$f(x) = e^x - \cos(2\pi x),\ x_0 = 1,\ n = 4$

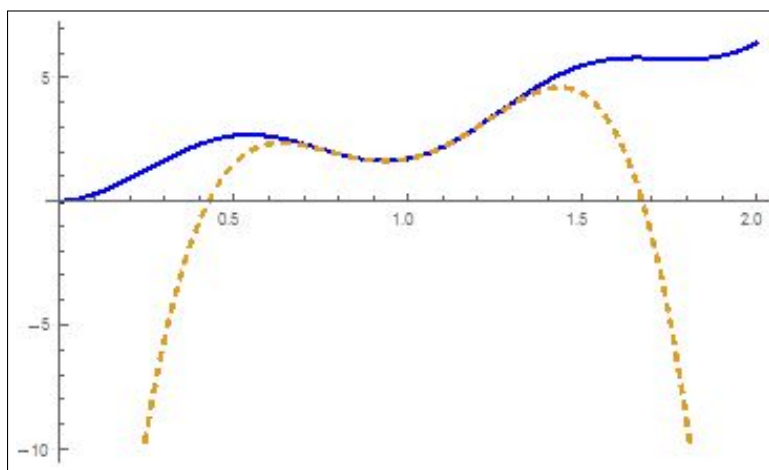



FIGURA 40. $f(x) = e^x - \cos(2\pi x),\ x_0 = 1,\ n = 4$

$$\begin{cases} f(1) & = & -1+e \\ f'(1) & = & e \\ f''(1) & = & e+4\pi^2 \\ f^{[3]}(1) & = & e \\ f^{[4]}(1) & = & e-16\pi^2 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad T_4(x) = \frac{1}{24}\left(e-16\pi^4\right)(x-1)^4 + \frac{1}{6}e(x-1)^3 + \left(\frac{e}{2}+2\pi^2\right)(x-1)^2 + e(x-1) + e - 1$$

$f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0,\ n = 2$

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 1 \\ f''(0) & = & 0 \end{cases} \quad \to \quad T_2(x) = x$$

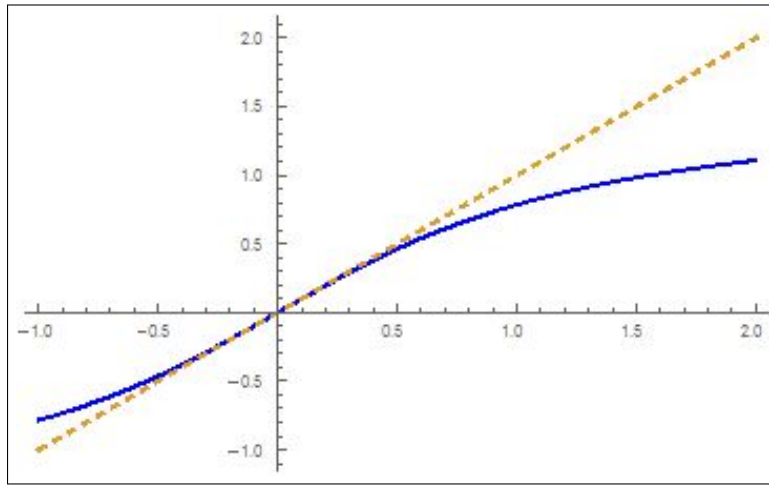



FIGURA 41. $f(x) = \arctan(x)$, $x_0 = 0$, $n = 2$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$, $n = 2$

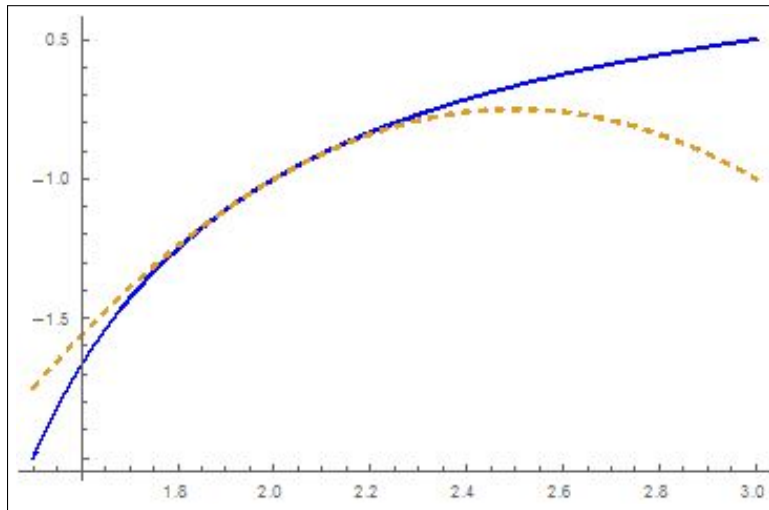



FIGURA 42. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$, $n = 2$

$$\left\{ \begin{array}{lcr} f(2) & = & -1 \\ f'(2) & = & 1 \\ f''(2) & = & 2 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad T_2(x) = -(x-2)^2 + x - 3$$

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

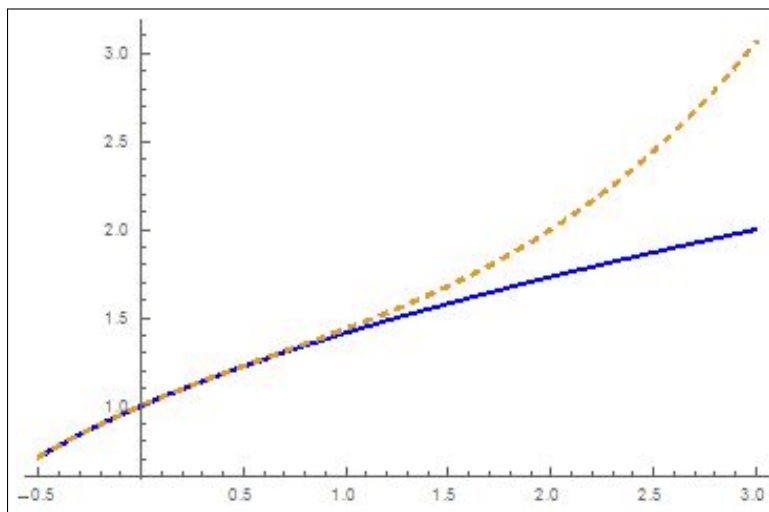



FIGURA 43. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 1/2 \\ f''(0) & = & -1/4 \\ f^{[3]}(0) & = & 3/8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_3(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 2,\ n = 3}$

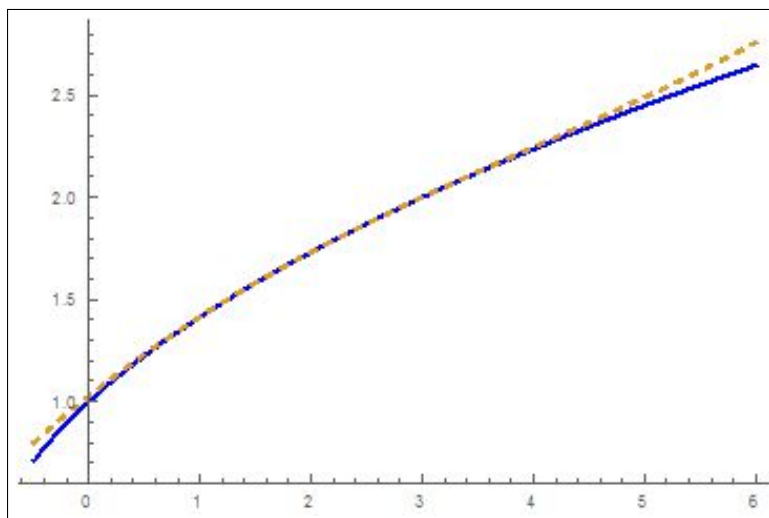



FIGURA 44. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$

$$\begin{cases} f(2) & = & \sqrt{3} \\ f'(2) & = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ f''(2) & = & -\frac{1}{12\sqrt{3}} \\ f^{[3]}(2) & = & \frac{1}{24\sqrt{3}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_3(x) = \frac{(x-2)^3}{144\sqrt{3}} - \frac{(x-2)^2}{24\sqrt{3}} + \frac{x-2}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

ESERCIZIO : 6.10. *Siano $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ con $x \in I = [0,1]$,*

i. *scrivere i due rispettivi polinomi di Taylor T_f e T_g con $x_0 = 0, n = 3$;*

ii. *rappresentare i resti $R_f := f - T_f$ e $R_g := g - T_g$ nella forma di Lagrange;*

iii. *stimare gli errori di approssimazione $|R_f|$ e $|R_g|$ ed il loro massimo.*

Soluzione:

$$f(x) = \sin(x), \qquad T_f(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \qquad R_f(x) = \frac{-\cos(\xi)}{4!}x^4$$

$$g(x) = \ln(1+x), \quad T_g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x, \quad R_f(x) = \frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!}x^4$$

Al variare di $x \in [0,1]$ i resti di Lagrange $R_f(x), R_g(x)$ verificano le maggiorazioni in modulo

$$|R_f(x)| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{4!}x^4\right| \quad \leq \left|\frac{1}{4!}x^4\right| \quad \leq \frac{1}{4!} \approx 0,04$$

$$|R_g(x)| = \left|\frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!}x^4\right| \quad \leq \left|\frac{6}{4!}x^4\right| \quad \leq \frac{1}{4} = 0.25$$

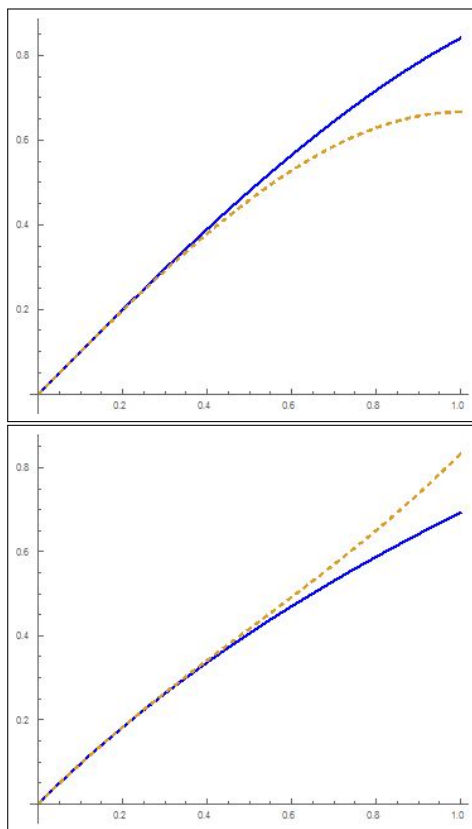



FIGURA 45. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ in blue,T_f e T_g tratteggiati

7. Integrali

ESERCIZIO : 7.1. *Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ e l'intervallo $I = [-1, 1]$*

- *calcolare la somma integrale inferiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,*
- *calcolare la somma integrale superiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,*
- *calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.*

Soluzione:

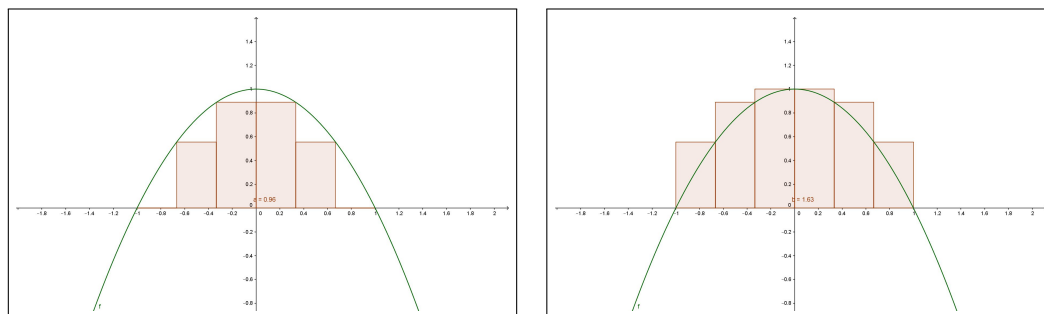



FIGURA 46. $f(x) = 1 - x^2$

Suddividere l'intervallo $[-1,1]$ in 6 parti uguali significa

$$[-1,1] = [-1,-2/3] \cup [-2/3,-1/3] \cup [-1/3,0] \cup [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$$

Considerato che la funzione $f(x) = 1 - x^2$ è crescente in $[-1,0]$ e decrescente in $[0,1]$ gli estremi inferiori e_i e superiori E_i in ciascuno dei 6 intervallini sono:

$$\begin{array}{lll}
1 & e_1 = 0 & E_1 = f(-2/3) \\
1 & e_2 = f(-2/3) & E_2 = f(-1/3) \\
1 & e_3 = f(-1/3) & E_3 = 1 \\
1 & e_4 = f(1/3) & E_4 = 1 \\
1 & e_5 = f(2/3) & E_5 = f(1/3) \\
1 & e_6 = 0 & E_6 = f(2/3)
\end{array}$$

Da cui, tenuto conto che f è funzione pari

$$S'\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3)\}\frac{1}{3} = \frac{26}{27}, \quad S''\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3) + 2\}\frac{1}{3} = \frac{44}{27}$$

$$S'\{f,[-1,1]\} \approx 0,962 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{4}{3} \approx 1.333 \leq S''\{f,[-1,1]\} \approx 1,629$$

ESERCIZIO : 7.2. *Assegnata la funzione $f(x) = [x]$, parte intera, determinare l'integrale $\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$*

Soluzione:

$$\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx = -2 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0.5 = -2.5$$

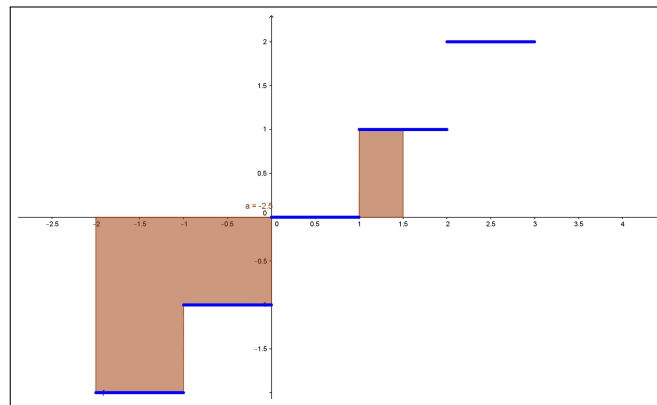



FIGURA 47. $f(x)=[x],\ \int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$

ESERCIZIO : *7.3. Assegnata la funzione $f(t)=t\sin(t)$, e posto $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$*

- *determinare i punti stazionari di $F(x)$,*
- *classificare quali siano di massimo e quali di minimo relativi.*

Soluzione:

Punti stazionari: $F'(x)=0$. Tenuto conto che $F'(x)=x\sin(x)$ i punti stazionari sono $x_k=k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Tenuto conto del segno della $F'(x)=x\sin(x)$ tra un punto stazionario e l'altro si riconosce che $F(x)$

- è decrescente in $[-2\pi,-\pi]$
- è crescente in $[-\pi,\pi]$
- è decrescente in $[\pi,2\pi]$
- è crescente in $[2\pi,3\pi]$
- ecc.

Pertanto -2π è punto di massimo, $-\pi$ è punto di minimo, π punto di massimo, 2π punto di minimo, ecc.

ESERCIZIO : 7.4. *Assegnata la funzione $f(t) = t\,(t-1)$, calcolare l'integrale* $\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$.

Soluzione:

Tenuto presente che $f(t)$ ï¿½ negativa in $[0,1]$ e positiva altrove riesce

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

da cui servendosi della primitiva $F(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$ si ha

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt = F(0) - F(-1) - F(1) + F(0) = 1$$

ESERCIZIO : 7.5. *Assegnata la funzione $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$, calcolare gli integrali* $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt, \quad \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$

Soluzione:

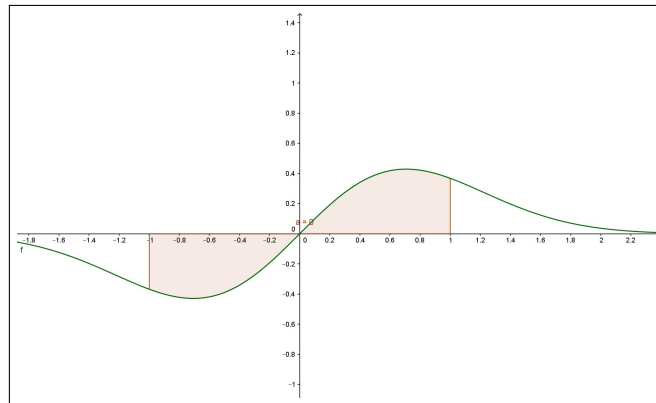



FIGURA 48. $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$

$$\int_{-1}^{1} t \cdot e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -2t \cdot e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(e^{-t^2}\right)'\,dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left|t\cdot e^{-t^2}\right|dt = -\int_{-1}^{0} t\cdot e^{-t^2}\,dt + \int_{0}^{1} t\cdot e^{-t^2}\,dt = 1-\frac{1}{e}$$

ESERCIZIO : 7.6. *Calcolare, servendosi della regola di integrazione per parti, gli integrali*

$$\int_0^{2\pi} \sin^m(x)\,dx,\ \ m=1,2,3$$

Soluzione:

$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0,$
$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cdot(-\cos(x))\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(1-\sin^2(x)\right)\,dx$
$2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\pi \quad\to\quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$
$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2(x)\right)(\cos(x))'\,dx = 0$

OSSERVAZIONE 7.1. *La somiglianza evidente delle due funzioni* $\sin^2(x)$ *e* $\cos^2(x)$ *conduce naturalmente alla uguaglianza*

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$$

Tenuto conto del resto che $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ *si ha*

$$\int_0^{2\pi} \left\{\sin^2(x)+\cos^2(x)\right\}\,dx = 2\pi$$

da cui, per l'uguaglianza osservata si ricava anche, per ciascuno dei due integrali, l'ovvio valore

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$

Con osservazioni evidenti e altrettanto vere si ottengono anche i valori

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

ESERCIZIO : 7.7. *Calcolare l'integrale* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ *servendosi della sostituzione* $x = \sin(t)$.

Soluzione:

Tenuto conto dell'equazione cartesiana della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \to \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

si riconosce che l'integrale proposto rappresenta l'area del sottografico della funzione
$y = \sqrt{1-x^2}$ relativo all'intervallo $x \in [0,1]$, un quarto del cerchio di area π.

L'area di tale sottografico è pertanto $\pi/4$.

L'integrale proposto può naturalmente essere calcolato anche per via diretta, ricorrendo alla sostituzione $y = \sin(t),\ t \in [0, \pi/2]$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Si noti che $\sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$ ma, per $t \in [0, \pi/2]$ riesce $\cos(t) \geq 0$ da cui

$$t \in [0, \pi/2] : \quad \to \quad \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

ESERCIZIO : 7.8. *Si determini il polinomio di Taylor di ordine* $n = 3$ *e punto iniziale* $x_0 = 0$ *della funzione*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Soluzione:

$$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(0)x^3$$

Tenuto conto che del teorema fondamentale del calcolo, $F(0) = 0, F'(x) = e^{-x^2}$, si riconosce che

$$F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = -2$$

da cui

$$P(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

Si noti che il risultato poteva anche essere previsto ricordando che

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2) \quad \to \quad F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

da cui il polinomio di Taylor cercato

$$x - \frac{1}{3}x^3$$

ESERCIZIO : 7.9. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx, \qquad \int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\frac{3}{2}\,dx = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right\}dx = \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$\int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left.\frac{-1}{x+1}\right|_0^4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{1} = \frac{4}{5}$$

ESERCIZIO : 7.10. *Stimare, servendosi del teorema della media, il seguente integrale* $\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)dx$

Soluzione:

$$\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)\,dx=\left(5+e^{-\xi^2}\right)(20-10)$$

Tenuto presente che $\xi\in[10,20]$ riesce

$$0\le e^{-\xi^2}\le e^{-10^2}\approx 10^{-44}$$

riesce

$$\left|\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)\,dx-50\right|\le 10^{-44}\,10=10^{-43}$$

ESERCIZIO : 7.11. *Calcolare l'area della regione piana* $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

Soluzione:

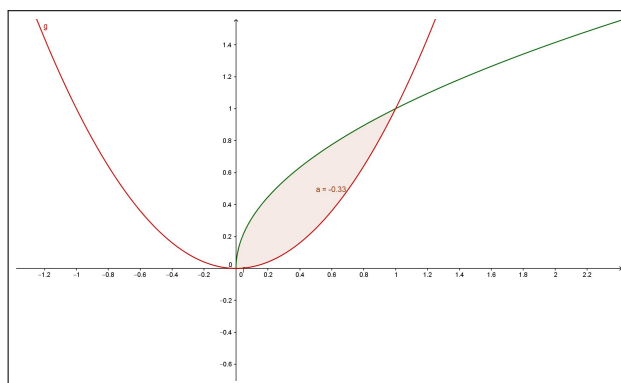



FIGURA 49. $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$

$$Area\ =\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

ESERCIZIO : 7.12. *Sia* $f(x)=1/x^\alpha$ *scelti* $0<r<R$ *dire per quali* $\alpha>0$ *esistono, finiti, i limiti* $\lim_{r\to0^+}\int_r^R f(x)\,dx$, $\lim_{R\to+\infty}\int_r^R f(x)\,dx$ *e commentare i risultati ottenuti in termini di sottografico di* $f(x)$.

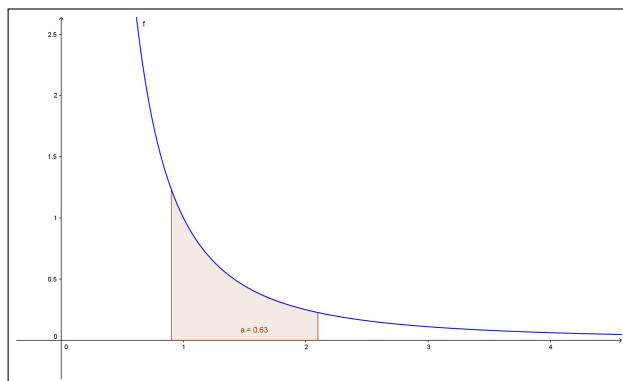



FIGURA 50. $\int_r^R 1/x^2\,dx$

Soluzione:

Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_r^R \frac{1}{x}\,dx = \log(R) - \log(r) \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{r\to 0^+} \int_r^R f(x)\,dx = +\infty \\ \lim_{R\to+\infty} \int_r^R f(x)\,dx = +\infty \end{cases}$$

Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_r^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right)$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & \frac{1}{1-\alpha}R^{1-\alpha} \\ 1 < \alpha & +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{R\to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & +\infty \\ 1 < \alpha & \frac{1}{\alpha-1}r^{1-\alpha} \end{cases}$$

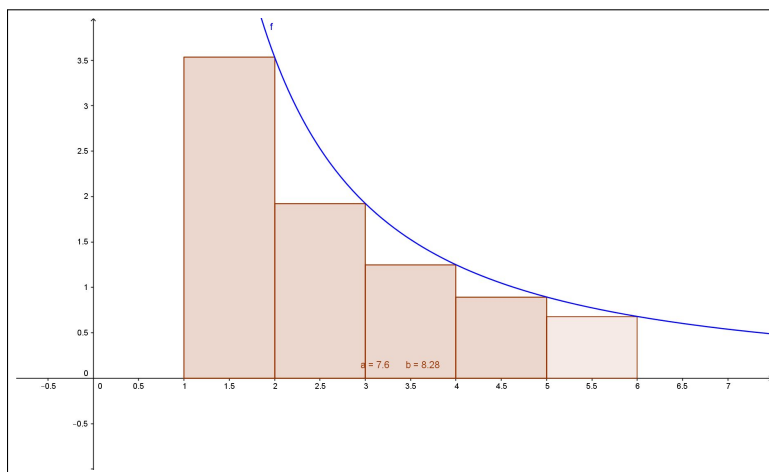
OSSERVAZIONE 7.2. *L'osservazione fatta sopra, riferendosi ad esempio a $r = 1$*

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

giustifica la convergenza delle serie armoniche generalizzate

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$$

Infatti

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$$

Il confronto serie - integrale usato richiede, si noti bene, la monotonia della funzione con la quale si esegue il confronto: in modo che la somma parziale della serie rappresenti una delle somme integrali inferiori della funzione usata (vedi figura).

8. Num. complessi, eq.differenziali, funz. di 2 variabili

ESERCIZIO : 8.1. *Assegnati i due numeri complessi* $z_1 = 4+3i$ *e* $z_2 = -3+4i$

- *disegnarli sul piano,*
- *determinare i loro moduli* $|z_1|, \ |z_2|$
- *disegnare i loro coniugati* $\overline{z_1}, \ \overline{z_2}$
- *determinare* $z_1+z_2, \ z_1-z_2, \ z_1 \cdot z_2, \ 1/z_2, \ z_1/z_2$ *e disegnare sul piano i risultati ottenuti.*

Soluzione:

I due numeri z_1 e z_2 sono assegnati in *forma cartesiana*, la forma piú adatta ad eseguire somme e sottrazioni.

Per eseguire moltiplicazioni e divisioni é quasi sempre vantaggiosa la *forma polare* che si serve di *modulo* e di *argomento*.

La forma polare é particolarmente vantaggiosa se scritta con la notazione esponenziale

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)}$$

Naturalmente si passa da una forma all'altra con semplici operazioni goniometriche

$$4+3i = 5\, e^{i \arg(4+3i)}, \quad -3+4i = 5\, e^{i \arg(-3+4i)}$$

$$\begin{cases} 4+3i+(-3+4i) & = & 1+7i \\ 4+3i-(-3+4i) & = & 7-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4+3i)\,.\,(-3+4i) & = & -24+7i \\ \dfrac{1}{-3+4i} & = & \dfrac{-3-4i}{5} \\ \dfrac{4+3i}{-3+4i} = \dfrac{(4+3i)(-3-4i)}{5} & = & -5i \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4+3i| & = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \\ |-3+4i| & = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ \overline{4+3i} & = 4-3i \\ \overline{-3+4i} & = -3-4i \end{cases}$$

ESERCIZIO : 8.2. *Siano* $w_1 = 16$, $w_2 = -16$, $w_3 = 81\,i$*: determinare, e disegnare sul piano complesso, tutte le soluzioni* z *delle equazioni*

$$z^2 = w_i, \quad z^3 = w_i, \quad z^4 = w_i, \qquad i = 1,2,3$$

(ovvero determinare le radici quadrate, terze e quarte dei numeri complessi w_i $i = 1,2,3$ *assegnati)*

Soluzione:

Le radici $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$, si disegnano facilmente:

- sono n numeri complessi distinti,
- hanno come modulo la radice $n-$esima (aritmetica positiva) del modulo di z,
- hanno come argomenti gli argomenti di z divisi per n (se ne creano n distinti),
- costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati.

$$z = |z|\, e^{i(\vartheta+2k\pi)} \qquad \to \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}$$

$$z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4$$

$$\sqrt{16} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases} \qquad \sqrt[3]{16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{0i} & = 2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+2\pi/3)\,i} & = 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+4\pi/3)\,i} & = 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \qquad \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ 2i \\ -2 \\ -2i \end{cases}$$

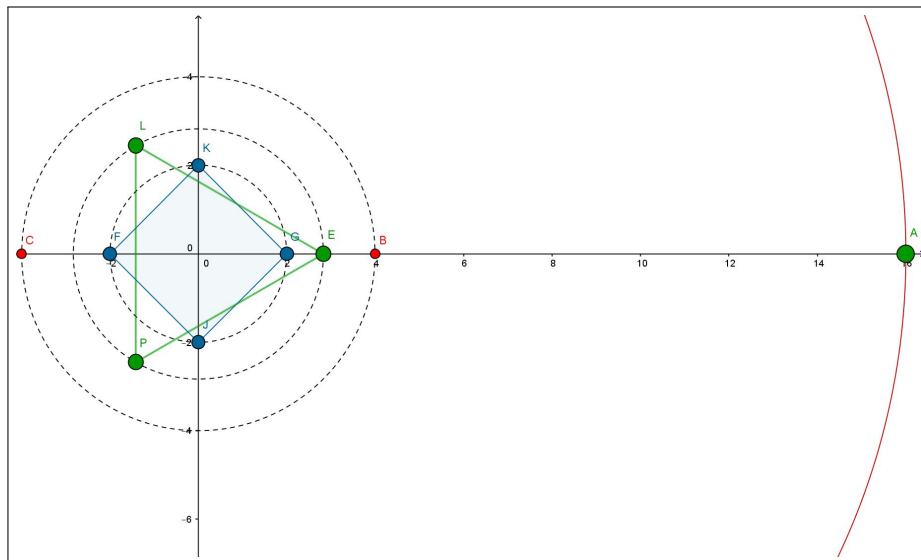



FIGURA 51. $z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4$

$z^2 = -2^4, \quad z^3 = -2^4, \quad z^4 = -2^4$

$$\sqrt{-16} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases} \quad \sqrt[3]{-16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3)i} & = 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+2\pi/3)i} & = -2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+4\pi/3)i} & = 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\,e^{(\pi/4)i} & = (1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+2\pi/4)i} & = (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+4\pi/4)i} & = (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+6\pi/4)i} & = (-1-i)\sqrt{2} \end{cases}$$

$z^2 = 3^4\,i, \quad z^3 = 3^4\,i, \quad z^4 = 3^4\,i$

$$\sqrt{3^4\,i} = \begin{cases} 3^2 e^{i\,pi/4} & = 9\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ 3^2 e^{i\,(pi/4+2\pi/2)} & = 9\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad \sqrt[3]{3^4\,i} \begin{cases} 3\sqrt[3]{3}e^{i\,\pi/6} & = 3\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\sqrt[3]{3}e^{i(\pi/6+2\pi/3)} & = 3\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\sqrt[3]{3}e^{i(\pi/6+4\pi/3)} & = 3\sqrt[3]{3}\,(-i) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{3^4 i}\begin{cases} 3\,e^{i\,\pi/8} & = & 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+2\pi/4)} & = & 3\left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+4\pi/4)} & = & 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+6\pi/4)} & = & 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \end{cases}$$

ESERCIZIO : 8.3. *Assegnati i numeri complessi* $z_1 = \log(3) + i\pi/4$ *e* $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$*,*

- *disegnare sul piano* z_1 *e* z_2*,*
- *determinare i numeri complessi* $w_1 = e^{z_1},\ w_2 = e^{z_2}$
- *determinare moduli e argomenti di* w_1 *e* w_2*,*

Soluzione:

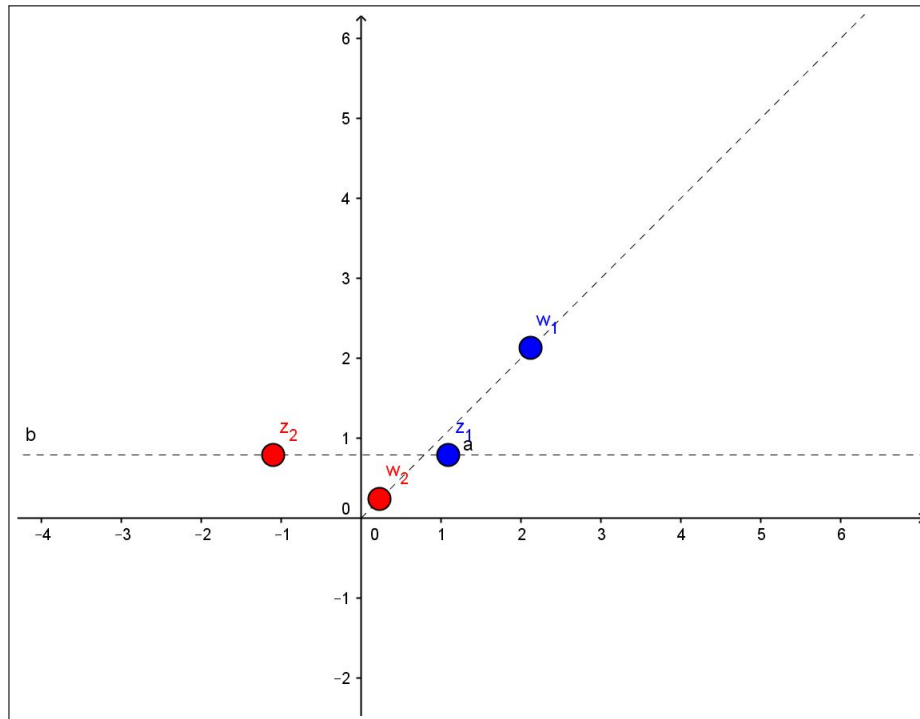



FIGURA 52. $z_1 = \log(3) + i\pi/4$, $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$, $w_1 = e^{z_1},\ w_2 = e^{z_2}$

$$
\begin{aligned}
w_1 &= e^{\log(3)+i\pi/4} &&= 3\,e^{i\pi/4} &&= 3\left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
w_2 &= e^{-\log(3)+i\pi/4} &&= 1/3\,e^{i\pi/4} &&= 1/3\left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
|w_1| &= 3, && |w_2| &&= 1/3 \\
arg(w_1) &= arg(w_2) &&= \pi/4
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO : 8.4. *Calcolare le somme delle due serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\pi)^k}{k!}$$

e disegnare tali valori sul piano complesso.

Soluzione:

La prima serie é una serie geometrica di ragione $q = \frac{i}{2}$ e la seconda é la serie esponenziale calcolata per $z = i\pi$: pertanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{4+4i}{\sqrt{5}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\pi)^k}{k!} = e^{i\pi} = -1.$$

Il valore della prima somma cade sulla bisettrice del primo quadrante, il valore della seconda cade sul semiasse reale negativo.

ESERCIZIO : 8.5. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y &= 1, \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

$$y_0(x) = Ce^{-x}, \quad \overline{y}(x) = 1, \quad y(x) = e^{-x} + 1$$

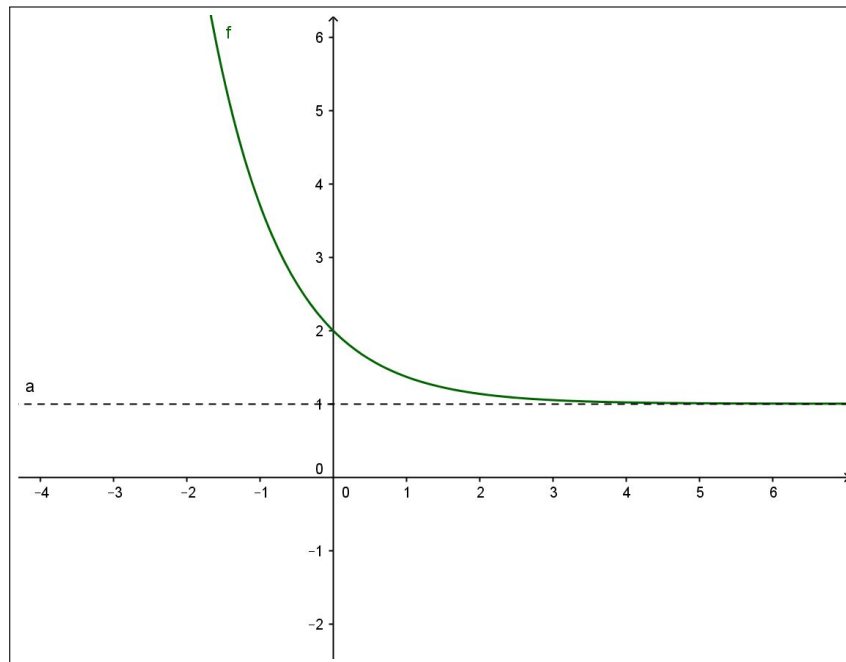



FIGURA 53. $y(x) = e^{-x} + 1$

ESERCIZIO : 8.6. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y & = 2e^{-t}, \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

$$y'(t) + y(t) = 2e^{-t} \quad \rightarrow \quad y'(t)e^t + y(t)e^t = 2 \quad \rightarrow \quad \big(y(t).e^t\big)' = 2 \quad \rightarrow \quad y(t).e^t = 2t + c$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1 \quad \rightarrow \quad y(t) = (2t+1)e^{-t}$$

ESERCIZIO : 8.7. *Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine*

$$y'' + 9y = 0$$

e disegnare i grafici di tre di esse.

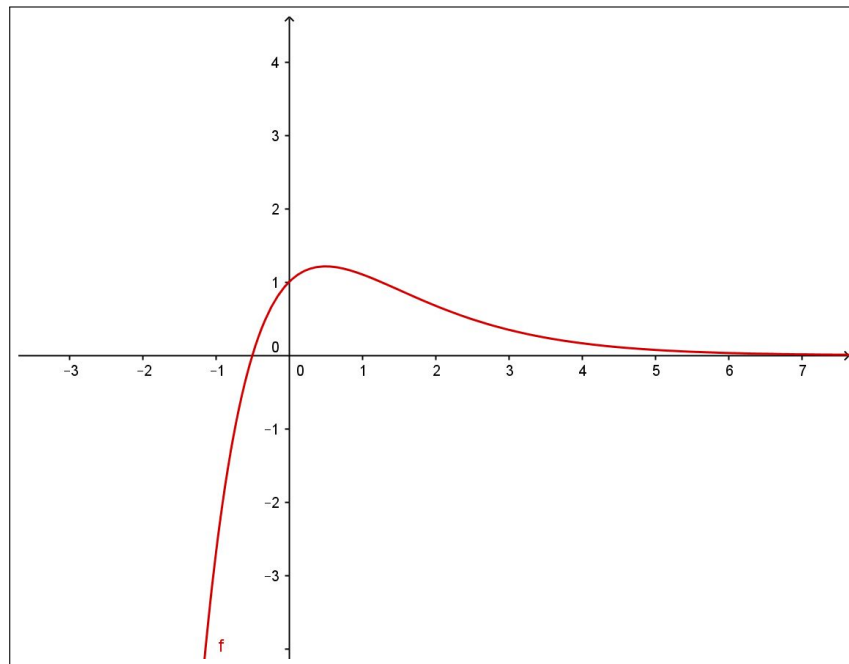



FIGURA 54. $y(t) = (2t+1)e^{-t}$

Soluzione:

$$y(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = \sin(3t) \\ y_2(t) = \cos(3t) \\ y_3(t) = \sin(3t) + \cos(3t) \end{cases}$$

ESERCIZIO : 8.8. *Determinare la soluzione $y(x)$ di*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= -2 \end{cases}$$

e determinare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Soluzione:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$y(t) = ae^t + be^{-2t}, \quad \rightarrow \quad y'(t) = ae^t - 2be^{-2t}$$

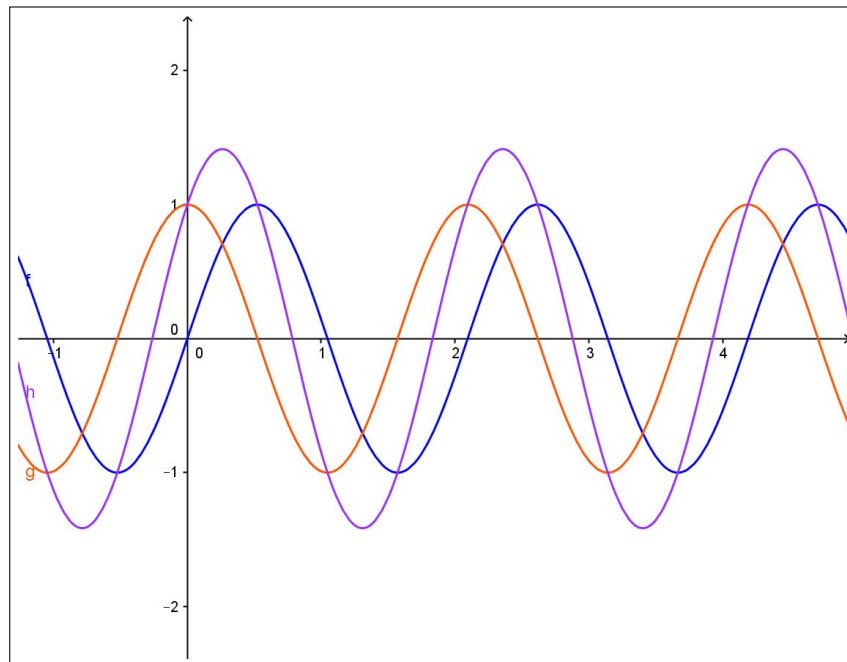



FIGURA 55. $y'' + 9y = 0$

$$a + b = 1, \quad a - 2b = -2 \quad \to \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$y(t) = e^{-2t}, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

ESERCIZIO : 8.9. *Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

- *successivamente determinare quelle che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$,*
- *e successivamente quella che soddisfa anche la condizione $y'(0) = 1$.*

Soluzione:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1 + 2i, \; \lambda_2 = -1 - 2i \quad \to \quad y(x) = e^{-x}\left\{ae^{2ix} + be^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = ae^{-x}\left\{e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$$

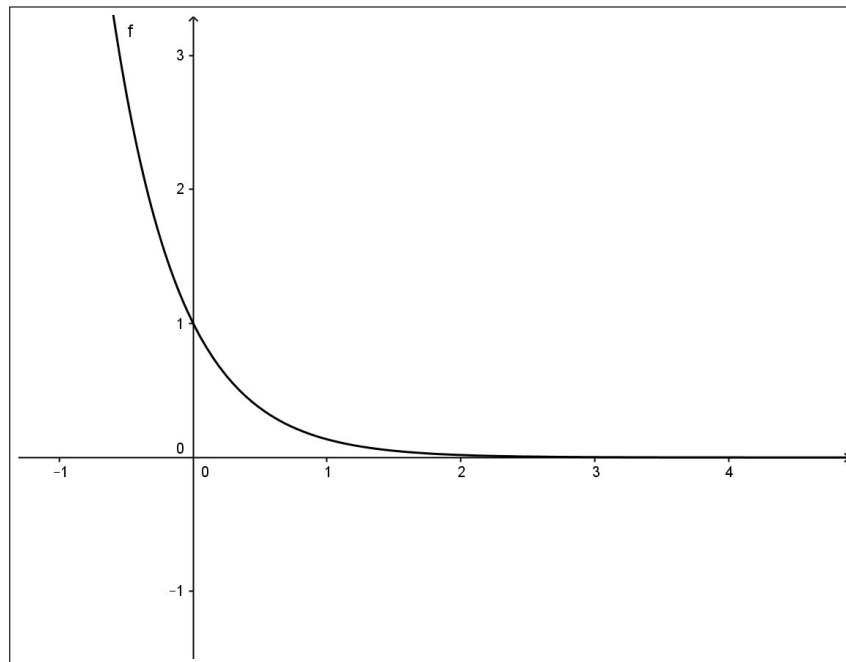



FIGURA 56. $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

ESERCIZIO : 8.10. *Determinare la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y & = \sin(t), \\ y(0) & = 0, \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

.

Soluzione:

$$y_0(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t), \quad \overline{y}(t) = A\ \sin(t)$$

Imponendo che $A\ \sin(t)$ soddisfi l'equazione differenziale si ricava $A = \frac{1}{3}$.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono pertanto espresse dalla formula

$$y(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

Le condizioni iniziali assegnate impongono

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0, \qquad y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 2a + \frac{1}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{6}$$

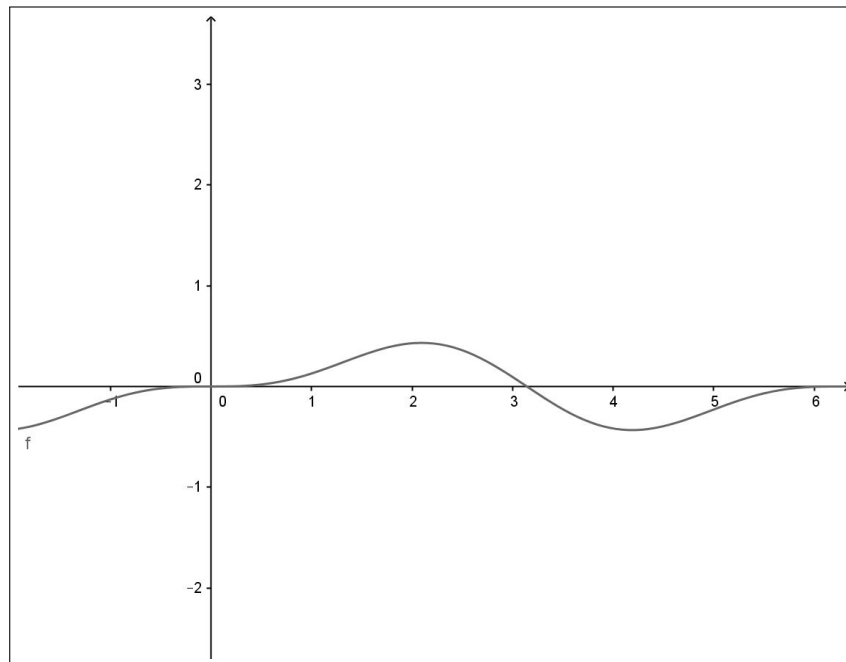



FIGURA 57. $y'' + 4y = \sin(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

e quindi la soluzione é

$$y(t) = -\frac{1}{6} sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

ESERCIZIO : 8.11. *Assegnati i punti del piano $A = (0,0)$, $B = (3,4)$, $C = (6,0)$:*

- *disegnare il triangolo T del piano da essi determinato,*
- *determinare il perimetro e l'area di T,*
- *determinare le equazioni delle tre rette cui appartengono i lati di T,*
- *determinare i tre semipiani la cui intersezione é il triangolo T.*

Soluzione:

Perimetro e area:

$$a = 5, b = 6, c = 5, 2p = 16, p = 8, area = \sqrt{8 \times 3 \times 2 \times 3} = 12$$

$$y \geq 0, \quad y \leq \frac{4}{3}x, \quad y \leq -\frac{4}{3}(x-6)$$

L'area é stata dedotta dai lati usando la formula di Erone, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Erone

Rette dei lati: $y=0,\ y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}(x-6)$

Semipiani la cui intersezione costituisce il triangolo:

$$(y\geq 0)\cap\left(y\leq\frac{4}{3}x\right)\cap\left(y\leq-\frac{4}{3}(x-6)\right)$$

ESERCIZIO : 8.12. *Determinare il dominio del piano determinato dalle limitazioni*

$$|x|<2,\ |y|<3,\ |x|+|y|<4.$$

Soluzione:

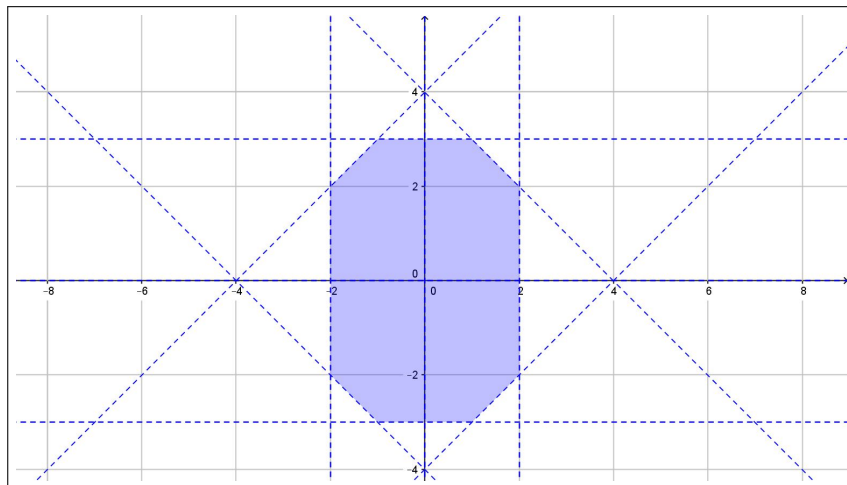



FIGURA 58. $|x|<2,\ |y|<3,\ |x|+|y|<4.$

Le prime due limitazioni

$$|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2,\qquad |y|<3\Leftrightarrow -3<y<3$$

determinano il rettangolo

$$[-2,2]\times[-3,3]$$

La terza limitazione, simmetrica rispetto ai due assi, determina il quadrato di vertici

$$(4,0),\quad (0,4),\quad (-4,0),\quad (0,-4)$$

Il dominio definito dalle tre limitazioni é pertanto l'intersezione del rettangolo e del quadrato: l'ottagono (non regolare) di vertici

$$(2,2), \quad (1,3), \quad (-1,3), \quad (-2,2), \quad (-2,-2), \quad (-1,-3), \quad (1,-3), \quad (2,-2)$$

ESERCIZIO : 8.13. *Determinare il dominio di definizione delle funzioni:*

$$\sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2}, \quad \log(1-|x|-|y|), \quad e^{3x^2-2y^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} \sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2} \\ \log(1-|x|-|y|) \\ e^{3x^2-2y^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2-1} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 9-(x+1)^2-(y-2)^2 \geq 0 \\ 1-|x|-|y| > 0 \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x^2+y^2 \neq 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} (x+1)^2+(y-2)^2 \leq 9 \\ |x|+|y| < 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

ESERCIZIO : 8.14. *Posto* $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 4$ *determinare*

- *l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza* $f(x,y) \leq 0$,
- *l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza* $|f(x,y)| \leq 2$,
- *la linea di livello* $f(x,y) = e-4$.

Soluzione:

$$f(x,y) \leq 0 \quad \to \quad e^{x^2+y^2} \leq 4 \quad \to \quad x^2+y^2 \leq \log(4)$$

$$|f(x,y)| \leq 2 \quad \to \quad -2 \leq e^{x^2+y^2} - 4 \leq 2 \quad \to \quad 2 \leq e^{x^2+y^2} \leq 6 \quad \to \quad \log(2) \leq x^2+y^2 \leq \log(6)$$

$$f(x,y) = e-4 \quad \to \quad e^{x^2+y^2} = e \quad \to \quad x^2+y^2 = 1$$

9. Funzioni di 2 variabili, derivate parziali

Esercizio : 9.1. *Assegnata la successione di punti del piano*

$$\left\{P_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right),\ n = 1, 2, \dots\right\}$$

- *esaminare se costituisca un insieme limitato del piano,*
- *determinare il suo limite,*
- *detti z_n i numeri complessi* $\quad z_n = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n+1}{n}\, i \quad$ *determinare il* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Soluzione:

Un insieme E del piano $\mathbb{R}^2$ é limitato se i due insiemi X delle coordinate x dei punti di E e l'insieme Y delle coordinate y dei punti di E sono limitati in $\mathbb{R}$: nel nostro caso

$$X = \left\{x = \tfrac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots\right\} \quad \to \quad 0 < x < 1,$$

$$Y = \left\{y = \tfrac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots\right\} \quad \to \quad 0 < x \leq 2$$

quindi l'insieme $E = \left\{P_n = \left(\dfrac{n}{n+1}, \dfrac{n+1}{n}\right),\ n = 1, 2, \dots\right\}$ é limitato.

Se $P_n = (x_n, y_n)$ allora

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

É quindi evidente che

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (1, 1)$$

Se $z_n = x_n + i\, y_n$ allora

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\, b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

quindi, in conseguenza di quanto giá osservato sopra,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + i$$

ESERCIZIO : 9.2. *Assegnato l'insieme del piano* $A := \left\{(x,y) |\ 9x^2 + 4y^2 \leq 36\right\}$

- *esaminare se A é contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio* $r = 6$,
- *determinare un cerchio di centro l'origine che sia interamente contenuto in A,*
- *determinare la distanza massima che possono avere due punti P e Q appartenenti ad A.*

Soluzione:

Tenuto conto che

$$4(x^2 + y^2) \leq 9x^2 + 4y^2$$

riesce di conseguenza

$$(x,y) \in A \quad \to \quad x^2 + y^2 \leq \frac{36}{4} = 9$$

ovvero detto C il cerchio di centro l'origine e raggio $r = 3$, $\quad x^2 + y^2 \leq 9$ si ha

$$P \in A \quad \to \quad P \in C, \qquad A \subset C$$

Analogamente si ha

$$9x^2 + 4y^2 \leq 9(x^2 + y^2)$$

da cui

$$x^2 + y^2 \leq \frac{36}{9} = 4 \quad \to \quad 9(x^2 + y^2) \leq 36 \quad \to \quad 9x^2 + 4y^2 \leq 36$$

In altri termini l'insieme A assegnato contiene il cerchio di centro l'origine e raggio $r_1 = 2$ ed é contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r_2 = 3$.

Ricordando un minimo di geometria analitica si riconosce che l'insieme A é racchiuso dall'ellisse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, ellisse di semiassi 2 e 3.

ESERCIZIO : 9.3. *Sia* $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

- *determinare l'insieme d'esistenza di* f,
- *determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano* $x + y = 1$
- *determinare l'insieme del piano* $f(x,y) \leq 1$.

Soluzione:

L'insieme d'esistenza della funzione razionale $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ é ovviamente tutto $\mathbb{R}^2$ privato dell'insieme dei punti (x,y) con $x+y=0$, la retta bisettrice del secondo e quarto quadrante, sui quali si annulla il denominatore.

La curva del piano $x+y=1$, la retta per $(1,0)$ e $(0,1)$, ha rappresentazione parametrica

$$x = 1-t, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il profilo altimetrico corrispondente é pertanto la curva dello spazio di equazioni parametriche

$$x = 1-t, \quad y = t, \quad z = 1-2t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

L'insieme del piano in cui é soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{x-y}{x+y} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y-x-y}{x+y} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\frac{y}{x+y} \geq 0$$

é unione delle due regioni angolari

$$\{(y \geq 0) \cap (x+y > 0)\} \;\cup\; \{y \leq 0) \cap (x+y < 0)\}$$

ESERCIZIO : 9.4. *Sia* $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$

- *riconoscere che si tratta di una funzione radiale,*
- *determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano* $x^2+y^2=1$
- *determinare l'insieme del piano* $\dfrac{1}{2} \leq f(x,y) \leq 1$.

Soluzione:

Indicata con $\rho^2 = x^2+y^2$ la distanza al quadrato si ha

$$\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}$$

da cui si riconosce che i valori della funzione $f(x,y)$ dipendono esclusivamente dalla distanza del punto (x,y) dall'origine, si riconosce cioé che f é una *funzione radiale*.

Sulla curva $x^2+y^2=1$, la circonferenza di centro l'origine e raggio $\rho=1$ la funzione f prende sempre il valore $\frac{1}{2}$: la curva $x^2+y^2=1$ é pertanto la curva di livello $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \leq 1$$

Le due condizioni corrispondono a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2 \leq \rho^2 \\ \rho^2 \leq 1+\rho^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \rho^2 \geq 1$$

Le due disuguaglianze sono pertanto soddisfatte per $x^2+y^2 \geq 1$.

ESERCIZIO : 9.5. *Siano* $f(x,y)=3x+2y+1$ *e* $g(x,y)=x^2-4y^2$

- *determinare gli insiemi di livello* $f(x,y)=1$ *e* $g(x,y)=1$*,*
- *determinare i profili altimetrici di* f *e di* g *relativi alla curva del piano* $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta\in[0,2\pi]$*,*

Soluzione:

$$f(x,y)=3x+2y+1=1 \quad \rightarrow \quad 3x+2y=0$$

Si tratta di una retta per l'origine, la retta $y=-\frac{3}{2}\,x$.

$$g(x,y)=x^2-4y^2=1 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$$

Si tratta dell'ellisse di centro l'origine e semiassi $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

La curva del piano $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta\in[0,2\pi]$ é la circonferenza di centro l'origine e raggio $r=1$: i corrispondenti profili altimetrici

- relativamente ad $f(x,y)=3x+2y+1$:
  $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ z=3\cos(\vartheta)+2\sin(\vartheta)+1\ \ \vartheta\in[0,2\pi]$
- relativamente a $g(x,y)=x^2-4y^2$:
  $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ z=\cos^2(\vartheta)-4\sin^2(\vartheta)\ \ \vartheta\in[0,2\pi]$

Si noti che il profilo altimetrico di f corrisponde alla sezione del cilindro di asse l'asse z e raggio $r = 1$ con il piano obliquo $z = 3x + 2y + 1$: ricordando la genesi delle coniche come sezioni piane di un cono (o di un cilindro) si ha l'idea della curva che si ottiene, un'ellisse sul piano sezionante.

ESERCIZIO : 9.6. *Sia* $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^2$

- *esaminare se* $f(x,y)$ *é limitata inferiormente,*
- *disegnare i grafici delle funzioni di una variabile* $f(t,0)$ *e* $f(t,t)$
- *determinare le linee di livello* $f(x,y) = 4$ *e* $f(x,y) = 1$*,*
- *determinare i punti stazionari e riconoscere quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.*

Soluzione:

$f(x,y)$ é un quadrato, quindi é non negativa: quindi é limitata inferiormente.

$$f(t,0) = (1 - t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1, \quad f(t,t) = (1 - 2t^2)^2 = 4t^4 - 4t^2 + 1$$

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 1 - x^2 - y^2 = -2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3$$

Si tratta di una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{3}$

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - x^2 - y^2 = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Si tratta dell'origine e della circonferenza di centra l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$.

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -4x\left(-x^2 - y^2 + 1\right) & = 0 \\ f_y(x,y) & = -4y\left(-x^2 - y^2 + 1\right) & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (0,0) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si tratta dell'origine e di tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$.

Per classificare tali punti stazionari si può:

- servirsi del polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ ed esaminare se la parte quadratica sia di segno costante (massimi e minimi) o di segno variabile (selle)
- oppure si può riconoscere che $f(x,y)$ é la funzione radiale $(1-\rho^2)^2$ per la quale ovviamente l'origine é un punto di massimo e i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono punti di minimo.

Il polinomio di Taylor in $(0,0)$ di ordine $n=2$:

$$T_2(x,y) = 1+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)\right\} = 1-2x^2-2y^2$$

la parte quadratica é negativa, quindi si conferma che nell'origine c'é un punto di massimo.

Il polinomio di Taylor di ordine $n=2$ sui punti (x_0,y_0) della circonferenza $x^2+y^2=1$:

$$T_2(x,y) = \frac{8}{2}\left\{x_0^2(x-x_0)^2+2x_0y_0(x-x_0)(y-y_0)+y_0^2(y-y_0)^2\right\} =$$

$$= 4\left(x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)\right)^2$$

la parte quadratica, un quadrato, é positiva: quindi i punti (x_0,y_0) della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono punti di minimo.

Si noti che se (x_0,y_0) appartiene alla circonferenza $x^2+y^2=1$ i valori di f in un intorno di tale punto sono

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) = 0$$

ma non riesce in alcun intorno soddisfatta la disuguaglianza stretta $f(x,y) > 0$.

Infatti sull'arco di circonferenza $x^2+y^2=1$ passante per (x_0,y_0) e contenuto nell'intorno scelto la funzione f continua a valere 0.

ESERCIZIO : 9.7. *Sia $\mathscr{C}$ il profilo altimetrico relativo alla funzione $f(x,y) = x^2+3y^2$ e alla curva piana $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta\in[0,2\pi]$*

- *determinare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ nel dominio $A:(x,y)\,|\;x^2+y^2\leq 1$,*
- *determinare la quota minima e la quota massima dei punti di $\mathscr{C}$,*
- *determinare un dominio D rettangolare dello spazio $\mathbb{R}^3$ che contenga $\mathscr{C}$ al suo interno.*

Soluzione:

La funzione $A : (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1$ é positiva, ha un solo punto stazionario, l'origine, in cui riesce $f(0,0)=0$: pertanto il minimo é zero.

Il profilo altimetrico relativa ad f e alla curva $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0,2\pi]$, la circonferenza di centro l'origine e raggio $r=1$, é

$$x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ z=\cos^2(\vartheta)+3\sin^2(\vartheta), \quad \vartheta \in [0,2\pi]$$

Tenuto conto che

$$\cos^2(\vartheta)+\sin^2(\vartheta)=1 \quad \to \quad z=1+2\sin^2(\vartheta)$$

Si riconosce facilmente che

$$1 \leq z \leq 3$$

valori che rappresentano rispettivamente la quota minima e la quota massima del profilo altimetrico.

É evidente che i valori di f in A vanno dal valore zero assunto nell'origine al valore 3 assunto nei due punti $(0,1)$ e $(0,-1)$: pertanto

- il minimo di f in A vale zero,
- il massimo di f in A vale 3.

Tenuto conto che il profilo altimetrico $\mathscr{C}$ é contenuto nel cilindro di asse l'asse verticale z e raggio $r=1$ e che le quote dei suoi punti variano tra 1 e 3 é chiaro che detto D il dominio rettangolare

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 3$$

riesce

$$\mathscr{C} \subset D$$

ESERCIZIO : 9.8. *Sia* $f(x,y)=3x^2+4y^2+5x+6y+7$

- *determinare le derivate parziali prime* f'_x *e* f'_y,
- *determinare le derivate parziali seconde* $f''_{x,x}$, $f''_{x,y}$, $f''_{y,y}$,
- *determinare il gradiente nell'origine.*

Soluzione:

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x + 6y + 7 \quad \to \quad \begin{cases} f_x(x,y) & = 6x+5 \\ f_y(x,y) & = 8y+6 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f_{xx}(x,y) & = 6 \\ f_{xy}(x,y) & = 0 \\ f_{yy}(x,y) & = 8 \end{cases}$$

$$\nabla f(0,0) = \{5,\ 6\}$$

Il vettore $\nabla f(0,0)$ calcolato ha la proprietá di indicare la direzione lungo la quale $f(x,y)$ aumenta piú rapidamente.

Ad esempio spostandosi da $(0,0)$ a $(5,6)$ si fa un tratto lungo $\sqrt{25+36} \approx 7.8$ e si passa dalla quota zero a $f(5,6) = 287$, facendo invece un percorso di uguale lunghezza per esempio nella direzione positiva dell'asse x si sarebbe raggiunto il punto $(7.8,\ 0)$ nel quale la funzione vale circa 228, meno del 287 raggiunto muovendosi nella direzione del gradiente.

ESERCIZIO : 9.9. *Sia* $f(x,y) = \dfrac{3x^2+4y^2}{1+x^2+y^2}$

- *determinare le derivate parziali prime nell'origine.*
- *determinare la derivata della funzione di t*

$$F(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

- *verificare le relazioni*

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(0,0), \quad F'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(1,1)$$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{3x^2+4y^2}{1+x^2+y^2} \quad \to \quad \begin{cases} f_x(x,y) & = \frac{6x}{x^2+y^2+1} - \frac{2x\left(3x^2+4y^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \\ \\ f_y(x,y) & = \frac{8y}{x^2+y^2+1} - \frac{2y\left(3x^2+4y^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \end{cases}$$

Ne segue $f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$

Si noti come la nota espressione della serie geometrica $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suggerisca per $(x,y) \approx (0,0)$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \approx 1-(x^2+y^2)+....$$

e quindi

$$\frac{3x^2+4y^2}{1+x^2+y^2} \approx (3x^2+4y^2)-(3x^2+4y^2)(x^2+y^2)+...$$

L'espressione a secondo membro lascia chiaramente intendere:

- $f(0,0)=0$
- $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$
- Polinomio di Taylor $T_2(x,y)=3x^2+4y^2$

$$F(t)=\frac{3\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+4\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{7t^2}{1+t^2} \quad \to \quad F'(t)=\frac{7t}{t^2+1}-\frac{7t^3}{(t^2+1)^2}$$

Ne segue

$$F'(0)=0, \qquad F'(\sqrt{2})=\frac{14}{9\sqrt{2}}$$

Stante l'annullamento nell'origine delle due derivate parziali prime, riesce ovviamente nulla anche l'espressione $\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(0,0)+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y(0,0)$ e quindi

$$F'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(0,0)+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y(0,0)$$

Considerato che

$$f_x(1,1)=\frac{4}{9} \qquad f_y(1,1)=\frac{10}{9}$$

si ha, anche,

$$F'(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(1,1)+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9}+\frac{10}{9}\right)=\frac{14}{9\sqrt{2}}$$

ESERCIZIO : 9.10. *Sia* $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot(1-x^2-y^2)$

- *determinare il gradiente* $\nabla f(x,y)$*,*
- *determinare i punti stazionari,*
- *determinare il piano tangente in ciascun punto stazionario.*

Soluzione:

$$\nabla f(x,y) = \left\{2x\left(-x^2-y^2+1\right)-2x\left(x^2+y^2\right), 2y\left(-x^2-y^2+1\right)-2y\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -4x^3-4xy^2+2x & = 0 \\ f_y(x,y) & = -4x^2y-4y^3+2y & = 0 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2x(1-2x^2-2y^2) & = 0 \\ 2y(1-2x^2-2y^2) & = 0 \end{matrix} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ (0,0) \end{cases}$$

In ciascun punto stazionario (x_0,y_0) il piano tangente é il piano orizzontale

$$z = f(x_0,y_0)$$

pertanto sui punti della circonferenza $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ il piano tangente é $z = \frac{1}{4}$, mentre il piano tangente in $(0,0)$ é $z = 0$.

ESERCIZIO : 9.11. *Siano $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$, detta $z = f(x,y)$ l'equazione del piano passante per tali punti*

- *determinare $f(x,y)$,*
- *determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,*
- *determinare la derivata della funzione di t $F(t) = f(1-t,2t)$.*

Soluzione:

Il piano passante per i tre punti assegnati é

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3} = 1$$

pertanto

$$f(x,y) = 3(1-x-\frac{y}{2})$$

Il gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \left\{-3, \ -\frac{3}{2}\right\}$$

La funzione $F(t)$:

$$F(t) = 3(1-(1-t)-\frac{2t}{2}) \equiv 0$$

In altri termini la curva $(1-t,2t)$, $t \in \mathbb{R}$ é la linea di livello zero.

ESERCIZIO : 9.12. *Sia* $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$

- *esaminare se* $f(x,y)$ *é limitata,*
- *determinare il gradiente* $\nabla f(x,y)$*,e quindi determinare i punti stazionari,*
- *classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.*

Soluzione:

La funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ é di tipo radiale: posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha

$$f(x,y) = \rho^2 e^{-\rho^2} = \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}$$

Tenuto presente che l'esponenziale prevale sul quadrato si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} = 0$$

e quindi $\rho^2 e^{-\rho^2}$ é limitata in $\mathbb{R}$, e quindi $f(x,y)$ é limitata in $\mathbb{R}^2$.

Il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left\{2xe^{-x^2-y^2} - 2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right), 2ye^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

Punti stazionari

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2-1\right) & = 0 \\ f_y(x,y) & = -2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2-1\right) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (0,0) \end{cases}$$

Tenuto conto che $(x,y) \neq (0,0) \quad \to \quad f(x,y) > 0$ si riconosce che il punto stazionario $(0,0)$, in cui $f(0,0) = 0$ é punto di minimo. Tenuto conto che

$$\left(\rho^2 e^{-\rho^2}\right)' = -2e^{-\rho^2}\rho\left(\rho^2-1\right)$$

derivata positiva per $0 < \rho < 1$ e negativa per $1 < \rho$ si riconosce che per $\rho = 1$ si ha il massimo.

In altri termini i punti stazionari $x^2+y^2 = 1$ sono tutti punti di massimo.

ESERCIZIO : 9.13. *Sia* $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^3$

- *esaminare se* $f(x,y)$ *é limitata inferiormente,*
- *determinare i punti stazionari,*

- *classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.*

Soluzione:

La funzione f assegnata é radiale: $f(x,y) = (\rho^2 - 1)^3$.

$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 \geq (-1)^3 = -1$ quindi f é limitata inferiormente e, anzi, $f(0,0) = -1$ é il minimo.

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 3(x^2+y^2-1)^2(2x) & = 0 \\ f_y(x,y) & = 3(x^2+y^2-1)^2(2y) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (0,0) = 0 \end{cases}$$

É stato giá riconosciuto che il punto stazionario $(0,0)$ é punto di minimo: per quanto concerne i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ tenuto conto che

$$\left((\rho^2 - 1)^3\right)' = 6\rho(\rho^2 - 1)^2 \geq 0$$

si riconosce che $(\rho^2 - 1)^3$ é crescente (per $\rho = 1$ si ha un flesso).

Quindi i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di sella per $f(x,y)$.

ESERCIZIO : 9.14. *Determinare i polinomi di Taylor di punto iniziale $(0,0)$ e ordine $n = 2$ per le funzioni*

$$e^x \cdot \cos(y), \quad \sin(x+y), \quad \ln(1+x^2+y^2)$$

Soluzione:

$$\begin{cases} e^x \cdot \cos(y) & \to & T_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}\left\{x^2 - y^2\right\} \\ \sin(x+y) & \to & T_2(x,y) = x + y \\ \ln(1+x^2+y^2) & \to & T_2(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Parte 3

Esercizi 2016

Esercizi 2016

1. Induzione, disuguaglianze, insiemi numerici

ESERCIZIO : 1.1. *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni*

$$|-2x| < 3, \qquad x - 2|x| + 2 > 0, \qquad \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x-1| \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$|-2x| = |-2|\,|x| = 2\,|x| < 3 \iff |x| < \frac{3}{2} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$x - 2|x| + 2 < 0 = \left(\begin{cases} x & \leq 0 \\ 3x+2 & > 0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x & \geq 0 \\ -x+2 & > 0 \end{cases}\right) = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$$

$$\begin{cases} |x| \leq 2 & \iff -2 \leq x \leq 2 \\ |x-1| \leq 1 & \iff 0 \leq x \leq 2 \end{cases} = [-2, 2] \cap [0, 2] = [0, 2]$$

ESERCIZIO : 1.2. *Dire quale dei seguenti insiemi è un intervallo :*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\}, \quad A \cap B$$

Soluzione:

FIGURA 59. $|x^2+2x|<1$

$$A=\{x\in\mathbb{R}:|x^2+2x|<1\}=\{-1<x^2+2x\}\cap\{x^2+2x<1\}=$$
$$=\{x\neq-1\}\cap(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})=(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$$

A non è un intervallo ma è unione di due intervalli.

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2-1}{x^2+1}<\frac{1}{2}\right\}=\{2(x^2-1)<x^2+1\}=\{x^2<3\}=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

B è un intervallo.

$$A\cap B=(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$$

$A\cap B$ non è un intervallo ma è unione di due intervalli.

ESERCIZIO : 1.3. *Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$$A=\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\},\quad B=\{x\in\mathbb{R}:|x|\leq 2\},\quad D=\{x\in\mathbb{R}:\ |x+2|\leq 4,x^2-5x+4>0\}$$

Determinare per ciascuno di tali insiemi ove possibile gli estremi superiore e inferiore, indicando se si tratta di massimo rispettivamente minimo.

Soluzione:

$$A=\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}=(x\leq -1)\cup(x\geq 1)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

A è unione di due intervalli illimitati: non è un intervallo e non è limitato.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} = [-2, 2]$$

B è un intervallo limitato, $\min(B) = -2$, $\max(B) = 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\} = [-6, 2] \cap \{(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)\} = [-6, 1)$

D è un intervallo limitato: $\min(D) = -6$, $\sup(D) = 1$.

ESERCIZIO : 1.4. *Per quali $x, y \in \mathbb{R}$ vale la relazione $|x+y| = |x| + |y|$?*

Soluzione:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ allora

$$|x+y| = x + y = |x| + |y|$$

Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$ allora

$$|x+y| = -x - y = |x| + |y|$$

Se $x > 0$ e $y < 0$ allora

$$\begin{array}{llllll} \text{se} & x+y > 0 & \rightarrow & |x+y| = & x+y & < |x| + |y| \\ \text{se} & x+y < 0 & \rightarrow & |x+y| = & -x-y & < |x| + |y| \end{array}$$

Riassumendo l'uguaglianza si perde, cioè si finisce nella disuguaglianza stretta, se x e y sono una positiva e l'altra negativa, cioè se $x \,.\, y < 0$.

ESERCIZIO : 1.5. *Riconosciuto che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono irrazionali, provare che sono irrazionali anche*

$$2\sqrt{2},\ 1 + \sqrt{3},\ \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Soluzione:

$$2\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{2q}$$

$$1 + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2=\left(\frac{p}{q}\right)^2+3-2\frac{p}{q}\sqrt{3}$$

da cui si ha

$$2\frac{p}{q}\sqrt{3}=\left(\frac{p}{q}\right)^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2+1}{2\frac{p}{q}}=\frac{p^2+q^2}{2pq}$$

ovvero si ricaverebbe la razionalità di $\sqrt{3}$, contro l'asserto che tale numero reale è irrazionale.

ESERCIZIO : 1.6. *Provare per induzione che* $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$ *per ogni* $n=0,1,2,\ldots$

Soluzione:

Si *provano per induzione* in genere famiglie di formule che si vogliono riconoscere valide per tutti i valori di un parametro naturale n.

Il procedimento di *induzione* è il seguente:

- si deve riconoscere che la prima delle formule proposte sia vera,
- si deve riconoscere che se la formula è vera per un valore n deve necessariamente essere vera anche per il valore successivo $n+1$.

Nel caso proposto la formula, che dovrebbe essere valida per ogni n è la

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$$

cioè

$$\begin{array}{lll} n=0 & \sum_{k=0}^{0}(2k+1)=1 & =(0+1)^2 \\ n=1 & \sum_{k=0}^{1}(2k+1)=1+3 & =(1+1)^2 \\ n=2 & \sum_{k=0}^{2}(2k+1)=1+3+5 & =(2+1)^2 \\ ecc. & & \end{array}$$

È evidente che la prima formula, quella per $n=0$ è vera (sono evidentemente vere, come si può leggere sopra anche le formule relative a $n=1$ e a $n=2$).

Occorre ora provare che, qualunque sia n

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2 \quad \to \quad \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=([n+1]+1)^2$$

Calcoliamo esplicitamente

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1=(n+1)^2+2(n+1)+1=(n+2)^2$$

si ha quindi

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=([n+1]+1)^2$$

Quindi se la formula è vera per un n allora è vera per il successivo:

- siccome è vera per $n=0$ allora è vera per $n=1$
- ma se è vera per $n=1$ sarà vera per $n=2$
- e se è vera per $n=2$ allora sarà vera per $n=3$
- ecc. ecc.

ESERCIZIO : 1.7. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che n^2-n è divisibile per 2 e n^3-n è divisibile per 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, n^4-n è divisibile per 4 ?*

Soluzione:

$n^2-n=n(n-1)$ è prodotto di due naturali successivi n e $n-1$: uno dei due è inevitabilmente pari, e quindi n^2-n è un numero pari.

$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)\,n\,(n+1)$ è prodotto di tre naturali successivi $n-1$, n e $n+1$: uno dei tre è inevitabilmente multiplo di 3, e quindi n^3-n è divisibile per 3.

n^4-n non è divisibile per 4: basta sperimentare il caso $n=2$ per il quale $2^4-2=14$.

ESERCIZIO : 1.8. *Provare che per ogni naturale $n=1,2,\dots$ riesce*

$$2^n \geq 1+n, \quad e \quad 2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Quale delle due disuguaglianze implica l'altra ?

Soluzione:

È noto che $\forall h > 0$ si ha $(1+h)^n > 1+nh$, basta allora scegliere $h = 1$ per ottenere che

$$2^n = (1+1)^n \geq 1+n$$

La seconda disuguaglianza si può provare per induzione:

- per $n = 1$ la disuguaglianza $2^1 \geq 1+1$ è vera,
- supponiamo che la $2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2}$ sia vera per n,
- proviamo che allora è di conseguenza vera per $n+1$

Verifichiamo direttamente il conto

$$2^{n+1} = 2\,.\,2^n \geq 2\left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right) = 2+2n+n(n-1) = 1+(n+1)+n^2$$

Tenuto conto che

$$\forall n \geq 1: \;\; n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

si ha

$$2^{n+1} \geq 1+(n+1)+\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$$

che è la disuguaglianza da riconoscere per l'ordine $n+1$.

La seconda disuguaglianza implica $\forall n > 1$ la prima:

$$2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2} \quad \to \quad 2^n \geq 1+n$$

OSSERVAZIONE 1.1. *La seconda disuguaglianza si ottiene anche ricordando lo sviluppo del binomio*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

con coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Presi $a = 1$ e $b = 1$ si ottiene infatti

$$2^n = (1+1)^n = 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+1 \geq 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2} = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}$$

ESERCIZIO : 1.9. *Assegnati gli intervalli $A = [-3,5]$ e $B = [0,10]$ determinare il minimo e il massimo per $A \cup B$ e per $A \cap B$*

Soluzione:

$$A \cup B = [-3, 10]: \quad \min(A) = -3, \quad \max(A) = 10$$
$$A \cap B = [0, 5]: \quad \min(B) = 0, \quad \max(B) = 5$$

ESERCIZIO : 1.10. *Provare che se A e B sono due insiemi limitati tali che $A \subseteq B$ riesce*

$$\inf(A) \geq \inf(B), \qquad \sup(A) \leq \sup(B)$$

Soluzione:

L'esercizio chiede di provare la relazione seguente:

$$A \subseteq B \quad \to \quad \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

- Proviamo la prima $\inf(B) \leq \inf(A)$: supponiamo :

  $$x < \inf(B) \quad \to \quad x \notin B \quad \to \quad x \notin A$$

  quindi tutti i numeri di A cadono a destra di $\inf(B)$ e quindi anche $\inf(A)$ cadrà a destra di $\inf(B)$.
- Proviamo la seconda: supponiamo

  $$x > \sup(B) \quad \to \quad x \notin B \quad \to \quad x \notin A$$

  quindi tutti i numeri di A cadono a sinistra di $\sup(B)$ e quindi anche $\sup(A)$ cadrà a sinistra di $\inf(B)$.

OSSERVAZIONE 1.2. *La relazione $A \subseteq B \quad \to \quad \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ diventa evidente se si considera, per ogni insieme E limitato di numeri reali l'intervallo $[\inf(E), \sup(E)]$ come l'intervallo più piccolo che contenga E.*

Con questa chiave di lettura è evidente che se $A \subseteq B$ l'intervallo più piccolo che contenga B conterrà anche A e quindi l'intervallo più piccolo che contiene A sarà contenuto in $[\inf(B), \sup(B)]$.

L'osservazione è ancora più evidente se riferita a insiemi $A \subseteq B$ che abbiano minimo e massimo:

- *il minimo m_B di B è minore o uguale di tutti i numeri di B, e quindi anche minore o uguale di tutti i numeri di A: detto m_A il minimo di A riesce $m_B \leq m_A$*
- *analogo discorso per il massimo M_B di B, numero maggiore o uguale di tutti i numeri di B, quindi anche maggiore o uguale di tutti quelli di A: detto M_A il massimo di A riesce $M_A \leq M_B$.*

ESERCIZIO : 1.11. *Dire quali tra questi insiemi è limitato*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ n^2 + 2n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determinare per ciascuno di tali insiemi ove possibile gli estremi superiore e inferiore, indicando se si tratta di massimo rispettivamente minimo.

Soluzione:

$$A = \left\{ -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots \right\}$$

si tratta di numeri ora negativi ora positivi: è evidente che il negativo più lontano dall'origine è -1 e il positivo più lontano dall'origine è $\frac{1}{2}$.

Quindi $\min(A) = -1, \quad \max(A) = \frac{1}{2}$.

$$B = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots \right\}$$

se trascrivessimo le varie frazioni con la loro approssimazione decimale avremmo

$$B \approx \{0,\ 0.50,\ 0.66,\ 0.75,\ 0.8,\ 0.83,\ 0.875,\ 0.98,\ \dots\}$$

è evidednte ch 0 è il più piccolo dei numeri di B, non c'è un più grande.

Si ha evidentemente

$$\min(B) = 0, \quad \sup(A) = 1$$

$$C = \{0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24, \dots\}$$

È evidente che i numeri di C sono numeri naturali, cioè interi non negativi: si ha naturalmente $\min(C) = 0$.

L'insieme C è illimitato superiormente, riesce infatti

$$n^2 + 2n > n$$

Quindi, essendo $\mathbb{N}$ illimitato superiormente sarà anche $\sup(C) = +\infty$.

OSSERVAZIONE 1.3. *L'espressione* $(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ *consiste nella fila di numeri*

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

1 *e* -1 *che si ripetono al crescere di n in modo periodico ogni 2.*

Si possono immaginare altre sequenze periodiche per esempio servendosi della periodicitá delle funzioni trigonometriche.

Cosí i numeri forniti dall'espressione $\cos\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ *producono la lista*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}$$

numeri che si ripetono in modo periodico ogni 6.

2. Moduli, insiemi numerici, induzione

ESERCIZIO : 2.1. *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni*

$$|-2x| < 3, \qquad x - 2|x| + 2 > 0, \qquad \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x-1| \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$|-2x| = |-2|\,|x| = 2\,|x| < 3 \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{3}{2} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$x - 2|x| + 2 < 0 = \left(\begin{cases} x & \leq 0 \\ 3x+2 & > 0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x & \geq 0 \\ -x+2 & > 0 \end{cases}\right) = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$$

$$\begin{cases} |x| \leq 2 & \Leftrightarrow\; -2 \leq x \leq 2 \\ |x-1| \leq 1 & \Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 2 \end{cases} = [-2, 2] \cap [0, 2] = [0, 2]$$

ESERCIZIO : 2.2. *Dire quale dei seguenti insiemi è un intervallo :*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\}, \quad A \cap B$$

Soluzione:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < 1\} = \{-1 < x^2 + 2x\} \cap \{x^2 + 2x < 1\} =$$
$$= \{x \neq -1\} \cap (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}) = (-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$$

A non è un intervallo ma è unione di due intervalli.

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\} = \{2(x^2 - 1) < x^2 + 1\} = \{x^2 < 3\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

B è un intervallo.

$$A \cap B = (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$$

FIGURA 60. $|x^2+2x| < 1$

$A \cap B$ non è unione di due intervalli ma è unione di due intervalli.

ESERCIZIO : 2.3. *Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\}$

Determinare per ciascuno di tali insiemi ove possibile gli estremi superiore e inferiore, indicando se si tratta di massimo rispettivamente minimo.

Soluzione:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = (x \leq -1) \cup (x \geq 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

A è unione di due intervalli illimitati: non è un intervallo e non è limitato.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} = [-2, 2]$$

B è un intervallo limitato, $\min(B) = -2, \ \max(B) = 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\} = [-6, 2] \cap \{(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)\} = [-6, 1)$

D è un intervallo limitato: $\min(D) = -6, \ \sup(D) = 1$.

ESERCIZIO : 2.4. *Per quali* $x, y \in \mathbb{R}$ *vale la relazione* $|x+y| = |x| + |y|$?

Soluzione:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ allora

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|$$

Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$ allora

$$|x+y| = -x-y = |x|+|y|$$

Se $x > 0$ e $y < 0$ allora

$$\begin{array}{llllll} \text{se} & x+y>0 & \to & |x+y| = & x+y & < |x|+|y| \\ \text{se} & x+y<0 & \to & |x+y| = & -x-y & < |x|+|y| \end{array}$$

Riassumendo l'uguaglianza si perde, cioè si finisce nella disuguaglianza stretta, se x e y sono una positiva e l'altra negativa, cioè se $x\,.\,y < 0$.

ESERCIZIO : 2.5. *Riconosciuto che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono irrazionali, provare che sono irrazionali anche*

$$2\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3},\ \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Soluzione:

$$2\sqrt{2} = \frac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} = \frac{p}{2q}$$

$$1+\sqrt{3} = \frac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3 - 2\frac{p}{q}\sqrt{3}$$

da cui si ha

$$2\frac{p}{q}\sqrt{3} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1}{2\frac{p}{q}} = \frac{p^2+q^2}{2pq}$$

ovvero si ricaverebbe la razionalità di $\sqrt{3}$, contro l'asserto che tale numero reale è irrazionale.

ESERCIZIO : 2.6. *Provare per induzione che* $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$ *per ogni* $n=0,1,2,\dots$

Soluzione:

Si *provano per induzione* in genere famiglie di formule che si vogliono riconoscere valide per tutti i valori di un parametro naturale n.

Il procedimento di *induzione* è il seguente:

- si deve riconoscere che la prima delle formule proposte sia vera,
- si deve riconoscere che se la formula è vera per un valore n deve necessariamente essere vera anche per il valore successivo $n+1$.

Nel caso proposto la formula, che dovrebbe essere valida per ogni n è la

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$$

cioè

$$\begin{array}{lll} n=0 & \sum_{k=0}^{0}(2k+1)=1 & =(0+1)^2 \\ n=1 & \sum_{k=0}^{1}(2k+1)=1+3 & =(1+1)^2 \\ n=2 & \sum_{k=0}^{2}(2k+1)=1+3+5 & =(2+1)^2 \\ ecc. & & \end{array}$$

È evidente che la prima formula, quella per $n=0$ è vera (sono evidentemente vere, come si può leggere sopra anche le formule relative a $n=1$ e a $n=2$).

Occorre ora provare che, qualunque sia n

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2 \quad \to \quad \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=([n+1]+1)^2$$

Calcoliamo esplicitamente

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1=(n+1)^2+2(n+1)+1=(n+2)^2$$

si ha quindi

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=([n+1]+1)^2$$

Quindi se la formula è vera per un n allora è vera per il successivo:

- siccome è vera per $n = 0$ allora è vera per $n = 1$
- ma se è vera per $n = 1$ sarà vera per $n = 2$
- e se è vera per $n = 2$ allora sarà vera per $n = 3$
- ecc. ecc.

ESERCIZIO : 2.7. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che $n^2 - n$ è divisibile per 2 e $n^3 - n$ è divisibile per 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^4 - n$ è divisibile per 4 ?*

Soluzione:

$n^2 - n = n(n-1)$ è prodotto di due naturali successivi n e $n-1$: uno dei due è inevitabilmente pari, e quindi $n^2 - n$ è un numero pari.

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)\,n\,(n+1)$ è prodotto di tre naturali successivi $n-1$, n e $n+1$: uno dei tre è inevitabilmente multiplo di 3, e quindi $n^3 - n$ è divisibile per 3.

$n^4 - n$ non è divisibile per 4: basta sperimentare il caso $n = 2$ per il quale $2^4 - 2 = 14$.

ESERCIZIO : 2.8. *Provare che per ogni naturale $n = 1, 2, \dots$ riesce*

$$2^n \geq 1 + n, \quad e \quad 2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Quale delle due disuguaglianze implica l'altra ?

Soluzione:

È noto che $\forall h > 0$ si ha $(1+h)^n > 1 + nh$, basta allora scegliere $h = 1$ per ottenere che

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$$

La seconda disuguaglianza si può provare per induzione:

- per $n = 1$ la disuguaglianza $2^1 \geq 1 + 1$ è vera,
- supponiamo che la $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ sia vera per n,
- proviamo che allora è di conseguenza vera per $n + 1$

Verifichiamo direttamente il conto

$$2^{n+1} = 2.2^n \geq 2\left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right) = 2+2n+n(n-1) = 1+(n+1)+n^2$$

Tenuto conto che

$$\forall n \geq 1: \; n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

si ha

$$2^{n+1} \geq 1+(n+1)+\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$$

che è la disuguaglianza da riconoscere per l'ordine $n+1$.

La seconda disuguaglianza implica $\forall n > 1$ la prima:

$$2^n \geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad 2^n \geq 1+n$$

OSSERVAZIONE 2.1. *La seconda disuguaglianza si ottiene anche ricordando lo sviluppo del binomio*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

con coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Presi $a=1$ e $b=1$ si ottiene infatti

$$2^n = (1+1)^n = 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+1 \geq 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2} = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}$$

ESERCIZIO : 2.9. *Assegnati gli intervalli $A = [-3,5]$ e $B = [0,10]$ determinare il minimo e il massimo per $A \cup B$ e per $A \cap B$*

Soluzione:

$$A \cup B = [-3,\, 10]: \quad \min(A) = -3, \quad \max(A) = 10$$

$$A \cap B = [0,\, 5]: \quad \min(B) = 0, \quad \max(B) = 5$$

ESERCIZIO : 2.10. *Provare che se A e B sono due insiemi limitati tali che $A \subseteq B$ riesce*

$$\inf(A) \geq \inf(B), \qquad \sup(A) \leq \sup(B)$$

Soluzione:

L'esercizio chiede di provare la relazione seguente:

$$A \subseteq B \quad \to \quad \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

- Proviamo la prima $\inf(B) \leq \inf(A)$: supponiamo :

  $$x < \inf(B) \quad \to \quad x \notin B \quad \to \quad x \notin A$$

  quindi tutti i numeri di A cadono a destra di $\inf(B)$ e quindi anche $\inf(A)$ cadrà a destra di $\inf(B)$.
- Proviamo la seconda: supponiamo

  $$x > \sup(B) \quad \to \quad x \notin B \quad \to \quad x \notin A$$

  quindi tutti i numeri di A cadono a sinistra di $\sup(B)$ e quindi anche $\sup(A)$ cadrà a sinistra di $\inf(B)$.

OSSERVAZIONE 2.2. *La relazione $A \subseteq B \quad \to \quad \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ diventa evidente se si considera, per ogni insieme E limitato di numeri reali l'intervallo $[\inf(E), \sup(E)]$ come l'intervallo più piccolo che contenga E.*

Con questa chiave di lettura è evidente che se $A \subseteq B$ l'intervallo più piccolo che contenga B conterrà anche A e quindi l'intervallo più piccolo che contiene A sarà contenuto in $[\inf(B), \sup(B)]$.

L'osserrvazione è ancora più evidente se riferita a insiemi $A \subseteq B$ che abbiano minimo e massimo:

- *il minimo m_B di B è minore o uguale di tutti i numeri di B, e quindi anche minore o uguale di tutti i numeri di A: detto m_A il minimo di A riesce $m_B \leq m_A$*
- *analogo discorso per il massimo M_B di B, numero maggiore o uguale di tutti i numeri di B, quindi anche maggiore o uguale di tutti quelli di A: detto M_A il massimo di A riesce $M_A \leq M_B$.*

ESERCIZIO : 2.11. *Dire quali tra questi insiemi è limitato*

$$A=\left\{\frac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\},\quad B=\left\{\frac{n}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\},\quad C=\left\{n^2+2n:n\in\mathbb{N}\right\}$$

Determinare per ciascuno di tali insiemi ove possibile gli estremi superiore e inferiore, indicando se si tratta di massimo rispettivamente minimo.

Soluzione:

$$A=\left\{-1,+\frac{1}{2},-\frac{1}{3},+\frac{1}{4},-\frac{1}{5},+\frac{1}{6},-\frac{1}{7},\dots\right\}$$

si tratta di numeri ora negativi ora positivi: è evidente che il negativo più lontano dall'origine è -1 e il positivo più lontano dall'origine è $\frac{1}{2}$.

Quindi $\min(A)=-1,\quad \max(A)=\frac{1}{2}$.

$$B=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\dots\right\}$$

se trascrivessimo le varie frazioni con la loro approssimazione decimale avremmo

$$B\approx\{0,\ 0.50,\ 0.66,\ 0.75,\ 0.8,\ 0.83,\ 0.875,\ 0.98,\ \dots\}$$

è evidednte ch 0 è il più piccolo dei numeri di B, non c'è un più grande.

Si ha evidentemente

$$\min(B)=0,\quad \sup(A)=1$$

$$C=\{0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\dots\}$$

È evidente che i numeri di C sono numeri naturali, cioè interi non negativi: si ha naturalmente $\min(C)=0$.

L'insieme C è illimitato superiormente, riesce infatti

$$n^2+2n>n$$

Quindi, essendo $\mathbb{N}$ illimitato superiormente sarà anche $\sup(C)=+\infty$.

OSSERVAZIONE 2.3. *L'espressione* $(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ *consiste nella fila di numeri*

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$$

1 *e* -1 *che si ripetono al crescere di n in modo periodico ogni* 2.

Si possono immaginare altre sequenze periodiche per esempio servendosi della periodicitá delle funzioni trigonometriche.

Cosí i numeri forniti dall'espressione $\cos\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ *producono la lista*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$$

numeri che si ripetono in modo periodico ogni 6.

3. Polinomi, razionali, grafici

ESERCIZIO : 3.1. *Sia* $E := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2\}$: *determinare tre numeri* x_1, x_2, x_3 *due appartenenti ad* E *e uno non appartenente. Se* $a, b \in E$ *dove varia* $\dfrac{a+b}{2}$ *?*

Soluzione:

$$\begin{cases} 1 \leq |x| & : \quad (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ |x| \leq 2 & : \quad [-2, 2] \end{cases} \quad \to \quad E = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

I punti $x_1 = -1.5$, $x_2 = 1.5$ appartengono ad E mentre il punto $x_3 = 3 \notin E$.

Presi due numeri a e b il numero $(a+b)/2$ é il punto medio:

$$\begin{cases} a, b \in [-2, -1] & \to \quad \dfrac{a+b}{2} \in [-2, -1] \\ a, b \in [1, 2] & \to \quad \dfrac{a+b}{2} \in [1, 2] \end{cases}$$

Se invece $a \in [-2, -1]$, e $b \in [1, 2]$ allora

$$-2 + 1 \leq a + b \leq -1 + 2 \quad \to \quad \frac{a+b}{2} \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Da cui

$$\begin{cases} a \in E \\ b \in E \end{cases} \quad \to \quad \frac{a+b}{2} \in [-2, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$$

ESERCIZIO : 3.2. *Assegnato il polinomio* $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ *calcolare i valori* $p(-1)$ *e* $p(1+\sqrt{2})$ *e calcolare, per ogni* h, *la differenza* $p(1+h) - p(1)$.

Soluzione:

$$p(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$
$$p(1+\sqrt{2}) = 3(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2}) + 1 = 3(1+2+2\sqrt{2}) + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 12 + 8\sqrt{2}$$
$$p(1+h) - p(1) = 3(1+h)^2 + 2(1+h) + 1 - 6 = 3h^2 + 8h$$

ESERCIZIO : 3.3. *Sia* $f(x) = x(x+1)$*: determinare le espressioni algebriche delle tre funzioni*

$$g(x) = f(x) + 1, \qquad p(x) = f(x+1), \qquad q(x) = f(2x).$$

Soluzione:

$$\begin{array}{llll} g(x) & = f(x) + 1 & = x(x+1) + 1 & = x^2 + x + 1 \\ p(x) & = f(x+1) & = (x+1)(x+2) & = x^2 + 3x + 2 \\ q(x) & = f(2x) & = 2x(2x+1) & = 4x^2 + 2x \end{array}$$

ESERCIZIO : 3.4. *Disegnare sul piano cartesiano il grafico della funzione* $f(x) = 2 + |x-1|$ *e dire se* f *è iniettiva.*

Soluzione:

Il grafico della f discende da quello della funzione $|x|$:

- per il grafico della $|x-1|$ si trasla orizzontalmente il grafico di $|x|$ in modo da portare il vertice che cadeva nell'origine sopra il punto 1
- per il grafico della $2 + |x-1|$ si innalza il grafico della $|x-1|$ verticalmente di 2.

ESERCIZIO : 3.5. *Disegnare sul piano cartesiano il grafico della funzione* $f(x) = \sin(x) + |\sin(x)|$ *e dire per quali* $h \in \mathbb{R}$ *l'equazione* $f(x) = h$ *ha soluzioni.*

Soluzione:

Tenuto conto che

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) \leq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2\sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \sin(x) \leq 0 \end{cases}$$

si ha che l'equazione

$$f(x) = h$$

ha soluzione solo se $h \in [0,2]$.

ESERCIZIO : 3.6. *Siano*

$$q_1(x) = x^3, \quad q_2(x) = x(x-1)(x-2), \quad q_3(x) = x\left(\sqrt{9+x^2} - 5\right)$$

dire quali delle tre funzioni sono iniettive e quali no e determinare gli insiemi in cui sono positive.

Soluzione:

$q_1(x) = x^3$ é strettamente crescente, quindi é iniettiva: é positiva per $x \geq 0$.

$q_2(x) = x(x-1)(x-2)$ non é iniettiva come si vede osservando che $q_2(1) = q_2(2) = 0$, cioé produce lo stersso valore in corrispondenza dei due numeri distinti $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$$q_2(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [0,1] \cup [2,+\infty)$$

$q_3(x) = x\left(\sqrt{9+x^2} - 5\right)$ non é iniettiva: come nel caso precedente é evidente che

$$q_3(0) = 0, \quad q_3(4) = 0$$

cioé q_3 produce lo stesso valore in due punti diversi $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$.

$q_3(x)$ é positiva quando i due fattori x e $\sqrt{9+x^2} - 5$ che la compongono sono concordi.

Tenuto conto che il secondo fattore, quello con la radice, cambia segno a seconda che x^2 sia a sinistra o a destra di 16 si ha

$$q_3(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \{(x \leq 0) \cap (x^2 \leq 16)\} \cup \{(x \geq 0) \cap (x^2 \geq 16)\}$$

da cui

$$q_3(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-4, 0] \cup [4, +\infty)$$

ESERCIZIO : 3.7. *Sia f la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & se \quad x < 0 \\ x^2 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- *dire se f è strettamente crescente,*
- *dire per quali $h \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = h$ ha soluzione,*
- *determinare la funzione inversa di f.*

Soluzione:

f é strettamente crescente: infatti

- $x_1 < x_2 \leq 0 \quad \to \quad f(x_1) = 3x_1 < 3x_2 = f(x_2)$
- $0 \leq x_1 < x_2 \quad \to \quad f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$
- $x_1 < 0 \leq x_2 \quad \to \quad f(x_1) = 3x_1 < 0 \leq x_2^2 = f(x_2)$

L'equazione $f(x) = h$ ha soluzione per ogni $h \in \mathbb{R}$: infatti

- $h < 0 \quad \to \quad f(x) = h \;\Leftrightarrow\; 3x = h \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{h}{3}$
- $h \geq 0 \quad \to \quad f(x) = h \;\Leftrightarrow\; x^2 = h \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{h}$

La funzione inversa di f é la g seguente

$$g(h) = \begin{cases} \dfrac{h}{3} & \text{se} \quad h < 0 \\ \sqrt{h} & \text{se} \quad h \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 3.8. *Assegnate le funzioni razionali*

$$r_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad r_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad r_3(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2$$

- *determinare l'insieme di definizione per ognuna,*
- *dire quali sono iniettive,*
- *dire per quali x si ha $r_2(x) \leq r_3(x)$*

Soluzione:

La funzione $r_1(x)$ é definita in $\mathbb{R} - \{1\}$ ed é iniettiva: infatti

$$\frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+x_2} \quad \Leftrightarrow \quad 1+x_1 = 1+x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

quindi l'iniettivitá

$$x_1 \neq x_2 \quad \to \quad \frac{1}{1+x_1} \neq \frac{1}{1+x_2}$$

La funzione $r_2(x)$ é definita in $\mathbb{R}$ perché l'espressione a denominatore non si annulla mai.

Si tratta di una funzione non iniettiva infatti si ha, ad esempio, $r_2(-1) = r_2(1)$.

La funzione $r_3(x)$ é definita, come la r_1 in $\mathbb{R} - \{1\}$ ma non é iniettiva.

Infatti, scelti ad esempio $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$ si ha

$$r_3(x_1) = \frac{1}{4} = r_3(x_2)$$

ESERCIZIO : 3.9. *Determinare A e B tali che* $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2}$

Soluzione:

I due denominatori $x-3$ e $x-2$ sono i fattori del polinomio x^2-5x+6.

Si ha

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6} = \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A-3B}{x^2-5x+6}$$

Per riavere la frazione iniziale occorre che A e B soddisfino il sistema

$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ -2A-3B &= -5 \end{cases} \quad \to \quad A=1, \quad B=1$$

Riconoscere che

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}$$

ha indubbi vantaggi, ad esempio pensando alla possibilitá di immaginare il grafico della prima espressione ricavandolo dai noti grafici delle due espressioni a secondo membro.

ESERCIZIO : 3.10. *Posto* $f(x) = x+1\,, \quad g(x) = x^2 - 2\,|x| \quad$ *scrivere le funzioni composte* $h = f \circ g, \quad k = g \circ f$*. Riportare su una tabella i valori di* $h(x)$ *e di* $k(x)$ *per* $x = -1, 1, 2$*.*

Soluzione:

$$\begin{cases} h(x) & = & f[g(x)] & = & x^2 - 2\,|x| + 1 \\ k(x) & = & g[f(x)] & = & (x+1)^2 - 2|x+1| \end{cases}$$

x	$h(x)$	$k(x)$
-1	0	0
1	0	0
2	1	3

ESERCIZIO : 3.11. *Sia* $f(x) = x\,|x|$*: disegnare il grafico di* f*, vedere che è funzione dispari e che è iniettiva. Disegnare il grafico della funzione inversa di* f*.*

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \le 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

A sinistra dello zero il grafico di f é quello della parabola $-x^2$ mentre a destra dello zero é quello della parabola x^2.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$$

quindi si tratta di una funzione dispari.

Si tratta anche di una funzione iniettiva: infatti

$$\begin{array}{lll} x_1 < x_2 \leq 0 & \to & f(x_1) = -x_1^2 < -x_2^2 = f(x_2) \\ x_1 < 0 < x_2 & \to & f(x_1) < 0 < f(x_2) \\ 0 \leq x_1 < x_2 & \to & f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2) \end{array}$$

4. LImiti di successioni

ESERCIZIO : *4.1. Si dica se le funzioni* $2^{-x}+3$, $\log_{10}(x^2+2)$ *sono iniettive e, in caso, si determinino le loro funzioni inverse.*

Soluzione:

La prima funzione $f(x) = 2^{-x}+3$ è monotona strettamente decrescente, quindi è iniettiva.

L'equazione

$$2^{-x}+3 = h \Leftrightarrow 2^{-x} = h-3$$

ha soluzione se $h-3 > 0$ cioè se $h > 3$.

$$2^{-x} = h-3 \Leftrightarrow \log(2^{-x}) = \log(h-3) \Leftrightarrow -x\log(2) = \log(h-3)$$

da cui l'espressione dell'inversa:

$$\forall h > 3 : \ h \mapsto -\frac{\log(h-3)}{\log(2)}$$

La seconda funzione $g(x) = \log_{10}(x^2+2)$, per via di quel quadrato x^2 non è iniettiva: è evidente che, ad esempio, $g(-1) = \log_{10}(1+2) = g(1)$.

ESERCIZIO : *4.2. Date* $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos(x)+1$, *determinare l'insieme di definizione delle funzioni composte* $h = f\circ g$, $k = g\circ f$ *.*

Soluzione:

$$h(x) = \sqrt{\cos(x)+1}$$

Tenuto presente che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ -1 \le \cos(x) \le 1 \quad \to \quad \cos(x)+1 \ge 0$$

si riconosce che la funzione composta h è definita in tutto $\mathbb{R}$.

$$k(x) = \cos(\sqrt{x}) + 1$$

Tenuto presente che $\sqrt{x}$ è definita per $x \geq 0$ e $\cos(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ si riconosce che la funzione composta k è definita in $[0, +\infty)$.

ESERCIZIO : 4.3. *Detta $f(x) = \log_{10}(x) + 1$, disegnare il grafico delle $f(x)$, $f(x)^+$, $|f(x)|$, essendo $f(x)^+$ la parte positiva di $f(x)$.*

Soluzione:

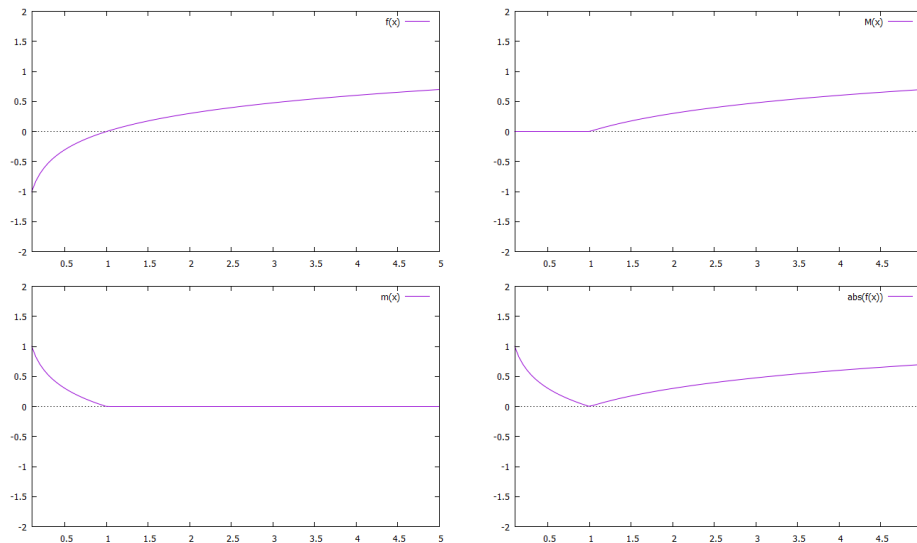



FIGURA 61. $\log_{10}(x)$, $\log^+_{10}(x)$, $\log^-_{10}(x)$, $|\log_{10}(x)|$,

---

ESERCIZIO : 4.4. *Si dica se le funzioni: $\sin(x) + x$, $\cos(x) + 3|x^3|$ sono pari, dispari oppure non presentano nessuna delle due simmetrie.*

Soluzione:

$f(x) = \sin(x) + x$ è funzione dispari: infatti

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -(\sin(x) + x) = -f(x)$$

$g(x) = \cos(x) + 3|x^3|$ è funzione pari: $\cos(x)$ e $3|x^3| = 3|x|^3$ sono pari

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; g(-x) = \cos(-x) + 3|(-x)^3| = \cos(x) + 3|x^3| = g(x)$$

ESERCIZIO : 4.5. *Siano $f(x) = 1 + x + x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$: posto*

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

calcolare $F(x)$ e $G(x)$ per $x = -1, 0, 1$ e calcolare l'espressione di $F(x) + G(x)$.

Soluzione:

$$\begin{cases} F(-1) & = \max\{(1-1+1),\ (1-1)\} & = 1 \\ G(-1) & = \min\{(1-1+1),\ (1-1)\} & = 0 \\ F(0) & = \max\{(1),\ (1)\} & = 1 \\ G(0) & = \min\{(1),\ (1)\} & = 1 \\ F(1) & = \max\{(1+1+1),\ (1-1)\} & = 3 \\ G(1) & = \min\{(1+1+1),\ (1-1)\} & = 0 \end{cases}$$

Tenuto presente che in ogni punto x si verifica una delle due circostanze

$$\begin{array}{lll} \text{o} \quad F(x) = f(x) & \text{e} & G(x) = g(x) \\ \text{o} \quad F(x) = g(x) & \text{e} & G(x) = f(x) \end{array}$$

si ha, in ogni caso,

$$F(x) + G(x) = f(x) + g(x) = 1 + x$$

ESERCIZIO : 4.6. *Dire se le successioni: $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $\quad b_n = |n - n^2|$, $\quad c_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ sono limitate e calcolarne il limite.*

Soluzione:

$\boxed{a_n = \dfrac{2^n}{n}}$ Si noti[3] che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\right)\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 2\,\dfrac{n}{n+1}$

Tenuto conto che $\forall n > 1 : \dfrac{n}{n+1} \geq \dfrac{2}{3} \quad \to \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{4}{3}$ da cui

$$\forall n > 1 : a_{n+1} \geq \frac{4}{3} a_n \quad \to \quad a_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_2$$

[3] Vedi Dispense, Corollario 2.6, pag.58

Tenuto conto che essendo $\frac{4}{3} > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_2 = +\infty$$

si ha di conseguenza anche

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} = +\infty$$

La tabella seguente illustra i primi valori coinvolti nella successionme studiata:

n	2^n	n	$\frac{2^n}{n}$
1	2	1	2.0000
2	4	2	2.0000
3	8	3	2.6667
4	16	4	4.0000
5	32	5	6.4000
6	64	6	10.667
7	128	7	18.286
8	256	8	32.000
9	512	9	56.889
10	1024	10	102.40
11	2048	11	186.18
12	4096	12	341.33
13	8192	13	630.15
14	16384	14	1170.3
15	32768	15	2184.5

Si vede bene che sia il numeratore che il denominatore aumentano al crescere di n ma il numeratore 2^n cresce molto piú del denominatore.

$\boxed{b_n = |n - n^2|}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq 0 \quad \to \quad b_n = n^2 - n = n(n-1)$ da cui

$$\forall n > 1 : b_n \geq n \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

$\boxed{c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}}$ $\quad \forall n \geq 1 : \ \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

Tenuto conto che $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+1) = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

La c_n, la terza delle tre successioni assegnate è l'unica limitata.

ESERCIZIO : 4.7. *Dire se le successioni:* $a_n = 3^n + n,\ b_n = 2^{-n} - 3,\ c_n = n^2 - 5n$ *sono monotone e calcolarne il limite.*

Soluzione:

$a_n = 3^n + n$ $\quad a_n$ somma di due successioni 3^n e n entrambe crescenti è di conseguenza crescente.

Osservato che $a_n \geq n$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$b_n = 2^{-n} - 3$ $\quad b_n$ somma di due successioni 2^{-n} e -3 entrambe decrescenti è di conseguenza decrescente.

Osservato che $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$$

$c_n = n^2 - 5n$ $\quad n^2 - 5n = n(n-5):\ \forall n > 5 : n(n-5) \geq n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

ESERCIZIO : 4.8. *Siano* $a_n = \dfrac{\cos(n^2)}{1+n^2}, \qquad b_n = (-1)^n(n^2 - n), \qquad c_n = n - \sqrt{1+n^2}$ *dire se esistono i limiti e calcolarli.*

Soluzione:

$a_n = \dfrac{\cos(n^2)}{1+n^2}$ $\quad |a_n| \leq \dfrac{1}{1+n^2} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2)}{1+n^2} = 0$

$b_n = (-1)^n(n^2 - n)$ $\quad \lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = +\infty$

Quindi b_n non è limitata, quindi non è convergente.

Per via dell'alternanza del segno, il fattore $(-1)^n$, la successione b_n non è nè divergente positivamente nè divergente negativamente: b_n non è regolare.

$\boxed{c_n = n - \sqrt{1+n^2}}$ $\quad |c_n| = \left| \dfrac{(n-\sqrt{1+n^2})(n+\sqrt{1+n^2})}{n+\sqrt{1+n^2}} \right| = \dfrac{1}{n+\sqrt{1+n^2}} \le \dfrac{1}{n}$

disuguaglianza che prova che

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

ESERCIZIO : 4.9. *Siano* $a_n = \dfrac{n^4+n^2+n}{1+2n^4}$, $\quad b_n = 2^n - n$, $\quad c_n = \dfrac{n}{\log_{10}(n)}$ *dire se esistono i limiti e calcolarli.*

Soluzione:

$\boxed{a_n = \dfrac{n^4+n^2+n}{1+2n^4}}$ $\quad a_n = \dfrac{1+1/n^2+1/n^3}{1/n^4+2}$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n^2+1/n^3\right) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1/n^4+2\right) = 2$$

si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+n}{1+2n^4} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{b_n = 2^n - n}$ $\quad b_n = 2^n\left(1-\dfrac{n}{2^n}\right) = 2^n\left(1-\dfrac{1}{\frac{2^n}{n}}\right) \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\boxed{c_n = \dfrac{n}{\log_{10}(n)}}$ $\quad \forall n\ \exists m:\ 10^{m-1} \le n \le 10^m \Leftrightarrow m-1 \le \log_{10} n \le m$ ne segue che

$$\frac{10^{m-1}}{m} \le \frac{n}{\log_{10}(n)} \le \frac{10^m}{m-1} \quad \to \quad \frac{1}{10}\left(\frac{10^m}{m}\right) \le \frac{n}{\log_{10}(n)} \le 10\left(\frac{10^{m-1}}{m-1}\right)$$

Tenuto conto che $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{10^m}{m}\right) = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_{10}(n)} = +\infty$$

La tabella seguente illustra i primi valori coinvolti nella successionme studiata:

n	$\log_{10}(n)$	$\dfrac{n}{\log_{10}(n)}$
2	0.30103	6.6439
3	0.47712	6.2877
4	0.60206	6.6439
5	0.69897	7.1534
6	0.77815	7.7106
7	0.84510	8.2831
8	0.90309	8.8585
9	0.95424	9.4316
10	1.0000	10.000
11	1.0414	10.563
12	1.0792	11.120
13	1.1139	11.670
14	1.1461	12.215
15	1.1761	12.754

$\boxed{b_n = 2^n - n}$ $\quad b_n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 2^n\left(1 - \frac{1}{2^n/n}\right)$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n/n = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n/n}\right) = 1$$

ne segue

$$\lim_{n\to\infty}(2^n - n) = +\infty$$

ESERCIZIO : 4.10. *Consideriamo la successione definita per ricorrenza:*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n\,:$$

- *dire se è crescente,*
- *dire se è limitata,*
- *fornire un'espressione esplicita degli a_n come funzioni di n.*

Soluzione:

- è evidente che la successione è crescente infatti $a_{n+1} = a_n + n \quad \to \quad a_{n+1} \geq a_n$,
- è evidente che non è limitata infatti:
  - gli a_n sono positivi ($a_0 = 1 > 0, \quad a_n > 0 \quad \to \quad a_{n+1} > 0$)

- $a_{n+1} = a_n + n \quad \rightarrow \quad a_{n+1} \geq n$

Quindi, essendo $\{a_n\}$ crescente e non limitata è certamente divergente positivamente.

- $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1+1,\ a_3 = 1+1+2,\ a_4 = 1+1+2+3, \ldots$

$$\rightarrow \quad a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Essendo ben nota la formula della somma dei naturali da 1 a m

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

si ha

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Statistica, limiti di successioni

ESERCIZIO : *5.1. Assegnata la lista $a = \{15, 14, 2, 27, 13\}$ determinare: la media aritmetica, la mediana, la varianza, la deviazione standard.*

Soluzione:

Media aritmetica: $Av(a) = \frac{1}{5}(15 + 14 + 2 + 27 + 13) = 14.2$

Per conoscere la mediana occorre ordinare i numeri della lista in modo crescente:

$$a = \{2,\ 13,\ 14,\ 15,\ 27\}$$

Risulta quindi mediana = 14.

La varianza rappresenta

$$\frac{1}{5}\left\{(15 - 14.2)^2 + (14 - 14.2)^2 + (2 - 14.2)^2 + (27 - 14.2)^2 + (13 - 14.2)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{5}\{0.64 + 0.04 + 148.84 + 163.84 + 1.44\} = 62.96$$

La deviazione standard é $\sigma = \sqrt{62.96} = 7.93$

ESERCIZIO : *5.2. Assegnata la lista $a = \{\ 0.6, 1.2, 0.9, 1.0, 0.6, 0.8\ \}$ determinare: la media aritmetica $Av(a)$, la media dei quadrati $Av(a^2)$, la varianza, la deviazione standard.*

Soluzione:

$$\begin{cases} Av(a) & = \frac{1}{6}\{\ 0.6, 1.2, 0.9, 1.0, 0.6, 0.8\ \} & = 0.85 \\ Av(a^2) & = \frac{1}{6}\{\ 0.6^2, 1.2^2, 0.9^2, 1.0^2, 0.6^2, 0.8^2\ \} & = 0.768 \\ \text{var}(a) & = \text{Av}(a^2) - (\ \text{Av}(a))^2 = 0.768 - 0.722 & = 0.046 \\ \sigma(a) & = \sqrt{0.046} & = 0.214 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 5.3. *Assegnata la lista* $a = \{1,2,3,4,5\}$ *e detta* $V(x) = \sum_{1=1}^{5} (a_i - x)^2$ *scrivere esplicitamente il polinomio* $V(x)$ *e calcolarne il minimo al variare di* $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$V(x) = (x-5)^2 + (x-4)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 = 5(11 - 6x + x^2)$$

Tenuto presente che

$$V(x) = 5(x-3)^2 + 10$$

assume il valore minimo 10 in $x_0 = 3$.

Si osservi che $x_0 = 3$ é la media aritmetica dei numeri della lista assegnata.

ESERCIZIO : 5.4. *Assegnata la lista* $a = \{-1,-2,-3,-4,-5\}$ *determinare il punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *in cui la somma* $D(x) = \sum_{1=1}^{5} |a_i - x|$ *é minima e calcolare il valore di tale minimo.*

Soluzione:

$$D(x) = |-x-5| + |-x-4| + |-x-3| + |-x-2| + |-x-1|$$

Tenuto presente che

$$\begin{aligned} D(x) \quad &= |-x-5| \quad + |-x-1| \\ &+ |-x-4| \quad + |-x-2| \\ &+ |-x-3| \end{aligned}$$

Si osserva che

- la somma parziale prima riga é minima per $x \in [-5,-1]$ e vale 4 in tutto l'intervallo,
- la somma parziale seconda riga é minima per $x \in [-4,-2] \subset [-5,-1]$ e vale 2 in tutto l'intervallo,
- l'addendo della terza riga vale 0 per $x = -3$

Quindi la somma $D(x)$ ha minimo per $x = 3$ e tenuto conto che $3 \in [-4, -2] \subset [-5, -1]$ riesce

$$D(3) = 4 + 2 + 0 = 6$$

ESERCIZIO : 5.5. *Assegnata la lista* $a := \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, 10 \right\}$ *determinare la media, le frequenze e, con una calcolatrice, la deviazione standard* $\sigma(a)$.

Soluzione:

$$a = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$Av(a) = \frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} \sin(n\pi/6) = \frac{1}{22}$$

Disponendo i valori della lista in ordine crescente

$$a = \left\{ -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$$

si leggono facilmente le frequenze e la mediana:

$$\begin{array}{l} f(-1) = f(-1/2) = f(1) = 1, \\ f(-\sqrt{3}/2) = f(0) = f(1/2) = f(-\sqrt{3}/2) = 2 \\ \text{mediana} = 0 \end{array}$$

La deviazione standard é, per definizione,

$$\sigma(a) = \sqrt{\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} \left(\sin(n\pi/6) - \frac{1}{22} \right)^2} \approx 0.721569$$

ESERCIZIO : 5.6. *Verificare svolgendo i conti che che per ogni* b_1, b_2 *e* b_3 *si ha la disuguaglianza di Jensen*

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3{}^2}{3} \geq \left[\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right]^2$$

É vero che la disuguaglianza di Jensen é equivalente a dire che la varianza di $\{b_1, b_2, b_3\}$ *é non negativa?*

Soluzione:

La disuguaglianza proposta equivale alla

$$3(b_1^2+b_2^2+{b_3}^2) \geq (b_1+b_2+b_3)^2$$

che svolgendo il quadrato a secondo membro conduce a

$$b_1^2+b_2^2+{b_3}^2 \geq b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3$$

La disuguaglianza é certamente vera tenuto conto che:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2$$

e quindi

$$\begin{array}{l} b_1\,b_2 \leq \frac{1}{2}b_1^2+\frac{1}{2}b_2^2 \\ b_1\,b_3 \leq \frac{1}{2}b_1^2+\frac{1}{2}b_3^2 \\ b_3\,b_2 \leq \frac{1}{2}b_3^2+\frac{1}{2}b_2^2 \end{array}$$

da cui sommando si ottiene la

$$b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3 \leq b_1^2+b_2^2+{b_3}^2$$

La disuguaglianza osservata equivale alla formula della varianza

$$0 \leq \text{var}(\{b_1,b_2,b_3\}) = Av(\{b_1^2+b_2^2+b_3^2\}) - (Av(\{b_1,b_2,b_3\}))^2$$

ESERCIZIO : 5.7. *Quattro gruppi di studenti, composti da 15, 20, 10 e 18 individui, hanno un'altezza media rispettivamente di 162, 148, 153 e 140 cm. Trovare l'altezza media di tutti gli studenti.*

Soluzione:

Il numero totale di studenti é;

$$15+20+10+18=63$$

La somma delle altezze é

$$15\times162+20\times148+10\times153+18\times140=9440$$

L'altezza media é pertanto

$$h=\frac{9440}{63}\approx 149.84$$

ESERCIZIO : 5.8. *Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:*

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot a_n + 1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Soluzione:

La prima successione prodotto $n \cdot a_n$ puó non avere limite: ad esempio se $a_n = (-1)^n$ la successione prodotto diventa

$$-1, \quad 2, \quad -3, \quad 4, \dots$$

La seconda successione é necessariamente convergente a 0: infatti se $|a_n| \leq M$ si ha

$$0 \leq \left| \frac{n \cdot a_n + 1}{n^2+2} \right| \leq \frac{M \cdot n + 1}{n^2+2}$$

con il terzo membro convergente a zero.

La terza successione, quoziente $\frac{n^3}{a_n}$ puó non avere limite: ad esempio se $a_n = (-1)^n$ la successione quoziente diventa

$$-1, \quad 2^3, \quad -3^3, \quad 4^3, \dots$$

ESERCIZIO : 5.9. *Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A\,n + B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna ?*

Soluzione:

La successione $a_n := n^2 + A\,n + B$ é monotona, ovviamente crescente, se $a_{n+1} \geq a_n$ cioé

$$(n+1)^2 + A(n+1) + B \geq n^2 + An + B \quad \Leftrightarrow \quad A + 1 + 2n \geq 0$$

cosa che accade se $A \geq -1$.

Il valore di B, che produce una traslazione della $n^2 + An$ non influisce sul carattere monotono della successione a_n.

La domanda

> *Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna ?*

significa riconoscere se, scelti comunque A e B, i termini a_n comincino comunque a crescere da un certo n_0, dipendente da A e da B in poi.

Ovviamente si !

Infatti il conto svolto sopra indica che

$$a_{n+1} - a_n = A + 1 + 2n$$

quantitá ovviamente positiva per

$$n \geq -\frac{A+1}{2}$$

ESERCIZIO : 5.10. *(impegnativo) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:*

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{{a_n}^2}{4}$$

(1) *Verificare che $\forall n > 1 :\ a_n \geq 1$;*
(2) *dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} :\ a_{n+1} - a_n \geq 0$ (cioé che la successione è crescente) ;*
(3) *dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq 2$;*
(4) *controllare che se esiste il limite di a_n e vale ℓ, allora $\ell = 1 + \ell^2/4$;*
(5) *calcolare il limite di a_n.*

Soluzione:

Verificare che $\forall n > 1 :\ a_n \geq 1$

É ovvio dal momento che i termini della successione si esprimono con

$$a_{n+1} = 1 + \frac{{a_n}^2}{4}$$

somme di 1 piú un quadrato, quindi 1 piú un addendo non negativo.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} - a_n \geq 0}$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n^2}{4} - 2\frac{a_n}{2} = \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2$$

Quindi $a_{n+1} - a_n$ coincide con un quadrato, quindi é non negativo.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq 2}$

É evidente che

$$a_n \leq 2 \quad \to \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \leq 1 + 1 = 2$$

Quindi dal momento che $a_1 \leq 2$ ne segue che

$$a_2 \leq 2, \quad a_3 \leq 2, \quad a_4 \leq 2, \dots$$

$\boxed{\ell = 1 + \ell^2/4}$

Aver accertato che la successione a_n é crescente e limitata implica che sia convergente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \ell^2, \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n^2}{4}\right) = 1 + \ell^2/4$$

Da cui non puó che essere

$$\ell = 1 + \frac{\ell^2}{4}$$

$\boxed{\text{Calcolare il limite di } a_n}$

La relazione $\ell = 1 + \dfrac{\ell^2}{4}$ osservata implica

$$\ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \quad \to \quad \ell = 2$$

ESERCIZIO : 5.11. *Dati* α, β $\in \mathbb{R}$ *e detta*

$$a_n = \frac{n^2 + \alpha \log(n)}{2^n + \beta n^2}$$

determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$ *e esaminare se tale limite dipende dai valori* α *e* β*.*

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^2+\alpha\log(n)}{2^n+\beta n^2} = \frac{1+\alpha\frac{\log(n)}{n^2}}{\frac{2^n}{n^2}+\beta}$$

É noto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{n^2}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=+\infty$$

Ne segue pertanto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\alpha\log(n)}{2^n+\beta n^2}=0$$

indipendentemente da quali siano i valori α e β assegnati.

6. Limiti di funzioni

ESERCIZIO : 6.1. *Calcolare i limiti seguenti :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{6x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+2x^2}{5x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}.$$

Soluzione:

$$\boxed{\frac{\sin(3x)}{6x}}$$

È noto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad t\approx 0 \quad\to\quad \sin(t)\approx t$$

Quindi

$$x\approx 0 \quad\to\quad 3x\approx 0 \quad\to\quad \sin(3x)\approx 3x \quad\to\quad \frac{\sin(3x)}{6x}\approx\frac{1}{2}$$

Ovvero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{6x}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{\sin(x)+2x^2}{5x}}$$

$$x \approx 0 \quad \to \quad \sin(x) \approx x \quad \to \quad \frac{\sin(x)+2x^2}{5x} \approx \frac{x+2x^2}{5x} = \frac{1}{5} + \frac{2x}{5}$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+2x^2}{5x} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{\dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2}}$

$$\frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = 1$$

ESERCIZIO : 6.2. *Sia* $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ *:*

- *determinare il dominio, e calcolare i limiti per* $x \to \pm\infty$*,*
- *dire se* f *può essere prolungata per continuità a tutto* $\mathbb{R}$*,*
- *dire se* f *è limitata.*

Soluzione:

Il dominio di $\dfrac{\sin^2(x)}{x}$ è $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$|f(x)| \le \frac{1}{|x|} \quad \to \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Tenuto presente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

la funzione f può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$, ponendo $f(0) = 0$.

Ogni funzione g continua su $\mathbb{R}$ e dotata dei limiti ℓ^+ e ℓ^- finiti sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ è necessariamente limitata. Infatti

- $\exists b : \quad b \le x \quad \to \quad |g(x)| \le |\ell^+| + 1$
- $\exists a : \quad x \le a \quad \to \quad |g(x)| \le |\ell^-| + 1$
- $\exists m, M : x \in [a,b] \quad \to \quad m \le g(x) \le M$

Dalle disuguaglianze indicate segue che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \min(\ell^+ - 1, \ell^- - 1, m) \leq g(x) \leq \max(\ell^+ + 1, \ell^- + 1, M)$$

La funzione f assegnata in questo esercizio, prolungata per continuità su tutto $\mathbb{R}$ è continua e ha limiti nulli per $x \to \pm\infty$,

... *quindi è limitata.*

ESERCIZIO : 6.3. *Posto* $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *:*

- *dire se vale il Teorema d'esistenza degli zeri nell'intervallo* $[0, 1]$*,*
- *dire se* P *si annulla in qualche punto dell'intervallo* $[-1, 0]$*,*
- *dire se le ipotesi del teorema dei valori intermedi (generalizzato) sono verificate in* $(-\infty, -1]$*,*
- *dire se* P *si annulla in qualche punto dell'intervallo* $(-\infty, -1]$*.*

Soluzione:

Il *Teorema d'esistenza degli zeri* garantisce l'esistenza di un $c \in [a, b]$ in cui $f(c) = 0$ sotto le ipotesi:

- f continua in $[a, b]$,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ cioè valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo.

La funzione proposta, il polimomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ è continua in $\mathbb{R}$ quindi è continua in ogni intervallo.

$$P(0) = 1,\ P(1) = -1 \quad \to \quad \exists c \in [0, 1]:\ P(c) = 0$$

$$P(-1) = -3,\ P(0) = 1, \quad \to \quad \exists c \in [-1, 0]:\ P(c) = 0$$

Per quanto riguarda l'intervallo illimitato $(-\infty, -1]$ tenuto presente che

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty, \quad P(-1) = -3$$

non si hanno valori di segno opposto agli estremi e quindi non è applicabile il *Teorema d'esistenza degli zeri* neanche nella sua forma generalizzata agli intervalli illimitati.

Si osservi tuttavia che le condizioni del *Teorema d'esistenza degli zeri* sono *sufficienti* all'esistenza di uno zero ma non necessarie.

Si pensi, ad esempio alla funzione $x^2 - 1$ nell'intervallo $[-2,2]$: ad entrambi gli estremi ha valori 3, quindi dello stesso segno, ma, ciò nonostante, ha due zeri $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ nell'intervallo $[-2,2]$.

È facile riconoscere del resto che

$$x \leq -1 \qquad \rightarrow \qquad P(x) \leq x^3 - 3 + 1 = x^3 - 2 < 0$$

e quindi nell'intervallo $(-\infty, -1]$ non ci sono zeri per la P.

ESERCIZIO : 6.4. *Dire se le funzioni* $f(x) = x^3\, sign(x)$, $\quad g(x) = (x-1)\, sign(x)$ *sono continue in* $x_0 = 0$.

Soluzione:

$f(x) = x^3 \operatorname{sign}(x)$

La funzione x^3 è continua in $\mathbb{R}$, la $\operatorname{sign}(x)$ è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$: quindi la f prodotto delle due è continua sicuramente dove lo sono entrambi i fattori, quindi in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Si ha inoltre

$$|f(x)| = |x|^3 \cdot |\operatorname{sign}(x)| \leq |x|^3 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

cioè la continuità anche in $x_0 = 0$.

$g(x) = (x-1) \operatorname{sign}(x)$

Come osservato precedentemente la g prodotto di $(x-1)$ e di $\operatorname{sign}(x)$ è continua sicuramente dove lo sono entrambi i fattori, quindi in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Si ha inoltre

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \cdot \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign}(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = -1 \cdot \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign}(x) = -1 \end{cases}$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi quindi la g non è contuna in $x_0 = 0$.

ESERCIZIO : 6.5. *Sia* $f(x) = \dfrac{5x^2}{1+5x^2}$ *:*

- *dire se* f *è continua in* $\mathbb{R}$,
- *calcolare i limiti di* $f(x)$ *per* $x \to \pm\infty$,
- *dire se l'equazione* $f(x) = 1/2$ *ha soluzione.*

Soluzione:

La funzione razionale $f(x) = \dfrac{5x^2}{1+5x^2}$ con denominatore $1+5x^2$ sempre diverso da zero è continua in $\mathbb{R}$.

Tenuto conto che

$$f(x) = \frac{5x^2}{1+5x^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+5x^2}}$$

si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

Scelto $\varepsilon = 0.25$ il fatto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ implica che esiste x_0 tale che

$$x_0 \leq x \quad \to \quad f(x) \in [0.75,\, 1.25] \quad \to \quad f(x) \geq 0.75$$

Considerato quindi che

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) \geq 0.75, \quad 1/2 \in [0, 0.75]$$

dal teorema dei valori intermedi si ha

$$\exists c \in [0, 0.75] : \; f(x) = \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO : 6.6. *Siano* $I_n = [n, +\infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *:*

- *mostrare che* $I_{n+1} \subset I_n$,
- *dire se* $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset$,
- *dire cosa manca alla successione* $\{I_0, I_1, I_2 \dots\}$ *per soddisfare le ipotesi del* Postulato degli intervalli incapsulati *citato a pag.19 delle Dispense.*

Soluzione:

$$\forall x \in I_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq n+1 \quad \rightarrow \quad x \geq n \quad \Leftrightarrow \quad x \in I_n$$

La sequenza di implicazioni corrisponde al controllo che si deve fare per verificare l'inclusione insiemistica $I_{n+1} \subset I_n$.

$$c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \quad \rightarrow \quad c \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La nota divergenza dei naturali a $+\infty$ mostra che un numero c maggiore di ogni naturale non esiste: quindi

$$\nexists c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset$$

Il *Postulato degli intervalli incapsulati* si riferisce a una successione di intervalli

(1) incapsulati,
(2) chiusi,
(3) non vuoti,
(4) limitati.

La successione degli intervalli $\{I_n\}$ introdotti sopra soddisfa alle prime tre condizioni ma non all'ultima: si tratta di intervalli, tutte semirette, illimitati.

ESERCIZIO : 6.7. *Sia* $f(x) = 10^{1/x}$ *:*

- *determinare il dominio di* f*,*
- *determinare i limiti di* f *per* $x \to \pm\infty$
- *determinare* $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$*.*

Soluzione:

Il dominio della funzione esponenziale $f(x) = 10^{1/x}$ è determinato dal dominio dell'espressione $1/x$ ad esponente: $x \neq 0$.

Pertanto il dominio di f è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Consideriamo il limite per $x \to +\infty$:qualunque sia la successione x_n divergente in modo crescente a $+\infty$ la successione dei reciproci $1/x_n$ tende in modo decrescente a zero.

Quindi $10^{1/x_n}$ è una successione limitata e decrescente anch'essa: quindi è convergente e sia $\ell \geq 0$ il suo limite.

$$\lim_{n\to\infty} 10^{1/x_n} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \ell^{x_n}$$

- se fosse $0 \leq \ell < 1$ la successione ℓ^{x_n} sarebbe infinitesima,
- se fosse $1 < \ell$ la successione ℓ^{x_n} sarebbe divergente positivamente.

Resta l'unica possibilità, a questo punto obbligata,

$$\ell = 1$$

Il limite per $x \to -\infty$ si riconosce in modo analogo: se x_n è una successione decrescente a $-\infty$ allora la successione dei reciproci $1/x_n$ è crescente a zero.

Quindi la successione $10^{1/x_n}$ è crescente e limitata: sia $\ell \geq 0$ il suo limite. Si escludono le possibilità di $0 \leq \ell < 1$ e quella di $1 < \ell$ con le stesse osservazioni di sopra.

Pertanto si riconosce che

$$\lim_{x\to\pm\infty} 10^{1/x} = 1$$

I limiti

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

permettono di riconoscere, eventualmente giustificando le conclusioni analogamente a quanto fatto sopra per i limiti a $\pm\infty$, che

$$\lim_{x\to 0^-} 10^{1/x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} 10^{1/x} = +\infty$$

OSSERVAZIONE 6.1. *Il grafico della $10^{1/x}$ è, in un certo senso riconducibile a quello della semplice $1/x$:*

ESERCIZIO : 6.8. *Sia $f(x) = \log_{10}(1+x^2)$:*

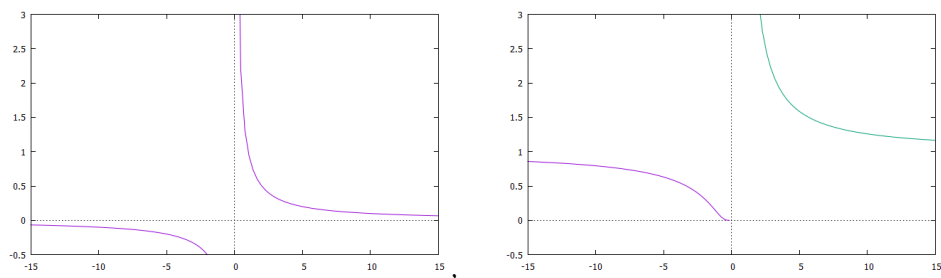



FIGURA 62. Esercizio 5: $1/x$, $\quad 10^{1/x}$

- *determinare i limiti di f per $x \to \pm\infty$,*
- *dire se l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzione per ogni $\lambda \geq 0$.*

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \qquad \to \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \log_{10}(1+x^2) = +\infty$$

Tenuto conto che

$$f(0) = 0, \lim_{x\to\pm\infty} \log_{10}(1+x^2) = +\infty \quad \to \quad \forall\lambda \in [0,+\infty) \quad \exists c \in \mathbb{R} : f(c) = \lambda$$

La soluzione c dell'equazione è naturalmente scritta con l'algoritmo seguente

$$\log_{10}(1+c^2) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad 1+c^2 = 10^\lambda \quad \Leftrightarrow \quad c = \pm\sqrt{10^\lambda - 1}$$

ESERCIZIO : 6.9. *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}, \quad (x > 0)$$

- *calcolare i limiti* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$,
- *dire se l'equazione $f(x) = 3$ ha soluzione,*
- *dire se f è limitata inferiormente.*

Soluzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^6}\left(\frac{1}{x^6} - 1\right) \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x\to 0^+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

Posto $t = 1/x^6$ l'espressione della f assegnata diventa

$$t^2 - t$$

il valore t per cui $t^2 - t = (t - 1/2)^2 - 1/4$ è più basso è $t = 1/2$ e il minimo è $-1/4$.

Si ottiene $t = 1/2$ per $x_0 = \sqrt[6]{2}$: ovvero

$$f(x_0) = -\frac{1}{4} < 3, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad \exists c \in (0, \sqrt[6]{2}) : \ f(c) = 3$$

f è limitata inferiormente: $f(x) \geq -\frac{1}{4}$: l'immagine di f è pertanto l'intervallo $[-1/4, +\infty)$.

ESERCIZIO : 6.10. *(impegnativo) Sia $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ con limiti per $x \to \pm\infty$ entrambi $+\infty$: dimostrare che esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che l'immagine di f è $[m, +\infty)$.*

Soluzione:

La condizione

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad \exists M : \ |x| \geq M \quad \to \quad f(x) \geq 1$$

Sia $m_1 = \min_{-M\leq x\leq M} f(x)$: osserviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha una delle due possibilità

- o $|x| > M$, e allora $f(x) \geq 1$
- o $|x| \leq M$ e allora $f(x) \geq m_1$

Quindi

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq m = \min\{1, m_1\}$$

ovvero f è limitata inferiormente.

Il valore m_1 è un valore della funzione (è il punto di minimo nell'intervallo $[-M,M]$) quindi se

$$m_1 \leq 1 \quad \to \quad m = m_1, \quad \to \quad m_1 = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

Se invece $1 < m_1$ sia M_1 tale che posto

$$\forall\,|x| \geq M_1 : \quad f(x) \geq m_1$$

Detto $m_2 = \min_{|x|\leq M_1} f(x)$: tenuto presente che $M \leq M_1$ si ha $m_2 \leq m_1$.

Osserviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha una delle due possibilità

- o $|x| > M_1$, e allora $f(x) \geq m_1$
- o $|x| \leq M_1$ e allora $f(x) \geq m_2$.

Tenuto presente che $M \leq M_1$ e qui ndi $m_2 \leq m_1$ si ha

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq m_2$$

Tenuto presente (teorema dei valori intermedi) che l'immagine dell'intervallo $\mathbb{R}$ tramite la funzione continua f deve essere un intervallo, l'immagine non può che essere

- nel caso $m_1 \leq 1$ la semiretta $[m_1,+\infty)$,
- nel secondo caso $1 < m_1$ la semiretta $[m_2,+\infty)$

7. Rapporti incrementali, derivate

ESERCIZIO : 7.1. *Scrivere i rapporti incrementali delle funzioni*

$$r(x) = 1 + x + x^2, \quad g(x) = (1 + x^2)^3, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

tra x_0 *e* $x_0 + h$ *essendo* $x_0 = 1$ *e* $h = 2$.

Soluzione:

$$x_0 = 1,\ x_0 + h = 3 \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{r(3) - r(1)}{2} & = \dfrac{13 - 3}{2} & = 5 \\ \dfrac{g(3) - g(1)}{2} & = \dfrac{1000 - 8}{2} & = 496 \\ \dfrac{f(3) - f(1)}{2} & = \dfrac{0.1 - 0.5}{2} & = -0.2 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 7.2. *Sia* f *definita in* $\mathbb{R}$ *da*

$$f(x) = \begin{cases} a\,x & se \quad x \leq 0 \\ \sin(x) & se \quad 0 < x \end{cases}$$

- *determinare dove* f *è continua,*
- *scrivere il rapporto incrementale nell'origine,*
- *determinare per quali scelta di* a f *è derivabile nell'origine.*

Soluzione:

- f è continua nelle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, inoltre tenuto conto che

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

  si riconosce che f è comtinua anche nell'origine. Quindi f è continua in $\mathbb{R}$.

- il rapporto incrementale nell'origine ha espressione diversa a seconda che $h < 0$ o $h > 0$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{ah}{h} = a & \text{se} \quad h < 0 \\ \dfrac{\sin(h)}{h} & \text{se} \quad h > 0 \end{cases}$$

- I limiti per $h \to 0^-$ della prima e quello per $h \to 0^+$ della seconda valgono rispettivamente a e 1: pertanto f è derivabile nell'origine se e solo se $a = 1$.

ESERCIZIO : 7.3. *Calcolare le derivate delle funzioni:*

$$f(x) = \sin(x+\pi), \quad g(x) = \tan(x), \quad r(x) = \sqrt{1+x}$$

rispettivamente nei punti π, $\pi/4$, 0.

Soluzione:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x+\pi) & f'(x) = \cos(x+\pi) & f'(\pi) = 1 \\ g(x) = \tan(x) & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & g'(\pi/4) = 2 \\ r(x) = \sqrt{1+x} & r'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & r'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO : 7.4. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ *nel punto* $P = (1, f(1))$.

Soluzione:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \quad \to \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{2\sqrt{(1+1)^3}}(x-1)$$

da cui

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{8}}(x-1)$$

ESERCIZIO : *7.5. Sia $f(x) = x^3 + x + 13$*

- *verificare che $f(x)$ è strettamente crescente,*
- *determinare l'immagine di f,*
- *detta g l'inversa di f, calcolare $g(15)$,*
- *determinare la derivata $g'(15)$.*

Soluzione:

- $f(x)$ è strettamente crescente perchè è somma di funzioni x^3 e $x+13$ strettamente crescenti,
- la funzione continua f è definita in $\mathbb{R}$, quindi la sua immagine è un intervallo: tenuto conto che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si riconosce che l'intervallo immagine è $-\infty, +\infty)$,
- tenuto conto che $f(1) = 13$ si ha $g(13) = 1$,
- la regola di derivazione dell'inversa produce

$$g'(13) = \frac{1}{f'[g(13)]} = \frac{1}{f'[1]} = \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO : *7.6. Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione $|x|^\alpha$ è definita, continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e calcolare la sua derivata.*

Soluzione:

Poniamo $f(x) = |x|^\alpha$, funzione continua in $\mathbb{R}$.

Per $x > 0$ si ha $f(x) = x^\alpha$ funzione derivabile con derivata $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Per $x < 0$ si ha $|x|^\alpha = f(-x)$ funzione derivabile con derivata

$$(f(-x))' = -f'(-x) = -\alpha\,|-x|^{\alpha-1} = -\alpha\,|x|^{\alpha-1}$$

Le due espressioni, quella per $x > 0$ e quella per $x < 0$ possono riassumersi nell'e-spressione

Per $x = 0$ il rapprto incrementale di f diventa

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{|h|^\alpha}{h}$$

È evidente che

- se $0 < \alpha < 1$
$$\begin{cases} \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|^\alpha}{h} = -\infty \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|^\alpha}{h} = +\infty \end{cases}$$
limiti diversi, quindi la derivata non esiste,
- se $\alpha = 1$ la f è la nota funzione $|x|$ che sappiamo non derivabile nell'origine,
- se $1 < \alpha$ riesce
$$\frac{|h|^\alpha}{h} = |h|^{\alpha-1}\frac{|h|}{h} \quad \to \quad \frac{|h|^\alpha}{h} \leq |h|^{\alpha-1} \quad \to \quad \lim_{h\to 0}\frac{|h|^\alpha}{h} = 0$$
derivata esiste ed è nulla nell'origine.

ESERCIZIO : 7.7. *Sia $f(x) = \sin(x)$:*

- *dire dove è definita e continua $|f|^{3/2}$,*
- *dire dove $|f|^{3/2}$ è anche derivabile e calcolare la sua derivata.*

Soluzione:

La funzione $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è la composizione della $g(t) = |t|^{3/2}$ con la $\sin(x)$

$$f(x) = g[\sin(x)]$$

tenuto presente che sia $\sin(x)$ che $g(t)$ sono continue in tutto $\mathbb{R}$ si riconosce che la funzione composta $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Le funzioni $\sin(x)$ e $g(t)$ sono entrambe derivabili[4] in tutto $\mathbb{R}$ e pertanto la funzione composta $f(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

L'espressione della derivata è quella offerta dalla regola di derivazione delle funzioni composte:

---

[4] $|x|^\alpha$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ se $\alpha > 1$ e nel nostro caso $\alpha = 3/2$.

ESERCIZIO : 7.8. *Sia* $f(x) = |1-x^2|^3\,(1+\sin^2(x))$*:*

- *posto* $g(x) = \ln(f(x)$ *scrivere l'espressione di* $g(x)$*,*
- *calcolare* $g'(x)$*,*
- *verificare che* $f'(x) = g'(x) \cdot f(x)$*.*

Soluzione:

Se $a > 0$ e $b > 0$ si ha $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ pertanto per $x \neq -1, x \neq 1$ si ha

$$g(x) = \ln(f(x)) = \ln(|1-x^2|^3) + \ln(1+\sin^2(x))$$

Tenuto conto della formula di derivazione del logaritmo naturale

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

si ha

$$g'(x) = \frac{-6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)}{|1-x^2|} + \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) & = -6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)|1-x^2|^2(1+\sin^2(x)) + |1-x^2|^3\,2\sin(x)\cos(x) \\ g'(x)\cdot f(x) & = -6x\,\mathrm{sign}(1-x^2)|1-x^2|^2(1+\sin^2(x)) + |1-x^2|^3\,2\sin(x)\cos(x) \end{array}$$

ESERCIZIO : 7.9. *Posto* $f(x) = x^3+5x^2+2x-1$ *determinare il polinomio*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{[k]}(1)}{k!}\,(x-1)^k$$

ove con $f^{(0)}(1)$ *si intende* $f(1)$*, con* $f^{(1)}(1)$ *si intende* $f'(1)$*, con* $f^{(2)}(1)$ *si intende* $f''(1)$ *ecc., e calcolare la differenza* $f(x) - P(x)$*.*

Soluzione:

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = x^3+5x^2+2x-1 & \to \quad f^{(0)}(1) = 7 \\ f^{(1)}(x) = 3x^2+10x+2 & \to \quad f^{(1)}(1) = 15 \\ f^{(2)}(x) = 6x+10 & \to \quad f^{(2)}(1) = 16 \\ f^{(3)}(x) = 6 & \to \quad f^{(3)}(1) = 6 \\ f^{(4)}(x) = 0 & \to \quad f^{(4)}(1) = 0 \end{cases}$$

$$P(x) = 7+15(x-1)+8(x-1)^2+(x-1)^3$$

Sviluppando le potenze si ottiene

$P(x) = 7 + (15x - 15) + (8x^2 - 16x + 8) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^3 + 5x^2 + 2x - 1$

da cui la scoperta che

$$P(x) \equiv f(x)$$

ESERCIZIO : 7.10. *Sia $f(x) = x^3 - x$ e sia $h > 0$ assegnato: determinare un punto di Lagrange $\xi \in [0, h]$, cioè tale che*

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi)$$

Soluzione:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^3 - h}{h} = h^2 - 1$$

Tenuto presente che $f'(x) = 3x^2 - 1$ il punto ξ cercato deve soddisfare l'equazione

$$3\xi^2 - 1 = h^2 - 1 \quad \rightarrow \quad 3\xi^2 = h^2 \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{3}} h \in [0, h]$$

ESERCIZIO : 7.11. *Dire se $e^{|x-1|}$ ammette minimo in $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.*

Soluzione:

La funzione esponenziale $f(x) = e^{|x-1|}$, continua in $\mathbb{R}$ ha i due limiti per $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$ entrambi $+\infty$, quindi come osservato altre volte ammette minimo m e, anzi, la sua immagine è l'intervallo illimitato $[m, +\infty)$.

Il fatto che la funzione $f(x) = e^{|x-1|}$ ammetta minimo in $\mathbb{R}$ è, in questo caso quasi ovvio tenuto conto che:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq 0, \quad \rightarrow \quad e^{|x-1|} \geq e^0$$

Quindi $e^0 = 1$ è il minimo e viene raggiunto nel punto $x_0 = 1$.

ESERCIZIO : 7.12. (Impegnativo) *Provare che se*

- *f è continua e dotata di derivate prima e seconda nell'intervallo I,*
- *e si annulla in almeno tre punti distinti di I,*

esiste almeno un punto $c \in I$ in cui riesce $f''(c) = 0$.

Soluzione:

Siano $\alpha < \beta < \gamma$ i tre punti di I in cui la funzione si annulla.

Applicando il teorema di Rolle alla f riferendosi all'intervallo $[\alpha, \beta]$, ai cui estremi f prende lo stesso valore, lo zero, si deduce l'esistenza di $a \in [\alpha, \beta] \subset I$ in cui $f'(a) = 0$.

Analogamente riferendosi all'intervallo $[\beta, \gamma]$ si deduce l'esistenza di $b \in [\beta, \gamma] \subset I$ in cui $f'(b) = 0$.

Applicando ora il teorema di Rolla alla f' riferendosi all'intervallo $[a, b]$ f' prende lo stesso valore, lo zero, ai due estremi, si deduce l'esistenza di $c \in [a, b] \subset I$ in cui $f''(c) = 0$.

8. Derivabilità, polinomi di Taylor

ESERCIZIO : 8.1.

Sia $f(x) = \sqrt{|x-1|}$:

- *determinare il dominio di definizione di f,*
- *determinare l'immagine di f,*
- *determinare l'insieme di derivabilità,*
- *calcolare il limite del rapporto incrementale di f in $x_0 = 1$ da sinistra e da destra.*

Soluzione:

L'espressione sotto radice, un modulo, è sempre maggiore o uguale a zero, quindi la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

L'immagine di f, funzione continua in $\mathbb{R}$ è un intervallo I: tenuto conto che

$$f(x) \geq 0, \quad f(1) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

si ha $I = [0, +\infty)$.

La funzione f è composta dalla radice quadrata e dal modulo:

- $|x-1|$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$
- la radice è derivabile se l'espressione sotto radice è positiva

Quindi f è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h} \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = +\infty \end{cases}$$

ESERCIZIO : 8.2.

Sia $f(x) = x^2 \sin(1/x)$:

- *dire se è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$,*

- *calcolare la derivata $f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,*
- *calcolare i limiti di f per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.*

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \sin(1/x) \quad \to \quad |f(x)| \leq x^2 \quad \to \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

La funzione f è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$ attribuendole il valore 0 nell'origine.

Se $x \neq 0$ si ha, ovviamente $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$.

Per $x = 0$ il rapporto incrementale è

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h\sin(1/h) \quad \to \quad \left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leq |h| \to 0$$

La derivata in $x = 0$ esiste e vale zero.

ESERCIZIO : 8.3.

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ x^2(\ln(|x|)+1) & se \quad x \neq 0 \end{cases}$$

- *determinare $\lim_{x\to 0} f(x)$*
- *determinare il rapporto incrementale $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, $h \neq 0$*
- *dire se f è una funzione pari,*
- *calcolare i limiti di f per $x \to \pm\infty$ e dire se f ammette minimo.*

Soluzione:

$f(x)$ è una funzione pari, quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [x^2(\ln(x)+1)]$$

Posto

$$x = e^t \quad \to \quad x^2\ln(x) = t\,e^{2t} = \frac{t}{e^{-2t}}$$

si riconosce che

$$0 \approx x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \approx -\infty$$

e quindi

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-2t}} = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to 0}[x^2(\ln(|x|)+1)] = 0$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2(\ln(1+h)+1)-1}{h} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi esiste il minimo.

ESERCIZIO : 8.4.

Sia $f(x) = e^x + e^{-x}$:

- *dire se f è una funzione pari,*
- *calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$*
- *determinare il minimo di f*
- *determinare il polinomio di Taylor di f con $x_0 = 0$ ed $n = 2$.*

Soluzione:

$f(x) = 2\cosh(x)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

Minimo: $f'(x) = e^x - e^{-x}, \quad f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$, minimo = $f(0) = 2$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} = 2 + x^2$$

ESERCIZIO : 8.5.

Sia $f(x) = |x-1| + |x-2|$:

- *elencare i punti nei quali f non è derivabile,*
- *determinare l'espressione della derivata nei punti in cui f è derivabile,*
- *esaminare se f sia convessa (vedi Dispense, parte 3, pag10).*

Soluzione:

$f(x) = |x-1| + |x-2|$ non è derivabile nei due punti $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x+2-x & \text{se} \quad x<1 & f'(x) = -2 \\ x-1+2-x & \text{se} \quad 1<x<2 & f'(x) = 0 \\ x-1+x-2 & \text{se} \quad 2<x & f'(x) = 2 \end{cases}$$

Se f e g sono convesse allora è convessa anche $s = f+g$: infatti

$$\begin{cases} f[ta+(1-t)b] \leq tf(a)+(1-t)f(b) \\ g[ta+(1-t)b] \leq tg(a)+(1-t)g(b) \end{cases} \quad \to \quad s[ta+(1-t)b] \leq ts(a)+(1-t)s(b)$$

ESERCIZIO : 8.6.

Sia $f(x) = e^{-(x-1)^2}$:

- *calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$,*
- *calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} x f(x)$*
- *calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x)$*

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x)$$

ESERCIZIO : 8.7.

Dette $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sia $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$:

- *verificare che F è continua nell'origine,*
- *dimostrare che F non è derivabile in $x_0 = 1$ e in $x_1 = 1$,*
- *calcolare $F'(x)$ per $x \neq 0$ e $x \neq 1$.*

Soluzione:

La continuità è vera in generale.

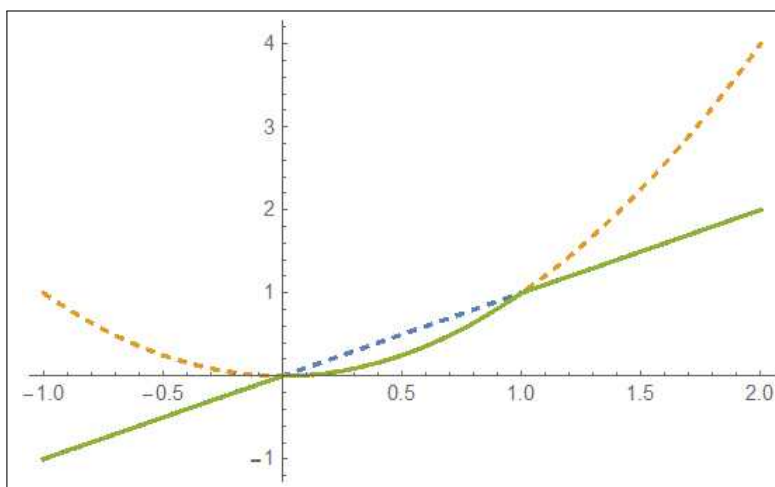



FIGURA 63. $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sia $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

La derivabilità no perchè ci possono essere punti angolosi.

ESERCIZIO : 8.8.
Siano $f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \cos(x^2)$*:*

- *determinare il polinomio di Taylor* $T_2(x;0)$ *di* f *relativo a* $x_0 = 0$ *ed* $n = 2$
- *determinare il polinomio di Taylor* $T_4(x;0)$ *di* g *relativo a* $x_0 = 0$ *ed* $n = 4$
- *scrivere le espressioni di Lagrange dei resti* $f(x) - T_2(x;0)$ *e* $g(x) - T_4(x;0)$ *(Dispense, parte 3, pag.43).*

Soluzione:

$$\cos(x) \quad \to \quad 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos(x^2) \quad \to \quad 1 - \frac{x^4}{2}$$

$$\cos(x) - \left\{1 - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{2!}\sin(c)\,x^3$$

$$\cos(x^2) - \left\{1 - \frac{x^4}{2}\right\} = \frac{1}{5!}\left(120c\sin\left(c^2\right) - 32c^5\sin\left(c^2\right) + 160c^3\cos\left(c^2\right)\right)x^5$$

ESERCIZIO : 8.9.

Siano $f(x) = \sin(x+\pi/2)$, $g(x) = \ln(1+x)$, $s(x) = \sqrt{24+x}$:

- *determinare per ciascuna delle tre funzioni i due polinomi di Taylor con $x_0 = 0$ e $n = 1$ e $n = 2$,*
- *scrivere in ciascuno dei sei casi le espressioni di Lagrange dei resti (Dispense, parte 3, pag.43).*

Soluzione:

$$f(x) = \sin(x+\pi/2) \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad 1 & \to \quad -\frac{1}{2}\cos(c)x^2 \\ n=2 & \to \quad 1-\frac{x^2}{2} & \to \quad \frac{1}{3!}\sin(c)x^3 \end{cases}$$

$$g(x) = \ln(1+x) \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad x & \to \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{(c+1)^2}x^2 \\ n=2 & \to \quad x-\frac{x^2}{2} & \to \quad \frac{1}{3!}\frac{2}{(c+1)^3}x^3 \end{cases}$$

$$s(x) = \sqrt{24+x} \quad \to \quad \begin{cases} n=1 & \to \quad \frac{x}{4\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} & \to \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4(c+24)^{3/2}}x^2 \\ n=2 & \to \quad -\frac{x^2}{384\sqrt{6}} + \frac{x}{4\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} & \to \quad \frac{1}{3!}\frac{3}{8(c+24)^{5/2}}x^3 \end{cases}$$

ESERCIZIO : 8.10. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^8}-1}{x^5\sin(x^3)}$$

servendosi per il numeratore e per il denominatore di opportuni polinomi di Taylor.

Soluzione:

$$\frac{e^{x^8}-1}{x^5\sin(x^3)} \approx \frac{x^8+\dots}{x^5x^3+\dots} \approx 1$$

ESERCIZIO : 8.11. *Sia $f(x) = e^x$:*

- *rappresentare, servendosi del teorema di Lagrange, la differenza* $e^{1/n} - e^0, \quad n = 1, 2, \dots,$
- *riconoscere che* $e^{1/n} - 1 \leq \frac{1}{n} e^{1/n}$
- *riconoscere che*

$$e^{1/n} \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n-1}$$

Soluzione:

$$e^b - e^a = e^c(b-a) \quad \to \quad e^{1/n} - e^0 = e^c \frac{1}{n}$$

Tenuto conto che e^x è crescente $c \in (0, 1/n) \quad \to \quad e^c \leq e^{1/n}$ da cui

$$e^{1/n} - e^0 \leq e^{1/n} \frac{1}{n}$$

$$e^{1/n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

ovvero

$$e^{1/n} \leq \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})} = \frac{n}{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

9. Integrali, funzioni integrali

ESERCIZIO : 9.1. *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 3 & se \quad x \in [\frac{1}{4}, 1) \\ 1 & se \quad x \in [1, 2) \\ \frac{1}{2} & se \quad x \in [2, 4] \end{cases}$$

- *disegnare il grafico di* f,
- *calcolare* $\int_0^4 f(x)\,dx$

Soluzione:

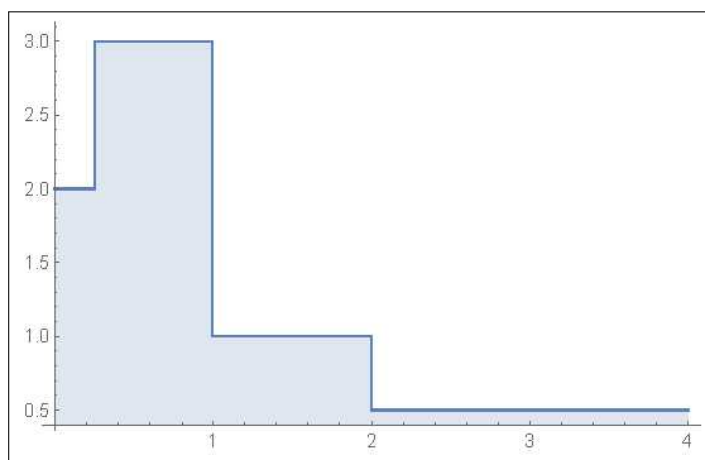



FIGURA 64. $f(x)$ costante a tratti.

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4} + 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{19}{4} = 4.75$$

ESERCIZIO : 9.2. *Detta* $[x]$ *la funzione parte intera calcolare l'integrale* $\int_{-0.75}^{3.6} [x]\,dx$.

Soluzione:

$$\int_{-0.75}^{3.6} [x]\,dx = -1 \times 0.75 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0.6 = 4.05$$

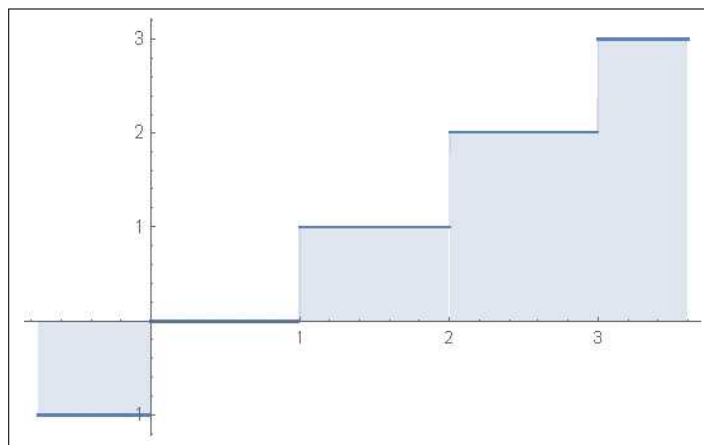



FIGURA 65. $[x]$, $\quad -0.75 \leq x \leq 3.6$

Nota: In molti software la funzione $[x]$ si chiama *Floor(x)*.

ESERCIZIO : 9.3. *Disegnare i grafici delle funzioni $|x|$, $|x-1|$, $|x|+|x-1|$ e calcolare con i valori delle aree dei sottografici ottenibili attraverso la geometria gli integrali $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$, $\quad \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$, $\quad \int_{-1}^{2} |x|+|x-1|\,dx$.*

Soluzione:

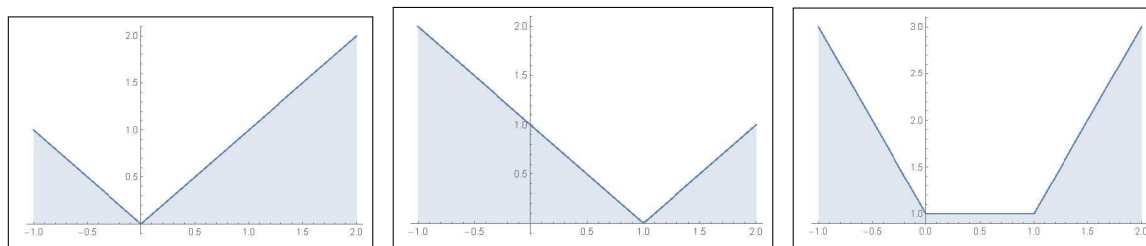



FIGURA 66. $|x|$, $\quad |x-1|$, $|x|+|x-1|$, $\quad -1 \leq x \leq 2$

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \frac{5}{2}, \quad \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx = \frac{5}{2}, \quad \to \quad \int_{-1}^{2} (|x|+|x-1|)\,dx = 5$$

ESERCIZIO : 9.4. *Disegnare il grafico della funzione* $f(t) = \min\{1, t^2\}$ *e calcolare la funzione integrale*

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \geq 0$$

Soluzione:

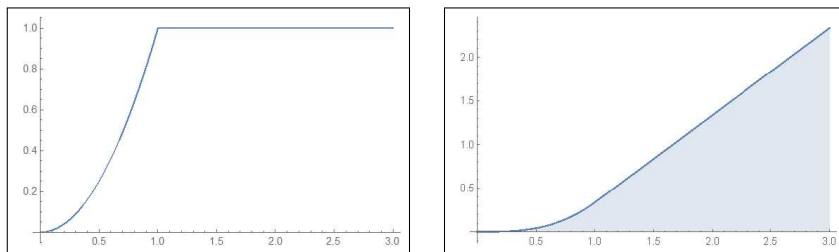



FIGURA 67. $f(t), \quad G(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad 0 \leq x \leq 3$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} + (x-1) & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

ESERCIZIO : 9.5. *Calcolare, servendosi delle primitive, i seguenti integrali*

$$\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1)\,dx, \ \int_0^\pi \sin(2x)\,dx, \ \int_0^1 4e^{2x+1}\,dx, \ \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,dx,$$

Soluzione:

$f(x)$	$F(x)$	$\int_0^1 f(x)dx$
$3x^2 - 5x + 1$	$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$	$\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1)\,dx = -\frac{1}{2}$
$\sin(2x)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0$
$4e^{2x+1}$	$2e^{2x+1}$	$\int_0^1 4e^{2x+1}\,dx = 2e\left(e^2 - 1\right)$
$(2x+1)e^{x^2+x}$	e^{x^2+x}	$\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,dx = e^2 - 1$

ESERCIZIO : 9.6. *Determinare le seguenti funzioni primitive,*

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx, \quad \int x^2\sin(x^3)\,dx, \quad \int 2x(5+x^2)^9\,dx$$

Soluzione:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx \quad \to \quad \ln(|x^2+3x+1|)$$

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx \quad \to \quad -\tfrac{1}{3}\cos(x^3)$$

$$\int 2x(5+x^2)^9\,dx \quad \to \quad \tfrac{1}{10}(5+x^2)^{10}$$

ESERCIZIO : 9.7. *Calcolare i seguenti integrali, tenute presenti le derivate di* $\ln(x)$ *e di* $\arctan(x)$*,*

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{3+x}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x-5}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{9+4x^2}\,dx$$

Soluzione:

Tenuto presente che servendosi della regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\ln(|x|) & = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{d}{dx}\arctan(x) & = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\ln(|f(x)|) & = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, \\ \dfrac{d}{dx}\arctan(g(x)) & = \dfrac{g'(x)}{1+g^2(x)} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3+x}\,dx = [\ln(|3+x|)]_0^1 = \ln(4)-\ln(3) = \ln(4/3)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-5}\,dx = [\ln(|x-5|)]_0^1 = \ln(4)-\ln(5) = \ln(4/5)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{9+4x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{4}{9}x^2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2}\,dx = \left[\frac{1}{6}\arctan(\tfrac{2}{3}x)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\arctan(\tfrac{2}{3})$$

ESERCIZIO : 9.8. *Servendosi della* regola di integrazione per parti *calcolare i seguenti integrali*

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx$$

Soluzione:

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx = \int_0^{2\pi} x(-\cos(x))'\,dx = [-x\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = -2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,(-\cos(x))'\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\sin^2(x))\,dx \quad \to \quad 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\pi$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(3x)\,(\frac{1}{4}\sin(4x))'\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin(3x)\sin(4x)\right]_0^{2\pi} - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

Scegliendo nell'altro modo i fattori sui quali applicare la regola di integrazione per parti si ha anche

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{3}\cos(3x))'\cos(4x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\cos(4x)\right]_0^{2\pi} - \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx = -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

Detto

$$A = \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\,dx, \quad B = \int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)\,dx$$

Le due relazioni cui si è giunti producono il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} A + \frac{3}{4}B = 0 \\ \\ A + \frac{4}{3}B = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}B = \frac{4}{3}B \quad \rightarrow \quad B = 0$$

e quindi di conseguenza $A = 0$.

Il risultato

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\cos(4x)\,dx = 0$$

si ricorda generalmente dicendo che le due funzioni $\sin(3x)$ e $\cos(4x)$ *sono ortogonali* sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Sono ugualmente *ortogonali* sull'intervallo $[0, 2\pi]$ tutte le coppie

$$\sin(nx)\cos(mx) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

come pure tutte le coppie

$$\sin(nx)\sin(mx), \quad \cos(nx)\cos(mx) \qquad n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$$

Si ricordi anche che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ESERCIZIO : 9.9. *Ricordando che $(P(x)\,e^x)' = \{P'(x) + P(x)\}\,e^x$ determinare le primitive*

$$\int x e^x\,dx, \quad \int x^3 e^x\,dx, \quad \int (x^4 + 3x + 1)\,e^x\,dx, \quad \int x^5 e^{2x}\,dx$$

Soluzione:

Una primitiva di $x e^x$ sarà sicuramente della forma $P(x)\,e^x$ purchè $P'(x) + P(x) \equiv x$.

Scelto il polinomio del grado più basso possibile $P(x) = ax + b$ si deve avere quindi

$$P'(x) + P(x) = a + ax + b \equiv x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad b = -1$$

Quindi una primitiva di $x e^x$ è $\boxed{(x-1)\,e^x}$.

Una primitiva di $x^3\, e^x$ sarà della forma

$$P(x)\, e^x \;=\; (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, e^x$$

da cui imponendo $P'(x) + P(x) \equiv x^3$ si ha

$$3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3$$

implica

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 6, \quad d = -6$$

Quindi una primitiva di $x^3\, e^x$ è $\boxed{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x}$.

Una primitiva di $(x^4 + 3x + 1)\, e^x$ sarà della forma

$$P(x)\, e^x \;=\; (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + g)\, e^x$$

da cui imponendo $P'(x) + P(x) \equiv x^4 + 3x + 1$ si ha $\boxed{e^x \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 21x + 22\right)}$.

Una primitiva di $x^5\, e^x$ sarà della forma

$$P(x)\, e^x \;=\; (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + gx + s)\, e^x$$

da cui imponendo $P'(x) + P(x) \equiv x^5$ si ha

$$a = 1,\, b = -5,\, c = 20,\, d = -60,\, g = 120,\, s = -120$$

e quindi la primitiva $\boxed{e^x \left(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120\right)}$

ESERCIZIO : 9.10. *Servendosi della* regola di integrazione per sostituzione *calcolare i seguenti integrali*

$$\int_0^{\pi/4} \sin(4x + \pi)\, dx, \qquad \int_1^{1+2\pi} \cos(3x - 1)\, dx$$

Soluzione:

Posto $4x + \pi = t \quad \to \quad x = \frac{1}{4}(t - \pi)$ si ha

$$x \in (0, \pi/4) \quad \Leftrightarrow \quad t \in (0, 2\pi)$$

da cui

$$\int_0^{\pi/4} \sin(4x + \pi)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(t)\, \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4}\, [-\cos(t)]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

Per il secondo integrale:

posto $3x-1=t \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{3}(t+1)$ si ha

$$x\in[1,\,1+2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad t\in[2,2+6\pi]$$

da cui

$$\int_1^{1+2\pi}\cos(3x-1)\,dx=\int_2^{2+6\pi}\frac{1}{3}\cos(t)\,dt=\frac{1}{3}\,[\sin(t)]_2^{2+6\pi}=0$$

ESERCIZIO : 9.11. *Verificare che i seguenti integrali impropri convergono*

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x^4}dx,\quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln(x^2)}dx.$$

Soluzione:

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\arctan(b)=\frac{\pi}{2}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x^4}\,dx$

Tenuto conto che:

- $F(b)=\int_1^b\frac{1}{x^2+x^4}\,dx$ è funzione crescente di b,
- $\forall x\geq 1: \quad \frac{1}{x^2+x^4}\leq\frac{1}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad F(b)\leq\arctan(b)-\arctan(1)\leq\frac{\pi}{4}$

ne segue che $F(b)$, crescente e limitata ha necessariamente limite peer $b\to+\infty$, quindi ne segue che esiste, finito, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x^4}\,dx$.

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln(x^2)}.$

Analogamente a quanto osservato sopra si ha:

- $F(b)=\int_2^b\frac{1}{x^2\ln(x^2)}dx$ è funzione crescente di b $\forall b\geq 2$,
- $x\geq 2 \quad \rightarrow \quad \ln(x^2)>1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x^2\ln(x^2)}<\frac{1}{x^2}$,

Ne segue che

$$F(b)\leq\int_2^b\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\leq\frac{1}{2}$$

e quindi $F(b)$ crescente e limitata avrà sicuramente limite per $b \to \infty$, esiste cioè finito l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x^2)} dx.$$

ESERCIZIO : 9.12. *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int_{-15}^{15} (1 + x^{17})\, dx, \quad \int_{-4}^{4} \sin^3(x) e^{x^2}\, dx, \quad \int_{-2}^{2} x^2 \sin(x^3)\, dx$$

Soluzione:

La funzione x^{17} è dispari, quindi dalle relazioni di linearit'a e di additività

$$\int_{-15}^{15} (1 + x^{17})\, dx = 30 + \int_{-15}^{0} x^{17}\, dx + \int_{0}^{15} x^{17}\, dx$$

e dal fatto che la funzione integranda è dispari discende che

$$\int_{-15}^{0} x^{17}\, dx = -\int_{0}^{15} x^{17}\, dx$$

da cui

$$\int_{-15}^{15} (1 + x^{17})\, dx = 30$$

Risultato analogo per gli altri due integrali.

Si ricordi quindi che se f, come x^{17}, $\sin^3(x)$, $x^2 \sin(x^3)$, è una funzione dispari gli integrali su intervalli simmetrici rispetto all'origine

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

sono tutti nulli.

ESERCIZIO : 9.13. *Sperimentare che, al variare di* $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

e dedurre che mantenendosi limitati i secondi membri altrettanto faranno i primi.

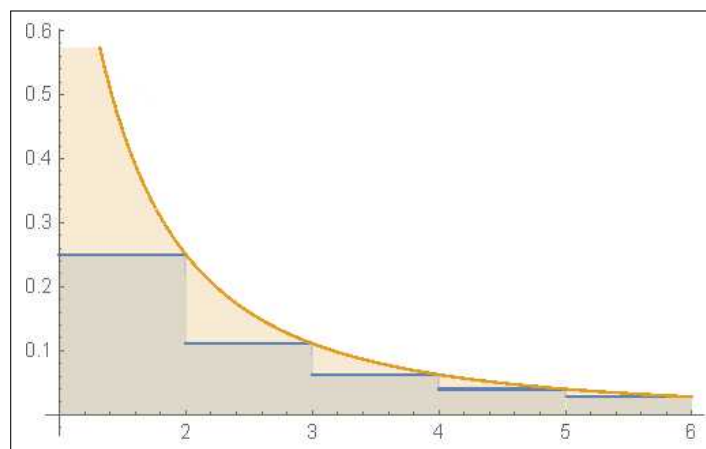



FIGURA 68. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx, \ (n=6)$

Soluzione:

Tenuta presente la disuguaglianza evidenziata in Figura si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{n} \le 1$$

È noto che :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.645, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1,$$

Un confronto analogo per ogni $\alpha > 1$ prova che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \to \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{1}{\alpha - 1}$$

ESERCIZIO : 9.14. *Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$:*

- *calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)$;*
- *dedurre dal punto precedente che esiste $a > 0$ tale che $f(x) \le \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in [a, +\infty)$;*
- *dire se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.*

Soluzione:

Tenuta presente la formula di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}e^{\xi}x^3 \quad \to \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}e^{\xi}x^6 \quad \to \quad e^{x^2} \geq 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4$$

ne deriva

$$x^2 f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}} \leq \frac{x^2}{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4} \leq \frac{2}{x^2} \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0$$

Ancora dalla formula di Taylor precedentemente osservata si ha

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4} \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \geq 0$$

$$f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \to \quad \int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(b) - \arctan(1) \leq \frac{\pi}{4}$$

ESERCIZIO : 9.15. *Tenuta presente la definizione (vedi Dispense, parte III, pag.57-58)*

$$se \quad a > b: \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

consideriamo $\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione integrale $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$:

- *dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione G risulta positiva;*
- *esaminare se G sia funzione dispari;*
- *determinare $G'(x)$ e $G''(x)$;*
- *scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 e centro $x_0 = 0$ per la funzione G;*
- *determinare gli intervalli in cui la funzione G risulta convessa;*
- *provare che esistono finiti i limiti $\lim_{x\to-\infty} G(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} G(x)$*

Soluzione:

$$G(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sperimentiamo il carattere dispari della G sui due valori -5 e 5:

$$G(-5) = \int_0^{-5} e^{-t^2}\, dt = -\int_{-5}^{0} e^{-t^2}\, dt = -\int_0^5 e^{-t^2}\, dt = -G(5)$$

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \to \quad G'(x) = e^{-x^2} \quad \to \quad G''(x) = -2x\, e^{-x^2}$$

$$P_G(x) = G(0) + G'(0)\, x + \frac{1}{2} G''(0) x^2 = x$$

$$G \quad \text{convessa} \quad \Leftrightarrow \quad G''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x\, e^{-x^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0$$

Tenuto conto che

$$0 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

si riconosce la limitatezza dei due integrali

$$\int_0^b e^{-x^2}\, dx, \quad \int_c^0 e^{-x^2}\, dx \quad \forall\, b, c \in \mathbb{R}$$

da cui, per monotonia, l'esistenza dei due limiti per $b \to +\infty$ e per $c \to -\infty$.

10. Numeri complessi, equaz. differenziali

ESERCIZIO : 10.1. *Assegnati i due numeri complessi* $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$ *determinare:*

- $z_1 + z_2,\ z_1 z_2,\ z_1/z_2,$
- $|z_1|,\ |z_2|,\ |z_1 + z_2|,$
- $\arg(z_1),\ \arg(z_2),\ \arg(z_1 z_2),\ \arg(z_1/z_2)$
- *la parte reale di* e^{z_1} *e la parte immaginaria di* e^{z_2},
- *la parte reale e il modulo di* $e^{z_1 z_2}$.

Soluzione:

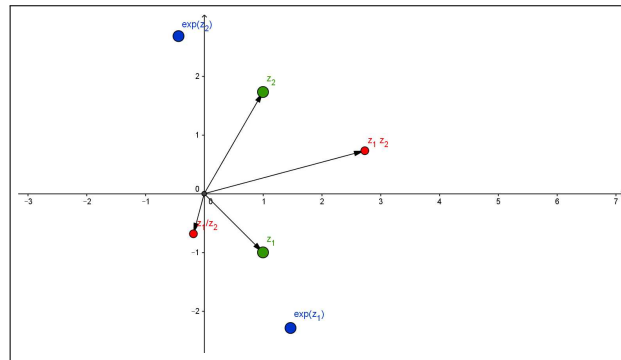



FIGURA 69. $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$z_1 * z_2 = 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i, \quad z_1/z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + (-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4})\,i$$

$$|z_1| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |z_2| = |1 + \sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2 + 3} = 2$$

$$|z_1 + z_2| = |2 + (\sqrt{3} - 1)\,i| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} =$$

$$= \sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \approx 2.129 < |z_1| + |z_2|$$

$$\arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{12}$$

$$\arg(z_1 / z_2) = -\frac{7\pi}{12}$$

$$e^{z_1} = e^1 e^{-i} = e(\cos(1) - i\sin(1)) \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(e^{z_1}) = e\cos(1)$$

$$e^{z_2} = e^1 e^{\sqrt{3}i} = e(\cos(\sqrt{3}) + i\sin(\sqrt{3})) \quad \rightarrow \quad \Im(e^{z_2}) = e\sin(\sqrt{3})$$

$$e^{z_1 z_2} = e^{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i} = e^{1+\sqrt{3}}(\cos(\sqrt{3}-1) + i\sin(\sqrt{3}-1)) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(e^{z_1 z_2}) = e^{1+\sqrt{3}}\cos(\sqrt{3}-1), \quad |e^{z_1 z_2}| = e^{1+\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO : 10.2. *Determinare i numeri complessi z che verificano l'equazione $z^2 = i$.*

Soluzione:

Le soluzioni dell'equazione si chiamano *radici quadrate di i*: si tratta di due numeri complessi z_1 e z_2 distinti.

Tenuto conto che $|i| = 1$ ne segue che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|i|} = 1$.

Per quanto concerne gli argomenti di z_1 e z_2 si hanno :

- $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$
- $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \rightarrow \quad \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \pi$

I due numeri z_1 e z_2 sono pertanto

$$z_1 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4), \quad z_2 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -z_1$$

ESERCIZIO : 10.3. *Determinare le radici terze, quarte e seste di 64, cioè tutti i numeri z, w, u tali che $z^3 = 64,\ w^4 = 64,\ u^6 = 64$ e disegnarli sul piano.*

Soluzione:

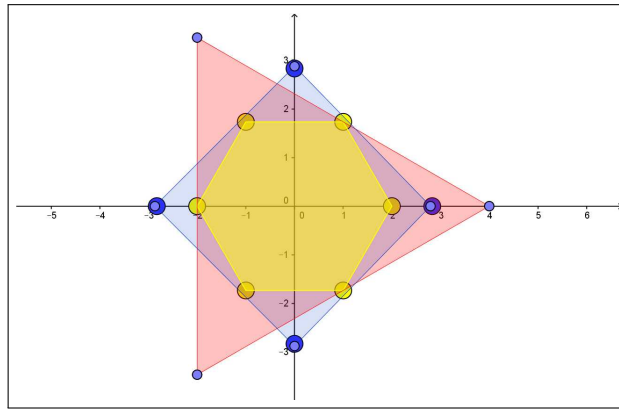



FIGURA 70. $z, \quad w, \quad u$

$$\begin{cases} |64| = 64, \\ \arg(64) = 2k\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{64}, & \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{3} & = \{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\} \\ |w| = \sqrt[3]{64}, & \arg(w) = \dfrac{2k\pi}{4} & = \{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\} \\ |u| = \sqrt[6]{64}, & \arg(u) = \dfrac{2k\pi}{6} & = \{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\} \end{cases}$$

In figura le radici terze sono i vertici del triangolo rosa, le radici quarte i vertici del quadrato azzurro, le radici seste i vsdrtici dell'esagono giallo.

$$z = 4\left\{1, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$w = 2\sqrt{2}\{1, i, -1, -i\}$$
$$u = 2\left\{1, \tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}, -1, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

ESERCIZIO : 10.4. *Determinare la parte reale della soluzione z dell'equazione $(1+i)z = 2+3i$.*

Soluzione:

$$(1+i)z = 2+3i \quad \rightarrow \quad z = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{5}{2} + \frac{i}{2}$$

ESERCIZIO : 10.5. *Sia* $z_0 = \frac{3}{10} + \frac{4}{10}i$

- *determinare le potenze* $z_0^2,\ z_0^3,\ z_0^4$ *e calcolare i loro moduli,*
- *calcolare* $\lim_{n\to\infty} |z_0^n|$.

Soluzione:

$$z^2 = -\frac{7}{100} + \frac{6i}{25}, \quad z^3 = -\frac{117}{1000} + \frac{11i}{250}, \quad z^4 = -\frac{527}{10000} - \frac{21i}{625}$$
$$|z| = \frac{1}{2}, \quad |z^2| = \frac{1}{4}, \quad |z^3| = \frac{1}{8}, \quad |z^4| = \frac{1}{16} \quad \rightarrow \quad |z^n| = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

ESERCIZIO : 10.6. *Posto* $f(t) = e^{i\pi t}$, $t \in \mathbb{R}$ *determinare:*

- $f(0),\ f(1),\ f(2)$,
- *le parti* $Re\,(f(t)),\ \Im(f(t))$ *reale e immaginaria di* $f(t)$,
- *le derivate* $f'(t)$ *ed* $f''(t)$.

Soluzione:

$$f(t) = e^{i\pi t} = \cos(\pi t) + i\sin(\pi t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(0) = & 1 \\ f(1) = & -1 \\ f(2) = & 1 \end{cases}$$

$$\text{Re}\,(f(t)) = \cos(\pi t), \quad \Im(f(t)) = \sin(\pi t)$$

$$f'(t) = i\pi e^{i\pi t} = i\pi f(t), \qquad f''(t) = -\pi^2 e^{i\pi t} = -\pi^2 f(t)$$

ESERCIZIO : 10.7. *Sia*

$$f(t) = \begin{cases} 3 & se\ t \le 1 \\ -2 & se\ 1 < t \end{cases}$$

- *determinare la funzione integrale* $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$,
- *verificare che* F *è continua in tutto* $\mathbb{R}$,
- *mostrare che* F *non è derivabile in* $x_o = 1$,
- *determinare la funzione integrale* $G(x) = \int_0^x F(t)\, dt$,
- *verificare che* G *è derivabile in tutto* $\mathbb{R}$

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 3\, dt & = 3x & \text{se } x \le 1 \\ \displaystyle\int_0^1 3\, dt + \int_1^x (-2)\, dt & = 3 - 2(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Per riconoscere che F sia continua in tutto $\mathbb{R}$ basta verificare che

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x)$$

ovvero che

$$\lim_{x \to 1^-} 3x = \lim_{x \to 1^+} (3 - 2(x-1))$$

Per riconoscere che F non è derivabili in $x_0 = 1$ occorre riconoscere che il rapporto incrementale

$$\frac{F(1+h) - F(1)}{h}$$

non converge per $h \to 0$.

Infatti

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3(1+h) - 3}{h} = 3$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3 - 2h - 3}{h} = -2$$

$$G(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 3t\, dt = \frac{3x^2}{2} & \text{se } x \le 1 \\ \displaystyle\int_0^1 3t\, dt + \int_1^x (3 - 2(t-1)) dt = \frac{3}{2} + -x^2 + 5x - 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

G è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo che riconosce che le funzioni integrali relative a funzioni continue, in questo caso la F, sono derivabili.

ESERCIZIO : 10.8. *Calcolare l'integrale* $\int_0^{2\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$ *esprimendo i due fattori* $\cos(2x)$ *e* $\sin(3x)$ *con le formule di Eulero*

$$\cos(2x) = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}, \quad \sin(3x) = \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}$$

Soluzione:

$$\cos(2x)\ \sin(3x) = \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) = \frac{1}{4i}\left\{e^{-ix}-e^{ix}-e^{-5ix}+e^{5ix}\right\}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x)\ \sin(3x)\,dx = \frac{1}{4i}\left\{\int_0^{2\pi} e^{-ix}dx - \int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx - \int_0^{2\pi} e^{-5ix}\,dx + \int_0^{2\pi} e^{-5ix}\,dx\right\} = 0$$

Avendo tenuto conto che per ogni intero m si ha

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}\,dx = \left.\frac{e^{imx}}{im}\right|_0^{2\pi} = 0$$

ESERCIZIO : 10.9. *Sia*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^4}\,dt$$

- *calcolare* $F'(x)$*,*
- *determinare in quali intervalli* $F(x)$ *è monotona,*
- *determinare in quali intervalli* $F(x)$ *è positiva,*
- *esaminare se* F *è limitata in* $\mathbb{R}$*.*

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^4}\,dt \quad \to \quad F'(x) = e^{-x^4}$$

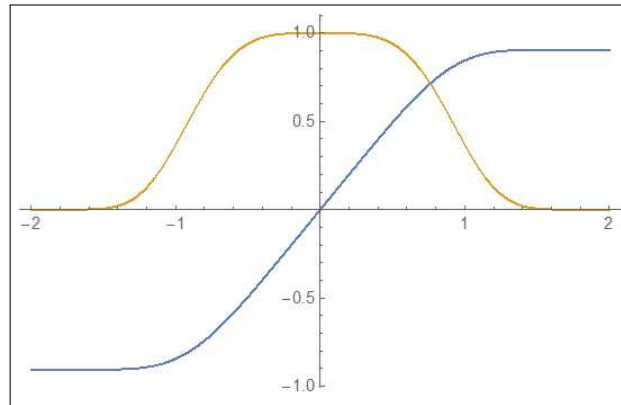



FIGURA 71. e^{-x^4}, $F(x) = \int_0^x e^{-t^4}\, dt$

Tenuto presente che $F'(x) = e^{-x^4}$ è sempre positiva ne deriva che F è crescente in tutto $\mathbb{R}$.

Tenuto conto che

- $F(0) = 0$
- F è crescente

si riconosce che

$$x < 0 \quad \to \quad F(x) < 0, \quad x > 0 \quad \to \quad F(x) > 0$$

Riconoscere che F è limitata corrisponde a riconoscere che gli integrali impropri

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^4}\, dt, \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-t^4}\, dt$$

sono entrambi finiti.

Tenuto presente che per $|t| > 1$ riesce

$$e^{-t^4} \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

$$|F(x)| \leq \begin{cases} \leq 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \leq 1 + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 1 + \frac{\pi}{4} & \end{cases}$$

Pertanto F monotona e limitata ha limiti, finiti, per $x \to \pm\infty$.

ESERCIZIO : 10.10. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)\, dt}{x^4}$$

Soluzione:

Il limite richiesto riguarda una frazione nella quale numeratore e denominatore tendono a zero: vale pertanto l'algoritmo di Höpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)\, dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO : 10.11. *Calcolare, con la regola di integrazione per parti, l'integrale* $\int_1^e \ln(x)\, dx$ *ed esaminre se esiste l'integrale improprio*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^1 |\ln(x)|\, dx = \int_0^1 |\ln(x)|\, dx$$

Soluzione:

$$\int_1^e \ln(x)\, dx = \int_1^e (x)' \ln(x)\, dx = x\ln(x)|_1^e - \int_1^e x\,(\ln(x))'\, dx = e-(e-1) = 1$$

$$0 < r < 1;\ \int_r^1 |\ln(x)|\, dx = \int_1^r \ln(x)\, dx = r\ln(r)-(r-1) \to 1$$

ESERCIZIO : 10.12. *Posto* $F(r,R) = \int_r^R t^\alpha\, dt, \forall r > 0, R > 0$ *determinare*

- *per quali* α *esiste* $\lim_{r\to 0^+} F(r,R)$,
- *per quali altri* α *esiste* $\lim_{R\to +\infty} F(r,R)$.

Soluzione:

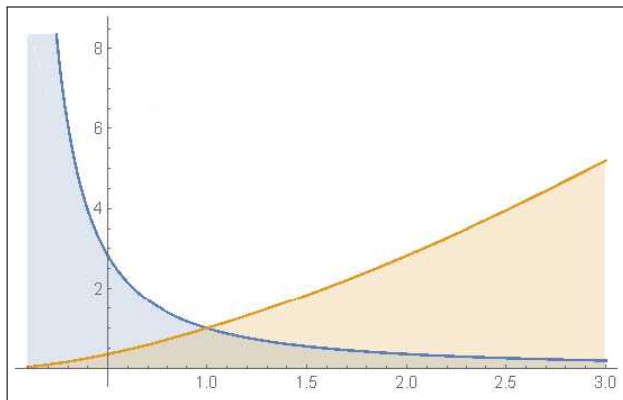



FIGURA 72. $F(r,R) = \int_r^R t^\alpha \, dt, \forall r > 0, R > 0$

Il calcolo di $F(r,R)$ $\forall r > 0, R > 0$ si esegue agevolmente tramite una primitiva $P_\alpha(t)$ di t^α:

$$F(r,R) = \int_r^R t^\alpha \, dt = P_\alpha(R) - P_\alpha(r)$$

Tale primitiva $P_\alpha(t)$ si presenta in modo diverso a seconda di α:

$$P_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} & \text{se} \quad \alpha \neq 1 \\ \\ \ln(t) & \text{se} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

- $\alpha > -1 \quad \to \quad 1+\alpha > 0$:

$$F(r,R) = \frac{1}{1+\alpha}\left\{R^{1+\alpha} - r^{1+\alpha}\right\} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{R\to+\infty} F(r,R) = +\infty \\ \lim\limits_{r\to 0} F(r,R) = \dfrac{R^{1+\alpha}}{1+\alpha} \end{cases}$$

- $\alpha < -1 \quad \to \quad 1+\alpha < 0$:

$$F(r,R) = \frac{1}{1+\alpha}\left\{R^{1+\alpha} - r^{1+\alpha}\right\} \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{R\to+\infty} F(r,R) = \dfrac{r^{1+\alpha}}{|\alpha+1|} \\ \\ \lim\limits_{r\to 0} F(r,R) = +\infty \end{cases}$$

- $\alpha = 1$

$$F(r,R) = \ln(R) - \ln(r) = \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad \to \quad \begin{cases} \lim\limits_{R\to+\infty} F(r,R) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{r\to 0} F(r,R) = +\infty \end{cases}$$

Come i limiti studiati riconoscono e come la figura permette di intuire i sottografici delle potenze t^{α} relativi all'intervallo $(0,+\infty)$ non hanno mai area finita: se risulta finita l'area del sottografico relativo a $(0,1)$ allora non è finita l'area del sottografico relativo a $(1,+\infty)$, e viceversa.

Parzialmente eccezione la fa il caso di $\alpha=-1,\ 1/t,$ per il quale non sono finite le aree di nessuno dei due sottografici.

ESERCIZIO : 10.13. *Determinare le funzioni $y(x)$ soluzioni delle equazioni differenziali $y''(x)+4y(x)=0$ e $y''(x)-9y(x)=0$, sia come funzioni trigonometriche sia come esponenziali complessi.*

Soluzione:

Le funzioni esponenziali $e^{\pm ht}$ hanno le derivate seconde

$$\left(e^{\pm ht}\right)''=h^2\,e^{\pm ht}$$

quindi

$$y''(x)+4y(x)=0 \quad\to\quad y(x)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

Le funzioni trigonometriche $\sin(kt)$ e $\cos(kt)$ hanno entrambe le derivate seconde seguenti

$$(\sin(kty))''=-k^2\,\sin(kt), \qquad (\cos(kty))''=-k^2\,\cos(kt)$$

quindi:

$$y''(x)-9y(x)=0 \quad\to\quad y(x)=c_1\,\sin(3t)+c_2\cos(3t)$$

La relazione osservata per le derivate seconde di $\sin(kt)$ e $\cos(kt)$ vale anche per le funzioni esponenziali

$$e^{ibt}: \quad \left(e^{ibt}\right)''=-b^2\,e^{ibt}$$

quindi si ha anche

$$y''(x)-9y(x)=0 \quad\to\quad y(x)=c_1\,e^{3it}+c_2e^{-3it}$$

Schema

Le soluzioni di un equazione differenziale omogenea

$$y'' + A\,y' + C\,y = 0$$

- si cercano nella forma $e^{\lambda\,t}$
- si sostituisce $e^{\lambda\,t}$ e le due derivate nell'equazione differenziale

$$e^{\lambda\,t}\left(\lambda^2 + A\,\lambda + C\right) = 0$$

- l'equazione $\lambda^2 + A\,\lambda + C = 0$ determina i valori λ_1 e λ_2 (reali o compolessi) di λ adatti a determinare le funzioni $e^{\lambda\,t}$ che soddisfano l'equazione differenziale,
- le combinazioni lineari $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea data.

Elenco delle figure

Indice analitico